VISIT…

LANZAROTE Caliente.COM

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

КЛАССИКИ НАУКИ



ЭНРИКО ФЕРМИ

НАУЧНЫЕ ТРУДЫ

В ДВУХ ТОМАХ

ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ
БРУНО ПОНТЕКОРВО



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1971

ЭНРИКО ФЕРМИ

НАУЧНЫЕ ТРУДЫ

I

1921—1938
ИТАЛИЯ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1971

УДК 539.1.01

СЕРИЯ «КЛАССИКИ НАУКИ»

Серия основана академиком *С. И. Вавиловым*

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

академик *И. Г. Петровский* (председатель),
академик *А. А. Имшенецкий*, академик *Б. А. Казанский*,
академик *Б. М. Кедров*, член-корреспондент АН СССР *Б. Н. Делоне*,
профессор *Ф. А. Петровский*, профессор *Л. С. Полак*,
профессор *Н. А. Фигуровский*, профессор *И. И. Шафрановский*

РЕДАКТОРЫ-СОСТАВИТЕЛИ:

Б. Понтекорво, В. Н. Покровский

2-3-2
183-71(II)



Enrico Fermi

ОТ РЕДАКЦИИ

Работы великого итальянского физика Энрико Ферми (1901—1954) представляют большой интерес для многочисленных кругов читателей вследствие огромной широты затронутых им проблем. Однако произведения Э. Ферми, написанные на итальянском, немецком, английском, изредка на французском языках, в оригиналах не всегда доступны советскому читателю, а имеющиеся переводы статей Ферми на русский язык не слишком многочисленны и рассеяны по самым различным изданиям. Поэтому редакционная коллегия серии «Классики науки» сочла необходимым издать научные труды Ферми на русском языке. Эту задачу существенно облегчило вышедшее в Италии и Америке собрание сочинений Э. Ферми на языках оригинала [Enrico Fermi. Collected Papers (Note e Memorie), v. I. Italy 1921—1938 (1962); v. II. United States 1939 — 1954 (1965); The University of Chicago Press — Accademia Nazionale dei Lincei, Roma]. В редакционную коллегию итало-американского издания входили близкие друзья и сотрудники Ферми: Э. Амальди, Г. Андерсон, Э. Персико, Ф. Разетти, С. Смит, А. Ваттенберг, Э. Сегре (председатель).

Обширное научное наследие Ферми включает оригинальные исследовательские статьи, отчеты периода второй мировой войны, ранее засекреченные и впервые опубликованные в упомянутом издании его трудов, обзорные статьи и лекции для профессиональных физиков, научно-популярные статьи, книги.

Несколько слов об отборе материала для данного издания.

В настоящее собрание научных трудов Э. Ферми вошли практически все журнальные статьи оригинального характера. В нескольких случаях, когда помимо серии статей по той или иной проблеме имелась обобщающая статья, помещалась только эта статья, иногда в сопровождении наиболее важных первых работ по этому вопросу. Если по данной проблеме имелось несколько статей разного объема, то, как правило, выбиралась наиболее полная.

Многие из упоминавшихся выше отчетов военного времени были рассекречены еще при жизни Ферми, однако лишь небольшое число из них он направил в печать. Тем не менее мы сочли необходимым включить в настоящее издание ряд неопубликованных Ферми отчетов — для достаточно полного освещения деятельности Ферми в этот период, а также потому, что они представляют интерес для истории науки.

Из многочисленных обзоров, лекций, научно-популярных статей и статей, написанных для Итальянской энциклопедии, в данное издание вошли не все. Одни были включены потому, что до сих пор сохранили большое дидактическое значение, другие — так как было известно, что ими дорожил сам Ферми, третьи — в качестве примеров произведений соответствующего жанра.

Ввиду ограниченного объема настоящего издания в него не включены книги Э. Ферми; к счастью, почти все его книги, которые и сегодня представляют интерес для советских читателей, уже переведены на русский язык (см. библиографию в конце II тома).

Таким образом, можно сказать, что в настоящее издание, кроме книг и некоторых популярных статей, вошли все работы Ферми, представляющие интерес для различных кругов читателей, — от физиков, астрофизиков и математиков до студентов физико-математических факультетов, учителей физики и математики, инженеров, историков науки.

Научные труды Э. Ферми издаются в двух томах: в I том вошли работы, написанные им до отъезда из Италии в 1938 г., во II том — работы, созданные после переезда в США (1939—1954 гг.). В начале I тома помещен биографический очерк о Ферми; в конце II тома приведены изложение неопубликованной работы Ферми и Туркевича (из обзора Альфера и Германа), воспоминания о запуске Хэнфордских котлов, основные даты жизни и деятельности Ферми, библиография его трудов. Статьи в каждом томе располагаются в хронологическом порядке соответственно дате выполнения работ, если она точно известна, в противном случае — по дате их публикации; это особенно существенно для работ военного времени.

Статьи и отчеты Ферми в настоящем издании предваряются своего рода предисловием — вводными замечаниями, написанными сотрудниками Ферми, с целью осветить обстоятельства, при которых было создано данное произведение, а также его место и значение в науке

того времени и в жизни Ферми. Большинство вводных замечаний переведено (правда, с некоторыми сокращениями) из упоминавшегося зарубежного издания трудов Ферми. Заметим, что мы не во всех случаях разделяем мнения комментаторов, но сочли возможным не всегда давать соответствующие справки. Ряд работ Ферми в настоящем издании сопровождается дополнительными комментариями Б. Понтекорво.

Такая форма комментариев (вводные замечания) является новой для серии «Классики науки». Она представляется нам наиболее подходящей для того случая, когда речь идет о современном нам классике, ибо позволяет лучше донести до читателя и сохранить для историков волнующую атмосферу научных открытий нашего века.

Для настоящего издания перевод всех статей сделан заново. Исправление мелких ошибок и опечаток не оговаривается. При переводе мы сочли целесообразным в основном сохранять терминологию времени написания статьи, оставляя без пояснений физически ясные термины (например, «вращающийся электрон») и сопровождая примечаниями вышедшие из употребления понятия (например, «скаляр поля»). Заметим также, что в некоторых случаях, особенно в отчетах военного времени, мы сознательно отказались от пуристского искоренения следов спешки или физического жаргона.

Перевод статей для настоящего издания выполнен Р. Г. Васильковым (статьи 11, 15, 19, 25, 27—32, 34—37, 39—41, 45, 47—49, 54—58, 61—63, 65—74, 76—80, 136, 138—140, 146—148), И. Г. Покровской (статьи 5, 6, 14, 17, 21, 23, 24, 33, 43, 44, 50—53, 59, 60, 64, 75), В. Н. Покровским (статьи 42, 81—135, 137, 141—145, 149 и приложения) и Б. Понтекорво (статьи 1—4, 7—10, 12, 13, 16, 18, 20, 22, 26, 38, 46).

Встречающиеся в книге ссылки на статьи Ферми, не вошедшие в настоящее издание, сопровождаются указанием номера, под которым они помещены в библиографии (например, [Б117]).

Нам приятно поблагодарить члена-корреспондента АН СССР Л. Б. Окуня, докторов физико-математических наук С. М. Биленького, Я. А. Смородинского и Н. А. Черникова за советы и обсуждения.

Б. Понтекорво, В. Покровский

ЭНРИКО ФЕРМИ

Великий итальянский физик Энрико Ферми занимает особое место среди современных ученых: в наше время, когда узкая специализация в научных исследованиях стала типичной, трудно указать столь же универсального физика, каким был Ферми. Можно даже сказать, что появление на научной арене XX столетия человека, который внес такой громадный вклад в развитие и теоретической физики, и экспериментальной физики, и астрофизики, и технической физики,— явление скорее уникальное, нежели редкое.

ЮНОСТЬ

Ферми родился в Риме 29 сентября 1901 г. в семье простого служащего. Если можно говорить о врожденном призвании, то, несомненно, Ферми был рожден физиком. Хотя в семье никто не побуждал его к занятиям наукой, Ферми еще мальчиком проявил исключительный интерес к математике и физике. Интеллектуальное развитие мальчика, ставшего впоследствии гениальным ученым, представляет большой интерес, и я хотел бы подробнее остановиться на этом.

Неизвестно точно, когда впервые у Ферми появился интерес к науке, но мы располагаем некоторыми фактами благодаря свидетельствам Энрико Персико [1, 2], профессора физики в Римском университете и близкого друга Ферми с того времени, когда им было по 14 лет, его жены, Лауры Ферми [3], и ряда его сотрудников и друзей, особенно Франко Разетти [4] и Эмилио Сегре [5], с которыми Ферми делился воспоминаниями. Сегре [5], например, рассказывает о следующем эпизоде: когда Ферми было только десять лет, он сумел понять, почему окружность описывается уравнением $x^2 + y^2 = R^2$, хотя это и потребовало от него напряженного интеллектуального усилия.

Позже тринадцатилетнему Ферми очень помог найти правильную дорогу в научном лабиринте инженер Амидей, друг семьи Ферми, который по праву может гордиться тем, что, обнаружив исключительные способности Ферми, оказал на него большое, а может быть, и решающее влияние. Инженер Амидей был очень аккуратным человеком. Когда после смерти Ферми Сегре попросил Амидея рассказать о первых шагах Энрико в науке, он сумел привести (41 год спустя!) крайне точные и ценные для истории

науки сведения, позволяющие понять некоторые важные элементы в формировании титанической личности Ферми. Ниже почти полностью приводится письмо инженера Амидея профессору Сегре, рассказывающее о периоде жизни Ферми от осени 1914 г. до осени 1918 г.

«Ливорно
25 ноября 1958 г.

... В 1914 г. я занимал должность старшего инспектора в Министерстве железных дорог. Вместе со мной работал главный инспектор Альберто Ферми. После работы мы обычно возвращались домой вместе. Почти всегда нас сопровождал Энрико Ферми — сын моего коллеги. Мальчик постоянно встречал отца после работы. Узнав, что я серьезно занимаюсь математикой и физикой, Энрико стал задавать мне вопросы. В то время ему было 13 лет, а мне 37.

Хорошо помню его первый вопрос *:

— *Правда ли, что существует раздел геометрии, в котором важные геометрические свойства выявляются без использования представлений о мере?*

Я ответил, что это совершенно справедливо и что раздел этот называется проективной геометрией.

— *Но каким образом эти свойства используются на практике топографами или инженерами?* — спросил он.

Этот вопрос показался мне совершенно резонным. Рассказав мальчику о некоторых свойствах, находящих успешное применение, я пообещал ему принести на следующий день — что и сделал — книгу по проективной геометрии.

Через несколько дней Энрико сказал мне, что он уже проштудировал первые три лекции, и обещал возвратить книгу, как только прочтет ее. Примерно через два месяца книга была возвращена. На мой вопрос, встретились ли ему какие-либо трудности, мальчик ответил: „*Никаких*" и добавил, что он доказал все теоремы и легко решил все задачи (в книге их было более 200).

Я был очень удивлен и захотел убедиться в том, что Энрико смог решить и те из них, которые, как я помнил, показались мне довольно трудными и от решения которых я отказался, потому что на это ушло бы слишком много времени. Но я убедился, что Энрико справился с этими задачами. Было совершенно очевидно, что в свободные часы, остававшиеся от приготовления школьных заданий, мальчик в совершенстве изучил проективную геометрию и с легкостью решал сложнейшие задачи.

Я убедился в том, что Энрико исключительно одарен, во всяком случае, в области геометрии. Когда я сказал об этом его отцу, тот ответил, что в школе Энрико считается хорошим учеником, но не более.

---

* По словам Амидея, выделенные в этом письме фразы Ферми-мальчика были дословно записаны им во время беседы.

Впоследствии я узнал, что Энрико изучал математику и физику по случайным книгам, которые он покупал в букинистических магазинах на рынке Кампо деи Фьори. Он надеялся, в частности, найти в этих книгах теорию, объясняющую движение волчков и гироскопов. Объяснения он так и не нашел. Но, возвращаясь к этой проблеме снова и снова, мальчик самостоятельно приблизился к разъяснению природы загадочного движения волчка. Я высказал мысль, что к точному научному объяснению можно подойти, лишь овладев теоретической механикой. Но для ее изучения потребуется знание тригонометрии, алгебры, аналитической геометрии и дифференциального исчисления. ... Энрико согласился со мной, и я стал доставать для него книги, которые, как мне казалось, могли бы дать ему ясные идеи и прочную математическую основу.

Приведу перечень книг, которые он брал у меня в тот период:

в 1914 г.— „Курс прямолинейной и сферической тригонометрии" Сэрре;

в 1915 г.— „Курс алгебраического анализа" Чезаро и „Лекции по аналитической геометрии" Л. Бианки (Пизанский университет);

в 1916 г.— по математическому анализу „Лекции, прочитанные в Пизанском университете" У. Дини;

в 1917 г.— по теоретической механике „Трактат по механике" Пуассона.

Кроме того, я считал, что ему будет полезно проштудировать книгу Г. Грассмана по математической логике с предисловием Дж. Пеано о применении дедуктивной логики. Эти книги он получил от меня в 1918 году ...

Энрико нашел векторный анализ очень интересным, полезным и несложным. С сентября 1917 г. до июля 1918 г. он изучил также некоторые стороны инженерного дела по книгам, которые я доставал для него.

В июле 1918 г., пройдя трехгодичный курс лицея за два года, Энрико получил диплом. Встал вопрос, имеет ли ему смысл поступать в Римский университет. Мы с Энрико вели на эту тему длинные разговоры.

Я спросил у него, чему он хочет посвятить себя: математике или физике? Привожу дословно его ответ:

— *Я изучал математику с таким рвением потому, что считал это необходимой подготовкой для последующего изучения физики, которой я намерен посвятить себя целиком и полностью.*

Тогда я спросил у него, считает ли он свое знание физики столь же обширным и глубоким, как и математики.

— *Я знаю физику шире и глубже, потому что прочел все наиболее известные книги по этому предмету,*— ответил он *.

Я уже убедился в том, что Энрико достаточно было прочесть книгу один раз, чтобы знать ее в совершенстве. Помню, например, как однажды он возвратил мне прочитанную им книгу по дифференциальному исчисле-

---

* По словам Э. Персико, одной из этих книг был многотомный курс Хвольсона; мне помнится, что сам Ферми как-то сказал, что основные сведения в области общей и экспериментальной физики он почерпнул именно из этого курса.— *Б. П.*

нию. Я предложил ему оставить ее у себя еще на один год с тем, чтобы он смог еще пользоваться ею. Ответ Ферми был поразительным.

— *Благодарю Вас*,— сказал он,— *в этом нет необходимости, поскольку я уверен, что запомнил все нужное мне. Несколько лет спустя идеи предстают передо мной с еще большей отчетливостью, и если мне понадобится формула, я смогу легко вывести ее.*

Кроме поразительной способности к наукам, Ферми обладал еще исключительной памятью.

Пришло время, когда я решил, что наступил подходящий момент, чтобы предложить ему свой план ... План этот заключался в следующем. Энрико должен поступить не в Римский университет, а в университет в Пизе. До этого ему надо будет выдержать конкурс в Нормальную школу в Пизе и впоследствии совмещать занятия в Школе с посещением лекций в университете. Энрико признал разумность моего плана и решил следовать ему, хотя и понимал, что родители будут возражать.

Я немедленно отправился в Пизу, чтобы получить там необходимую информацию и программу для конкурса в Нормальную школу. Потом я вернулся в Рим, чтобы проштудировать программу с Энрико. Я не сомневался в том, что он в совершенстве знает предметы, связанные с математикой и физикой. Так оно и оказалось. Энрико не только выдержал конкурс, но оказался первым среди соискателей.

Родители Энрико не одобрили мой план по вполне понятным человеческим соображениям.

— Мы потеряли Джулио (старший брат Энрико, умерший в 1915 г. после непродолжительной болезни),— сказали они,— а теперь мы должны расстаться с Энрико на четыре года, в то время как в Риме существует великолепный университет. Правильно ли это?

Потребовалось известное терпение и такт, чтобы постепенно убедить их в том, что принесенная ими жертва откроет блестящую карьеру их сыну. В конце концов было получено их согласие. Итак, как писала жена Энрико в своей книге „Атомы у нас дома“, „в конечном счете, два союзника — Ферми и Амидей — одержали победу“».

Хотелось бы немного прокомментировать это письмо. Мне кажется, что оно должно заинтересовать не только физиков и историков науки, но и более широкие круги читателей, особенно школьников, которые начинают увлекаться наукой, а также педагогов. Быть может, благодаря инженеру Амидею одаренный мальчик и стал гением. Конечно, Ферми был прирожденным физиком, но кто может сказать, какова была бы его судьба, если бы инженер Амидей отнесся к нему иначе, если бы на вопросы мальчика он отвечал, например, так: «Это пока слишком трудно для тебя. Подрастешь — поймешь!». Возможно, Ферми и не увлекся бы так серьезно математикой и физикой в тринадцатилетнем возрасте и в результате стал бы, скажем, лишь хорошим инженером или физиком. Он мог бы, например,

влюбиться, мог заинтересоваться шахматами или теннисом, иностранными языками или геологией. Дело в том, что перед тринадцатилетним Ферми был только один прямой путь, который мог бы привести его туда, куда он впоследствии пришел (и этот путь был указан Амидеем), но при этом было огромное число «боковых» дорог. Во всяком случае, я совершенно уверен в том, что Ферми стал великим Ферми именно потому, что его интересы определились и его интеллектуальные запросы уже удовлетворялись, когда он был еще мальчиком. В этом меня убеждал стиль Ферми во всем, что относилось к физике: читал ли он лекции, объяснял ли что-либо сотруднику, выражал ли сомнение в чем-то и т. д.— всегда создавалось впечатление, что все ему просто и знакомо, что физика для него то же, что дом родной.

Если мое суждение правильно, то число потенциальных Ферми в мире куда больше, чем это обычно представляется.

Вот что писал Э. Персико [1]: «Исключительные способности Ферми в точных науках проявились очень рано; когда я познакомился с ним (ему было 14 лет), я с удивлением обнаружил, что приятель у меня не только „дока" в науке, как говорят на школьном жаргоне, но и товарищ, форма ума которого совершенно отличается от типичной для всех „умных" мальчиков и блестящих учеников, с которыми я был знаком... В области математики и физики он проявил знания по гораздо большему числу разделов, чем мы учили в школе, причем знания были не школярскими, и он оперировал ими совершенно непринужденно. Для него уже тогда знание теоремы или закона означало прежде всего умение их использовать.

Вспоминая чувства восхищения и удивления, которые у меня, его ровесника, вызывал ум Энрико, я задаю себе вопрос: приходило ли мне в то время на ум слово „гений"? Вероятно, нет, поскольку для детей, и, быть может, даже для большинства взрослых это слово ассоциируется не столько с качеством ума, сколько с общеизвестной фигурой знаменитой и недоступной личности. Качества ума моего молодого друга, которые удивляли меня, были для меня явлением слишком новым для того, чтобы я мог найти им имя».

Вероятно, читателя заинтересует вопрос, как учился Ферми в школе по гуманитарным предметам? Конечно, он был хорошим учеником, что не удивительно, если учесть наличие у него прекрасной памяти; но, опираясь на некоторые, впрочем, субъективные впечатления, я сказал бы, что по гуманитарным предметам Ферми был не более чем «нормальным отличником». Правда, он знал довольно много стихов наизусть *, но это, я бы сказал, характеризует скорее его феноменальную память, чем страсть к поэзии. Мне помнится, где-то в 30-х годах Ферми сказал, что главным источником его общей культуры является многотомная итальянская «Детская энциклопедия» («Enciclopedia dei ragazzi»), довольно удачная и кра-

---

* Больше всего ему нравилась поэма «Неистовый Орландо» Ариосто. Небезынтересно заметить, что Ариосто был любимым поэтом другого великого итальянского физика — Галилея.

сочно оформленная книга для юношества. Это подтверждает, что интересы Ферми вне физики и математики были все-таки довольно ограниченными.

Память Ферми и рациональность мышления очень помогли ему при овладении иностранными языками. Энрико прекрасно знал немецкий язык, который он изучил еще мальчиком по совету инженера Амидея, французским и английским языками он владел более чем достаточно для понимания научной литературы. Позже, в США, Ферми, конечно, овладел английским языком в совершенстве, но не избавился от итальянского акцента, что определенно его огорчало.

Еще несколько слов об использовании иностранных языков в научных работах Ферми. В итальянский период жизни Ферми, естественно, писал статьи на итальянском языке. Но некоторые работы он написал также на хорошо знакомом ему немецком языке (до 1934 г.). Это были те произведения, которые он особенно ценил, что и дает представление об отношении самого Ферми к значимости своих работ. После упадка немецкой физики, связанного с приходом к власти Гитлера, немецкий язык в произведениях Ферми сменился английским. Когда же он эмигрировал в США, он стал писать только на английском языке.

УНИВЕРСИТЕТСКИЕ ГОДЫ

Осенью 1918 г. Ферми, согласно плану инженера Амидея, поступил одновременно в Высшую нормальную школу Пизы и на физико-математический факультет старинного Пизанского университета. Во всех итальянских университетах нет вступительных экзаменов; нужно лишь иметь аттестат зрелости и, конечно, располагать средствами для оплаты обучения. Для поступления же в Нормальную школу требовалось выдержать довольной трудный конкурс, но для ученика Школы обучение в университете было бесплатным. Ученик Нормальной школы автоматически является и студентом университета, но дополнительно посещает лекции и семинары в Школе. (Может быть, небезынтересно заметить, что с 1965 г. директором Пизанской нормальной школы является известный ученый Джильберто Бернардини.)

Высшая нормальная школа в Пизе была создана в 1813 г. Наполеоном по типу Высшей нормальной школы в Париже; в то время она была единственным бесплатным высшим учебным заведением Италии. Хотя официально Школа предназначалась для выпуска учителей средних школ, многие выпускники как гуманитарного, так и естественного отделения избирали карьеру исследователей и становились знаменитыми, что поднимало престиж Школы. В частности, почти все известные итальянские математики от Бианки и Кастельнуово до Вольтерра и Леви-Чивиты были ее выпускниками.

На конкурсном экзамене при поступлении в Школу от Ферми требовалось изложить свои знания по теме «Характер и причины звуков». Его

сочинение, первая страница которого приводится здесь (вклейка, стр. 24) дает представление об уровне знаний по классической физике, достигнутом Ферми в семнадцатилетнем возрасте. Достаточно сказать, что далеко не все выпускники физических факультетов университетов (а не только средней школы) смогли бы написать такое сочинение, в котором используется метод Фурье при решении дифференциального уравнения колеблющегося стержня. Ферми сам рассказывал, что экзаменатор был удивлен его сочинением и сказал, что никогда ничего подобного в своей практике не встречал.

Итак, когда Ферми был принят в Пизанский университет в 1918 г., он уже был хорошо знаком с классической физикой. Насколько глубокими были его знания в этой области науки в то время, можно судить по словам, сказанным уже знаменитым Ферми в 1934 г.: «Когда я поступил в университет, классическую физику и теорию относительности я знал почти так же, как и теперь». Юношей Ферми был самоучкой. Но и в университете профессора не смогли дать ему ничего нового: уже в то время он разбирался в физических проблемах лучше своих учителей. Кроме того, как раз те области, которые интересовали Ферми, особенно строение материи и квантовая теория, в Италии не культивировались, соответствующих университетских курсов не было. Как ни парадоксально, но Ферми стал учителем, и при этом блестящим, никогда не проходя через психологическую стадию ученика.

Большую пользу, по-видимому, принесло Ферми общение с талантливым однокурсником Франко Разетти; совместное обсуждение вопросов физики, особенно теоретической, помогло развитию проявившихся впоследствии исключительных дидактических способностей Ферми. Нет сомнения и в некотором прямом влиянии Разетти на Ферми. Для меня более десяти лет спустя стало ясным из разговоров в Физическом институте университета, что талант Разетти-экспериментатора и его любовь к различным экспериментальным методам импонировали Ферми.

Исключительные способности Ферми-студента были довольно широко известны в Пизе не только в среде его товарищей и друзей, но также и в коллективе профессоров и преподавателей университета и Нормальной школы.

Почти все сведения об университетском периоде получены от Персико и Разетти. Студенческие обязанности, конечно, не представляли никакой трудности для Ферми. Поэтому бóльшую часть времени он отводил на изучение предметов, им выбранных, а не обязательных университетских курсов. Вот что он написал Персико [1] в феврале 1919 г., т. е. будучи студентом второго курса: «...Поскольку для курсов мне почти ничего не надо делать, я пытаюсь расширить мои знания математической физики и буду делать то же самое в области математики; ведь я располагаю множеством книг».

Когда Ферми, двадцать лет спустя, уехал в Америку, он взял с собой все документы и тетради, которые впоследствии могли быть ему полезны.

Они находятся теперь в музее Ферми при Чикагском университете. Среди них имеется тетрадь, которую он вел с июля по сентябрь 1919 г. и содержание которой представляет большой интерес для понимания уровня научного развития восемнадцатилетнего Ферми. Ниже дается описание содержания этой тетрадки со слов Э. Сегре [5].

«Первые 28 страниц содержат конспект аналитической динамики и начаты в Каорсо 12 июля 1919 г. Здесь он излагает теорию Гамильтона и Якоби, затрагивая очень сложные вопросы крайне сжато и столь же ясно. Тут нет сведений об источниках его информации, но, по-видимому, ими являются работы Пуанкаре, которыми он занимался в то время, а также Аппеля.

Далее следуют 25 страниц об электронной теории вещества (начаты в Риме 29 июля 1919 г.), содержащие сжатый, как обычно, обзор по этому предмету. Здесь идет речь о лоренцовской теории, специальной теории относительности, теории излучения черного тела, диамагнетизме и парамагнетизме. Для этого раздела имеется библиография, в которой перечислены некоторые из самых важных книг по данному предмету, включая «Электронную теорию материи» Ричардсона, которую он очень внимательно изучил. Упоминаются также первые работы Бора об атоме водорода, хотя в то время они были малоизвестны в Италии.

На следующих 19 страницах (Рим, 10 августа 1919 г.) более подробно рассмотрена планковская теория излучения черного тела. За этим следует без комментариев обширная библиография (Каорсо, сентябрь 1919 г.) по радиоактивности, взятая из книги Резерфорда «Радиоактивные вещества и их излучения». Следующая глава, со страницы 81 до страницы 90 (Каорсо, 14 сентября 1919 г.), посвящена H-теореме Больцмана и кинетической теории. Здесь мы находим, как обычно, сжатое, но ясное изложение теории и некоторых ее применений. Для установления H-теоремы используется метод Больцмана, в котором проводится подробный анализ всех возможных соударений. Тетрадка, содержащая всего 102 страницы, заключается двумя библиографиями (из книги Таунсенда о газовом разряде) по электрическим свойствам газов и фотоэлектричеству. Последние страницы, написанные в Риме 29 сентября 1919 г., заканчиваются оглавлением.

Содержание тетрадки свидетельствует о многих чертах автора. Если учесть возраст автора и тот факт, что он был самоучкой, то восхищает степень его разборчивости в выборе материала. Характерно и то, что Ферми, никогда не боявшийся математических трудностей, все-таки не ставит самоцелью поиск «красивой» математики. Легка или трудна теория — это не главное; важно то, освещает ли она существенное физическое содержание проблемы. Если теория легка — прекрасно, но если необходима трудная математика, он быстро смиряется с этим. Можно заметить также определенное различие между главами, где логическая структура предмета преобладает над его экспериментальным содержанием, и главами более эмпирического характера. В первых уже видна рука мастера, во

вторых проявляется отсутствие опыта, а также критической оценки различных работ.

Удивительно, что только после одного года университетской работы студент сумел составить такую тетрадку, которая сделала бы честь и опытному преподавателю».

В 1920 г. Ферми написал Персико: «... Мои занятия идут очень хорошо, ибо я уже сдал неорганическую химию и решил изучить органическую химию в университете». По-видимому, химия тогда не была самым предпочитаемым предметом Ферми, и этим письмом он дает понять, что не собирается особенно расширять свои знания по химии, а просто будет готовиться к экзаменам по химии в университете. Кстати, единственными экзаменами, на которых Ферми не был удостоен высшей оценки, были экзамены по химии. В первые два года занятий в университете Ферми изучил, как известно из его переписки с Персико, следующие книги: «Теория вихрей» Пуанкаре, «Аналитическая механика» Аппеля, «Теоретическая химия» Нернста, «Курс общей химии» Оствальда, «Электронная теория материи» Ричардсона, «Пространство, время, материя» Вейля.

В 1920 г. он сообщает Персико, что уже завоевывает некоторый престиж в Физическом институте, где он в присутствии ряда профессоров должен читать лекцию о квантовой теории, тогда практически неизвестной в Италии. Как побочный результат, по словам Персико [1], его напряженного изучения физики в университетские годы, появились первые теоретические исследования Ферми в области электродинамики и теории относительности. На две из них (статьи 3 и 4) до сих пор ссылаются специалисты. Вот как Персико характеризует отношение двадцатилетнего Ферми к прорабатываемой им книге: «Его метод изучения книги всегда состоял в том, что из книги он брал только данные проблемы и результаты опыта, сам обрабатывал их и затем сравнивал свои результаты с результатами автора. Иногда при проведении такой работы он ставил новые проблемы и решал их или даже поправлял ошибочные, хотя и общепринятые решения. Так и возникли его первые печатные работы».

Темой работы Ферми на соискание степени доктора физики (что соответствует в СССР студенческой дипломной работе), однако, явилось экспериментальное * исследование по оптике рентгеновских лучей (статья 6). Я не буду останавливаться на ней, потому что в написанных Ф. Разетти вводных замечаниях читатель может найти много интересного относительно жизни Ферми в лаборатории в те годы и самой его дипломной работы.

Здесь стоит отметить, что знания, полученные Ферми во время выполнения диплома, не пропали даром и что его тогдашнее глубокое ознакомление с физикой кристаллов очень помогло ему в теоретических исследованиях по оптическим свойствам молекул и кристаллов десять лет спустя

---

* Согласно традициям итальянских университетов, требовалось, чтобы подобная работа была именно экспериментальной.

и в теоретических и экспериментальных исследованиях в области созданной им оптики нейтронов двадцать лет спустя.

Диплом Ферми получил (июль 1922 г.), конечно, с оценкой «cum laude»; диплом Нормальной школы он получил приблизительно в то же время и с такой же оценкой, выполнив работу по теории вероятности (статья 30).

ПЕРВЫЕ ГОДЫ ПОСЛЕ УНИВЕРСИТЕТА

Хотя Ферми пользовался огромным престижем в Пизанском университете, все-таки там ему не предложили работы. Это больше говорит об удивительной бедности итальянских университетов того времени, нежели о недальновидности дирекции физического факультета Пизанского университета.

Энрико возвращается домой в Рим и знакомится с сенатором профессором Орсо Марио Корбино, директором Физического института Римского Королевского университета. Корбино когда-то был первоклассным физиком-экспериментатором, однако с 20-х годов почти не занимался наукой и стал видной фигурой в частной электрической промышленности Италии, а также в течение некоторого времени занимал посты министра экономики и министра образования, хотя и не был членом фашистской партии. Корбино была присуща некоторая двойственность: с одной стороны — политическая карьера, бизнес и деньги, с другой — лаборатория, интересы итальянской физики, словом, все, что напоминало ему о его молодости. Ферми, а затем и его сотрудники видели в Корбино прежде всего только эту вторую, привлекательную сторону. Кроме того, он был яркой личностью: исключительно обаятельный, полный юмора и, по крайней мере, по представлениям Ферми, очень мудрый.

Корбино очень быстро «сориентировался» и понял, чтó представляет собой этот двадцатилетний юноша. С этого времени он стал покровительствовать Ферми. Корбино не только предложил ему временную работу в качестве преподавателя математики для студентов-химиков в Римском университете, но, что было важнее, сказал Ферми о своем намерении при первой возможности обеспечить для университета постоянное сотрудничество Энрико. Знакомство с сенатором имело большое значение для Ферми, который считал его вторым отцом; признательность Ферми отражена в написанном им некрологе (статья 75).

Необходимо подчеркнуть, что дружеское отношение такой влиятельной фигуры, как Корбино, к Ферми, его бескорыстная поддержка Ферми в создании молодой школы итальянских физиков в Риме, неизменное содействие этой школе, его искренняя радость ее успехам — все это оказало огромное влияние на итальянскую физику, без сомнения превышающее его прямой исследовательский вклад. На шутливом религиозном жаргоне Римского физического института Корбино получил «официальное» прозвище «Бога-отца».

В Риме Ферми провел несколько месяцев. Вскоре он был удостоен премии Министерства образования для усовершенствования за границей и с января по август 1923 г. пробыл в Германии, в Геттингене, у известного физика-теоретика, впоследствии лауреата Нобелевской премии, Макса Борна.

В геттингенский период Ферми опубликовал, по-прежнему в одиночку, цикл работ по теоретической механике. Одна из них (статья 11) — доказательство, правда, нестрогое, квазиэргодичности механических систем — понравилась П. Эренфесту, известному специалисту в этой области. Эренфест написал Ферми об этом, что, по-видимому, явилось причиной того, что Энрико вскоре поехал именно в Лейден, к Эренфесту. Но об этом позже.

У Борна Ферми встретился с такими блестящими молодыми физиками-теоретиками, как Паули, Гейзенберг и Йордан, которым, в отличие от Ферми, посчастливилось учиться у выдающихся ученых — Зоммерфельда и Борна. Как ни странно, пребывание в Геттингене и встреча с этими звездами физического мира не принесли, по словам самого Ферми, особенной пользы молодому самоучке. Его работы, выполненные в Геттингене, никак не отражают местного духа и могли бы быть выполнены Ферми в Риме, если бы он там остался. Это связано с рядом причин.

Вокруг Ферми в Италии не было физиков, с которыми бы он мог общаться на равном уровне и с которыми он, по его словам, мог бы сравнивать себя (что очень важно с психологической точки зрения); у него возникла привычка работать, полагаясь только на себя и используя лишь книги и научные работы для консультации. (Эта привычка, однако, вскоре исчезла.) Но это не все.

Двадцатилетний Ферми еще не обладал той уверенностью в себе, которая так необходима для творческой работы. Как рассказывал сам Ферми, он, наконец, обрел такую уверенность благодаря выдающемуся физику-теоретику П. Эренфесту, на обучении у которого в Лейдене, в Голландии, он находился с сентября по декабрь 1924 г. Советским физикам П. Эренфест очень хорошо известен, так как он часто бывал в Советском Союзе. Ферми рассказывал своим сотрудникам, что Эренфест оказал огромное влияние на развитие современной физики не столько своими классическими работами, сколько педагогической в широком смысле слова деятельностью, т. е. научным воздействием на других физиков. (Кстати, аналогичные слова произнес Ферми и о выдающемся французском физике Поле Ланжевене.) Эренфест был хорошо знаком и дружил со всеми крупнейшими физиками — от Бора, Эйнштейна, Лоренца и Планка до Гейзенберга и Паули. И вот Эренфест, обнаружив у Ферми дар крупного физика, не замедлил сказать ему об этом. С этого времени неуверенность Ферми в своих силах исчезла, что, как это известно от самого Ферми, было очень важно для него. Прямое влияние лейденского периода на Ферми, однако, незначительно, хотя тематика, которая тогда представляла интерес в Голландии, отражена в статье 20.

К началу 20-х годов относится и одна теоретическая работа, которая обнаруживает черты уже зрелого Ферми (статья 19). Я хочу упомянуть о ней здесь, так как многие физики не знают, что именно в этой работе Энрико Ферми заложена в очень ясной форме красивая идея, использованная позже Вейцзекером и Вильямсом в их знаменитом методе (речь идет о методе эквивалентных фотонов, т. е. о расчете различных эффектов при соударениях очень быстрых электрически заряженных частиц, основанном на замене поля частиц эквивалентным полем электромагнитного излучения).

По своей натуре Ферми был застенчив. Правда, это утверждение покажется необоснованным тем, кто узнал Ферми после его двадцатипятилетия и притом только по его отношению к физике. Ферми был слишком искренним и непосредственным, чтобы проявлять ложную скромность после того, как он внутренне осознал свое превосходство.

Застенчивость можно было заметить у Ферми и позже, но уже не в науке. Он очень не любил чем-то выделяться. Лаура Ферми в книге «Атомы у нас дома» рассказывает о случае, когда Ферми страшно смутил рабочий, случайно заставший его в довольно смешной одежде итальянского академика. Очень типичной была его виноватая, детская улыбка, появлявшаяся, правда, довольно редко, когда по какой-то причине у него вновь исчезала уверенность в себе, скажем, в присутствии Майораны, личность которого ему очень импонировала, или на теннисной площадке перед более сильным игроком.

Ферми всегда стремился к конкретности во всем, к упрощению, выделению главного. На этой черте характера Ферми, быть может, самой характерной, я остановлюсь несколько ниже, пока же я хотел согласиться с Сегре [5], что в условиях научной изоляции, о которой я говорил раньше, конкретность была необходима для Ферми, поскольку оценить важность своей работы он мог только с помощью результатов не слишком отвлеченного характера.

Во всяком случае в 20-х годах, когда основные принципы физики претерпевали коренную ломку (и Геттинген был одним из центров, где это происходило), ориентироваться молодому Ферми без учителей, по-видимому, было крайне трудно. Почти все труды Ферми характеризуются отсутствием абстрактности. Его теории почти без исключения созданы для того, чтобы объяснить, скажем, поведение определенной экспериментальной кривой, «странности» данного экспериментального факта и т. д. Не исключено, что черты, присущие Ферми,— конкретность, ненависть к неясности, исключительный здравый смысл,— помогая ему в создании многих фундаментальных теорий, в то же время в этих условиях помешали ему прийти к таким теориям и принципам, как квантовая механика, соотношение неопределенностей и принцип Паули.

Некоторое подтверждение этому можно найти в очень интересном отрывке из письма, которое Ферми написал Персико [2] в сентябре 1925 г., спустя два года после его пребывания в Геттингене: «...Я думаю, что в

последние несколько месяцев очень больших успехов не было, несмотря на формальные результаты в зоологии спектральных термов, полученные Гейзенбергом. По-моему, они начинают слишком далеко заходить в направлении отказа от понимания физической сущности». Вот как Персико [2] комментирует это письмо: «„Зоология спектральных термов“, по-видимому, относится к работе В. Гейзенберга (Zeits. f. Phys., 1925, **32**, 842), которая, правда, была тогда неудовлетворительной и формалистической, но спустя несколько месяцев эволюционировала в матричную квантовую механику. К квантовой механике в матричной форме, однако, Ферми не испытывал, по-видимому, научной симпатии. Первые его работы по квантовой механике были стимулированы не гейзенберговским подходом, а статьями Шредингера по волновой механике; при этом вклад Ферми состоял в том, что он выяснил соотношение между волновой механикой и старой корпускулярной механикой».

По словам Ферми, сказанным им в 30-х годах, из-за абстрактности общей теории относительности он также не испытывал большой симпатии к ней (хотя глубоко знал ее, см. статьи 1—4 и 7), и особенно к ее космологическому следствию — теории расширения Вселенной. Правда, в конце 40-х годов он пересмотрел свою точку зрения, по-видимому, в связи с увеличением круга наблюдений, связанных с теорией расширения Вселенной; его интерес к этой теории отражен в работах о происхождении химических элементов (см. приложение 1 и книгу Э. Ферми «Лекции по атомной физике»).

Здесь я сразу же должен предупредить читателя, у которого может возникнуть подозрение, что прохладное отношение Ферми к абстрактным и вообще формалистическим работам как-то вызвано недостаточным его знакомством с математическим аппаратом: он никогда не боялся математических трудностей и глубоко знал математику. С математическими методами Ферми ознакомился, как мы видели, будучи еще мальчиком. В Пизе он расширил свои математические знания до такой степени, что впоследствии мог при необходимости подходить к решению задачи самыми рафинированными методами.

С первых дней по возвращении в Рим он познакомился с представителями блестящей математической итальянской школы — Энрикуезом, Кастельнуово, Леви-Чивитой, Вольтеррой — и с тех пор подружился с ними. Они уважали его не только как единственного представителя зародившейся итальянской школы теоретической физики, но очень ценили его и как математика. Однако отношение Ферми к математике было особенным. Математика для него была средством, а не целью. Он возражал против использования изысканных или сложных математических методов для решения второстепенных или «надуманных» физических задач. Один раз он сказал: «Математика сегодня — это не передовая наука времен Гаусса; слишком часто сегодня математик или физик с математическим складом ума выдумывает трудную задачу, решает ее, а потом восклицает: „Смотри, какой я умный!“».

Сразу скажу, что это отношение к математике как к великой науке, уже не способной существенно обновляться, изменилось у Ферми позже, и особенно после его знакомства с крупнейшим математиком фон Нейманом, которым он восхищался.

Во всех работах Ферми математический аппарат вполне адекватен решаемой задаче; при этом он всегда избегал излишнего формализма, но, если это требовалось, был готов использовать самые изысканные методы. Ради простоты он часто удовлетворялся достаточно грубым приближением. Хорошим примером этого служит его оценка граничных условий на поверхности раздела между веществом и вакуумом для задачи диффузии тепловых нейтронов. Ферми показал (статья 74), что полученная на основе решения одномерной задачи простая оценка может, после небольшой модификации, дать достаточно точный результат и для реального случая трехмерной диффузии нейтронов. Этот вопрос имел большое значение для нейтронной физики в период создания атомной техники, так что силы больших научных коллективов были сконцентрированы на точном решении данной задачи. Это оказалось довольно сложным математическим делом; к тому же в практически важных случаях точное решение очень мало отличалось от результата Ферми. Не перестаешь удивляться тому, как легко все у него получалось!

Здесь уместно упомянуть о симпатии, которую Ферми всегда испытывал к любой форме численных методов решения математических задач. Забегая вперед, я хотел бы сказать несколько слов о его «вычислительной карьере». В кабинете Ферми всегда стояла маленькая настольная механическая счетная машинка. В 1927 г. он, не сумев найти общее решение установленного им дифференциального уравнения для среднего потенциала атома в зависимости от расстояния (статья 35), быстро решил его численно с помощью этой машинки. Работа такими кустарными вычислительными методами, хотя иногда и в широком масштабе (статья 59), продолжалась вплоть до появления первых мощных электронных вычислительных машин, значение которых сразу же стало ему понятно. Ферми с вдохновением и энтузиазмом воспринял рождение электронной вычислительной техники; немногие знают, что он — первый физик, который использовал мощные электронные вычислительные машины для своей повседневной работы. Он пропагандировал использование этих машин самими физиками, без математиков, и сам был великолепным программистом. Для читателя-физика небезынтересно отметить, что Ферми уже в 1952 г. предложил использовать вычислительные машины для автоматизации измерений на фотоэмульсиях и фотографиях.

УНИВЕРСИТЕТСКАЯ КАРЬЕРА

С января 1925 г. до осени 1926 г. Ферми пробыл во Флоренции, куда он был назначен «Professore incaricato» (временным профессором) с обязанностью чтения лекций по теоретической механике и по математической

физике (курса теоретической физики в итальянских университетах тогда не было). Здесь я хотел заметить, что университетская карьера в Италии — в то время единственный путь для исследователя, поскольку в промышленности физики не использовались,— завершалась выигрышем конкурса на право занятия штатной должности профессора. Все промежуточные назначения (ассистент, помощник, временный профессор) или звания («Libero Docente») не только плохо оплачивались, но и не давали ни прочности положения, ни престижа.

В возрасте 24 лет (а это необычайно рано) Ферми получил звание «Libero Docente». Это соответствует советской степени кандидата наук, но для соискания «Libera Docenza», однако, не требуется защиты диссертации; степень присваивается на основе совокупности научных работ комиссией штатных профессоров университета, которые оценивают представленные научные работы и заслушивают лекцию соискателя по теме, предложенной комиссией за 24 часа до лекции. Получение «Libera Docenza» для молодого Ферми, уже опытного преподавателя, не представляло ни малейшей трудности.

Флорентийский период был очень важным в жизни Ферми. Во Флоренции он снова встречает Разетти, который был там ассистентом кафедры, и совместно с ним проводит весьма интересные эксперименты (статьи 23 и 24).

Но самое главное — это то, что именно здесь, в спокойной атмосфере Института физики, расположенного вблизи Флоренции, на холме, где работал и скончался Галилей, Ферми создает и публикует знаменитую работу (статья 25) о статистической механике частиц, подчиняющихся принципу Паули. Этой работой были заложены основы так называемой статистики Ферми — Дирака. Как известно, основное значение статистики Ферми — Дирака заключается в том, что она дала ключ к пониманию свойств электронов в металлах. Но и другие применения статистики Ферми весьма многочисленны, что иллюстрируется множеством терминов, вошедших в физическую и астрофизическую литературу, таких, как «газ Ферми», «ферми-жидкость», «фермион», «поверхность Ферми», «метод Томаса — Ферми», «фермиевские импульсы нуклона в ядре» и т. д. В отличие от Дирака, Ферми пришел к новой статистике независимо от квантовой механики. Он давно вынашивал предпосылки этого творения (статья 17), но ему не хватало принципа Паули, после появления которого он сразу направил свою работу в печать. Кстати, Ферми заметно переживал то, что он не сумел сформулировать принцип Паули, к которому, как я слышал от него самого, очень близко подошел.

После открытия статистики, которая носит его имя, Ферми стал хорошо известен сначала, как это ни странно, за пределами Италии и только потом — на родине. Признания, которых он совершенно не искал, посыпались на Ферми в изобилии. В конце своей жизни Ферми был членом восемнадцати Академий, доктором «honoris causa» многочисленных университетов, лауреатом ряда крупнейших премий и медалей,

включая Нобелевскую премию. Кстати, в 1929 г. он был избран иностранным членом Академии наук СССР, что, если я не ошибаюсь, явилось первым зарубежным официальным признанием Ферми.

Из переписки Ферми с Персико известно, что Ферми все-таки беспокоился о своей университетской карьере до тех пор, пока не был назначен штатным профессором осенью 1926 г. В частности, его огорчило, что в начале 1926 г. ему не удалось пройти по конкурсу на кафедру математической физики Университета г. Кальяри, в Сардинии. Должность профессора для Ферми означала способ спокойно продолжать научную работу, но не больше. До конца жизни он никогда не искал ни важных административных постов, ни почета, ни наград. Он, естественно, был доволен признанием его заслуг, но честолюбие ему было чуждо.

Я хотел бы сделать здесь некоторые замечания о том, как, по моим субъективным впечатлениям, мне представляется отношение Ферми к жизни. Ему очень нравилась физика; при этом, особенно после пребывания в Лейдене, он почувствовал, что миссия исследователя и наставника ему по силам. В сравнении с этой любовью и этой миссией все остальное для Ферми имело второстепенное значение. Иногда сознательно, но чаще всего бессознательно, его отношение к научной карьере, спорту, отдыху, семье, литературе и искусству и даже к политике определялось тем, что он должен иметь самые лучшие условия для работы. Я сказал бы, что в жизни Ферми все происходило так, как будто некие «гормоны» так управляли его чувствами и образом жизни, чтобы автоматически обеспечить оптимальные условия для научных исследований. Он был гением, причем его гениальность в значительной степени связана с его любовью к научной простоте; вне области физики он был самым обыкновенным и, как ни странно, самым простым человеком. Эта простота в жизни выражалась в том, что у него были очень простые вкусы и требования, что он ненавидел усложнения (как в физике!), что он был лишен снобизма и фальши, что он был всегда совершенно искренен и не скрывал тех черт своего характера, которые многим могут казаться недостатками (например, нелюбовь к музыке, полное отсутствие азартности, безразличие к политическим и философским проблемам, некоторая осторожность при трате денег). Кстати, деньги были необходимы Ферми для спокойной научной работы, а не для «роскошной» жизни. Ферми очень любил теннис, лыжи, прогулки, хотя ни в одном виде спорта он не достиг высокого уровня. Но время, которое он тратил на эти увлечения и вообще на отдых, было строго ограничено до минимума.

Неудача Ферми в Кальяри все-таки сделала доброе дело. Сразу после создания новой статистики Корбино предпринял действия, направленные на приглашение Ферми в Римский университет. Он добился учреждения там кафедры теоретической физики — первой в Италии. (Насмешники называли ее «кафедрой фермифизики», так же как они называли «кафедрой разеттифизики» кафедру спектроскопии, созданную некоторое время спустя в Римском университете по инициативе того же Корбино с



Э. Ферми в 16 лет

14 Novembre 1918

Enrico Fermi

Foglio I



Fisica

Caratteri distintivi dei suoni e loro cause –

Il suono consiste, come è noto, in rapide vibrazioni delle particelle d'aria che vengono messe in movimento sia dai corpi vibranti in esse immersi, sia da qualunque perturbazione che possa fra di esse avvenire. Per poter quindi studiare completamente i caratteri dei suoni occorre che fermiamo dapprima la nostra attenzione sulle seguenti questioni: Come vibrano i corpi? Come l'aria trasmette le loro vibrazioni?

Per rispondere alla prima questione mi limiterò a trattare un caso particolare; le vibrazioni trasversali di una verga elastica incastrata a una estremità e perfettamente libera all'altra. Supporremo inoltre la verga omogenea (rettilinea) e le vibrazioni piccolissime e piane. Prenderemo la posizione di riposo della verga per asse dell x e il punto di incastro per centro delle coordinate. Se con y indichiamo lo spostamento del punto di ascissa x al tempo t, le vibrazioni essendo piccolissime, si ha l'equazione

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \qquad (1)$$

dove per brevità ho posto $a^2 = \frac{EI}{m}$, m essendo la massa per unità di lunghezza, E il modulo di elasticità della verga ed I il momento d'inerzia della sua sezione. Poniamo

$$y = u_1 \operatorname{sen} k_1 t + u_2 \operatorname{sen} k_2 t + \ldots = \sum u \operatorname{sen} kt$$

dove $u_1, u_2 \ldots$ sono funzioni della sola x e le k sono costanti per ora indeterminate. Si ha

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\sum k^2 u \operatorname{sen} kt \qquad \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \sum \frac{d^4 u}{d x^4} \operatorname{sen} kt$$

Sostituendo in (1) si vede che perché essa sia verificata occorre che le u soddisfino l'equazione:

Первая страница экзаменационной работы, написанной Ферми при поступлении в Высшую нормальную школу в Пизе

Начало письменной экзаменационной работы Э. Ферми на вступительном конкурсе в пизанскую Нормальную школу

11 ноября 1918 года
Энрико Ферми

ФИЗИКА

Характерные свойства звука и его причины

Звук представляет собой, как известно, быстрые колебания частиц воздуха, которые движутся под влиянием вибрирующих тел, находящихся в нем, а также под влиянием любого его возмущения, которое могло бы произойти. Поэтому, чтобы полностью изучить характеристики звука, нам следует обратить внимание прежде всего на следующие вопросы: как вибрируют тела? как воздух передает их колебания?

Чтобы ответить на первый вопрос, я ограничусь рассмотрением частного случая поперечных колебаний упругого стержня, закрепленного с одной стороны и совершенно свободного с другой.

Предположим еще, что этот стержень — однородный и прямой, а его колебания — малые и плоские. Положение стержня в покое примем в качестве оси x, а точку, где он закреплен, — за начало координат. Если через y обозначить смещение точки с абсциссой x в момент времени t, то, поскольку колебания являются малыми, имеет место уравнение

$$\partial^2 y + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \tag{1}$$

где для краткости я положил $a^2 = \frac{EI}{m}$, m — масса единицы длины стержня, E — модуль упругости стержня и I — момент инерции его сечения. Положим

$$y = u_1 \sin k_1 t + k_2 \sin k_2 t + \ldots = \Sigma\, u \sin kt,$$

где u_1, u_2, ... — функции только x, а k — пока неопределенные константы. Имеем

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\sum k^2 u \sin kt, \quad \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \sum \frac{d^4 u}{dx^4} \sin kt.$$

Подставив эти выражения в (1), увидим, что для его выполнения необходимо, чтобы и удовлетворяли уравнению

$$a^2 \frac{d^4 u}{dx^4} = k^2 u,$$

интеграл которого есть

$$u = C_1 e^{\sqrt{k/a}\,x} + C_2 e^{-\sqrt{k/a}\,x} + C_3 \sin\sqrt{k/a}\,x + C_4 \cos\sqrt{k/a}\,x,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — *произвольные постоянные.*

Заметим теперь, что поскольку стержень закреплен в точке $x = 0$, *то для* $x = 0$ *и при любом* t *должно быть* $y = 0$, $\partial y/\partial x = 0$ *и поэтому также* $u = 0$, $du/dx = 0$. *Кроме того, на свободном конце, соответствующем* $x = l$, *имеется* $\partial^2 y/\partial x^2 = \partial^3 y/\partial x^3 = 0$ *и поэтому* $d^2u/dx^2 = d^3u/dx^3 = 0$.

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&C_1 + C_2 + C_4 = 0,\\
&C_1 - C_2 + C_3 = 0,\\
&C_1 e^{\omega} + C_2 e^{-\omega} - C_3 \sin\omega - C_4 \cos\omega = 0,\\
&C_1 e^{\omega} - C_2 e^{-\omega} - C_3 \cos\omega + C_4 \sin\omega = 0,
\end{aligned}$$

где для краткости положено $\omega = l\sqrt{\dfrac{k}{a}}$.

целью привлечь Разетти в университет.) Осенью 1926 г. Ферми выдержал соответствующий конкурс и занял должность профессора в Риме. Итак, его научная карьера в Италии достигла вершины, когда ему было 25 лет.

СОЗДАНИЕ ИТАЛЬЯНСКОЙ ШКОЛЫ ФИЗИКИ

Когда Ферми в конце 1926 г. прочно обосновался в Риме в качестве профессора теоретической физики, там не было никакого исследовательского коллектива. Персико уехал во Флоренцию; Корбино был слишком занят другими вопросами, а в университете ему более чем хватало преподавательской деятельности.

Итальянскую школу современной физики создал тогда Энрико Ферми, один из великих учителей нашего времени, при содействии Орсо Марио Корбино, блестящего организатора науки. Многие из учеников Ферми, такие, как Разетти, Амальди, Сегре, Вик, Рака, Росси, Фано, Ферретти, Бернардини, Коккони, Конверси, Пиччиони и другие стали широко известными физиками.

О неизгладимом следе, оставленном Ферми в научной жизни Италии, можно судить по тому, что в настоящее время, через тридцать лет после того, как он покинул свою родину, там успешно работает многочисленная группа довольно известных физиков (первого, второго и последующих поколений), продолжающих традиции современных первоклассных теоретических и экспериментальных исследований, созданных Ферми. Ядро этой школы (Разетти, Сегре, Майорана, Амальди) сформировалось вокруг Ферми уже в 1927 г. благодаря усилиям Корбино.

Вот как Сегре [5] описывает занятия, не связанные с университетскими курсами, которые Ферми проводил с ними.

«Они были совершенно импровизированными и неофициальными. Поздно вечером мы собирались в кабинете Ферми, и часто предмет разговора становился темой лекции. Например, мы спрашивали: „Что известно о капиллярности?“ И Ферми экспромтом читал красивую лекцию о теории капиллярности. Таким образом мы занимались рядом предметов на „промежуточном“ уровне, соответствующем, например, знаменитой книге „Введение в теоретическую физику“ Планка или книгам Слетера и Франка. Однако иногда уровень становился более высоким, и Ферми объяснял нам статью, которую сам только что прочел; так мы познакомились со знаменитой работой Шредингера по волновой механике. Эти лекции никогда не образовывали какого-то регулярного курса. Относительно некоторых областей, о которых мы ничего не знали и по которым мы задавали Ферми вопросы, он ограничивался упоминанием хороших книг ... Однако книги, которые он предлагал, не всегда были самыми удачными, поскольку, очевидно, он упоминал те, которые изучил сам, а они не обязательно были хороши с педагогической точки зрения...

Занятия были посвящены главным образом теоретической физике, но между слушателями теоретиками и экспериментаторами не делалось различий. Сам Ферми, который работал тогда только в области теоретической физики, также интересовался экспериментальными работами. Его знания и интересы охватывали всю физику и он внимательно прочитывал несколько журналов. Он предпочитал конкретные проблемы и недоверчиво относился к слишком абстрактным или общим теориям. Но любая специфическая задача в какой-либо области физики — в классической механике, спектроскопии, термодинамике, теории твердого тела и т. д.— могла увлечь его, бросив вызов его уму и физической интуиции. Часто, разговаривая с ним, мы видели развитие красивого, простого и ясного объяснения загадочного явления.

В то время много раз нам представлялся случай быть свидетелями зарождения и выполнения нового и оригинального исследования. Конечно, невозможно было сказать, какая предварительная работа уже была выполнена Ферми сознательно или подсознательно. Наверняка у него не было ничего написанного. Мы присутствовали при развитии теории, которое происходило не слишком быстро, но практически без ошибок, неправильных начинаний или изменений направления мысли. Ферми как будто читал лекцию, только медленнее, и в конце ее наши записи (или, по крайней мере, соответствующие уравнения) были готовы для опубликования почти без переделок. Любопытная характеристика фермиевского способа работы состояла в *постоянстве* скорости, с которой он продвигался вперед. Если переходы были легкими, он все-таки продвигался медленно, и рядовой наблюдатель мог бы задать вопрос: „Почему он теряет так много времени на такую простую алгебру?“ Однако, когда возникали такие трудности, которые остановили бы человека меньших способностей бог знает на сколько времени, Ферми решал их с той же скоростью. У нас создалось впечатление, что Ферми — каток, двигающийся медленно, но не знающий препятствий. Окончательные результаты были всегда ясными, и часто мы задавались вопросом: „Почему это не было найдено давно, раз все так просто и ясно?“. Ферми навсегда сохранял в памяти один раз использованный им метод и применял его к задачам, совершенно отличающимся от той, которая породила физическую идею и математическую технику...

Скорость формирования молодого физика в этой школе была невероятной ...

Ферми не любил давать темы для дипломных работ или вообще для исследований. Он ожидал, что студенты сами найдут их или получат от старших товарищей. Причина этого, как он сам говорил, состояла в том, что ему было нелегко найти достаточно простые темы для начинающих... Крепкая, многолетняя дружба связывала всех участников этой группы. Разница в возрасте была невелика: самому старшему, Ферми, было 26 лет (в 1927 г.), а самому младшему, Амальди,— 19 лет. Корбино на вечерние занятия приходил редко. Однако он очень интересовался положением в группе, вопросами продвижения сотрудников по служебной лестнице и т. п.

Как можно было ожидать, слухи о том, что происходит в Риме, быстро распространились среди молодых итальянских физиков, и скоро к нам стали приезжать Дж. Джентиле, Б. Росси, Дж. Бернардини, Дж. Рака, Дж. Вик, У. Фапо и многие другие».

Впервые в этом столетии, благодаря Ферми, иностранные физики потянулись к итальянскому центру исследований. Эти физики, среди которых были Бабá, Бете, Блох, Лондон, Пайерлс, Плачек, Теллер, Уленбек, принимали участие в семинарах Института физики вместе с небольшой группой итальянских ученых и студентов; число участников семинара не превышало десяти.

Среди участников семинара я хотел бы отметить Этторе Майорану, личность которого могла бы заинтересовать не только физиков, но и литераторов. По происхождению Майорана принадлежал к знатной сицилианской семье; он учился на инженерном факультете Римского университета. В 1927 г. Майорана, тогда еще студент, стал членом неофициальной группы Ферми; впрочем, он продолжал работать в институте, не получая жалования, и после получения диплома (он был богатым, а Институт — бедным; по-моему, не исключено, что судьба Майораны сложилась бы не так трагично, если бы ему приходилось зарабатывать себе на хлеб). Спустя некоторое время после вступления в группу Ферми, Майорана уже обладал такой эрудицией и находился на таком уровне понимания физики, что разговаривал с Ферми на научные темы на равных. Сам Ферми считал его крупнейшим физиком-теоретиком нашего времени, часто им восхищался, а иногда даже и тушевался перед ним. Я точно помню слова Ферми; «Если задача уже поставлена, никто в мире не может решить ее лучше Майораны». Майорана был пессимистом по натуре, вечно был недоволен собой (и не только собой!). На семинарах он обычно молчал, но иногда нарушал молчание ради саркастического комментария или для того, чтобы сделать парадоксальное, хотя и очень существенное замечание. Я помню, как не раз на семинарах он терроризировал известных зарубежных физиков. Когда-то он был вундеркиндом. Это был математик большого масштаба и в то же время, как ни странно, живая «счетная машина». В «религиозной иерархии» института он имел звание «великого инквизитора». Трудно представить более различные характеры, чем у Ферми и у Майораны. Если Ферми был совершенно простым человеком (с маленькой оговоркой: он был гений), то характер Майораны был сложным и совсем не тривиальным. К великому сожалению Ферми, Майорана почти никогда не публиковал своих работ; его след в науке бесконечно менее значителен, чем мог бы быть. Начиная с 1932 г. Майорана все реже и реже встречался с другими физиками и в 1937 г. буквально исчез. По-видимому, он покончил с собой, но абсолютной уверенности в этом нет.

Семинары Ферми проходили в непринужденной обстановке и всегда много давали их участникам. Ферми был прирожденным учителем. Он не только мастерски проводил семинары и неофициальные лекции в узком кругу, о чем речь шла выше, но также блестяще читал курсы лекций сту-

дентам. Его лекции в университете по квантовой механике, атомной физике, математической физике, термодинамике и его любимый курс по геофизике отличались большой ясностью и стройностью изложения; это, однако, не было результатом особо тщательной подготовки к лекциям (Ферми почти никогда не готовился к ним), а объяснялось глубокими знаниями и исключительной ясностью его ума. В конечном счете качество лекций являлось отражением его самостоятельной работы, проведенной еще школьником, когда он пытался осознать и понять различные явления природы. Но были лекции, к которым Ферми тщательно готовился, как о том подробнее говорится во вводных замечаниях Янга к статье 124.

В физике, по мнению Ферми, нет места для путаных мыслей, и физическая сущность любого действительно понимаемого вопроса может быть объяснена без помощи сложных формул. Правильность такого мнения иллюстрировалась замечательной способностью Ферми быть понятным слушателям самого различного уровня. Часто он утверждал, что *действительно* понимающие природу того или иного явления должны уметь получать основные законы из соображений размерности.

Ферми всегда подчеркивал огромную важность для студентов хорошей подготовки по классической физике, и он сам любил читать лекции по элементарной физике. Общий курс математической физики, прочитанный Ферми в Риме, представлял собой нечто вроде энциклопедии, содержавшей элементы электродинамики, теории относительности, теории упругости, теории теплопроводности и диффузии. Он очень возражал против курсов математической физики, посвященных чрезмерно узким проблемам. Мне помнится, как однажды он полусерьезно излагал группе сотрудников свои идеи о том, как следует реформировать высшее образование в университетах. «Возьмем,— сказал он,— для примера коллектив, скажем, из двадцати студентов-однокурсников, которому при настоящих порядках следует слушать лекции по пяти различным предметам у пяти преподавателей. Это не рационально; гораздо целесообразнее была бы «система менторов», согласно которой каждый из пяти преподавателей возьмется за преподавание только четырем студентам всех пяти предметов». Мы возражали Ферми, что это будет хорошо только для тех четырех студентов, которые попадут в руки Энрико, а для других будет настоящая трагедия!

Невозможно провести грань между Ферми-физиком и Ферми-человеком. Своих студентов и сотрудников Ферми учил не только физике в прямом смысле этого слова. Собственным примером он учил их страстно любить физику, равно как и понимать дух и этику науки. Ферми упорно подчеркивал исключительную моральную ответственность ученого при опубликовании научной работы. В опубликованных работах Ферми обнаруживается почти педантичное внимание к точности выражений, в них не встретишь излишне категоричных утверждений и т. д. Но его совершенно не заботила элегантность стиля и формы статей: для него важнее всего было содержание работы и ясность изложения.

Ферми нетерпимо относился к часто встречающейся тенденции экспериментаторов переоценивать точность своих измерений. В институте было известно «правило», которым руководствовался Ферми в отношении к новому или «странному» результату: увеличь втрое приведенную экспериментатором ошибку измерения и только тогда начинай свое рассуждение.

Несмотря на его оригинальность и интуитивное чутье нового, Ферми был того мнения, что в науке новые законы надо принимать только в том случае, когда нет иного выхода. Ему очень не нравилось стремление некоторых физиков найти «сверхновое», не исчерпав всех возможностей в рамках уже существующих принципов и законов. Если у читателя создалось впечатление, что Ферми был консерватором в науке, то я плохо рассказал о нем. Речь идет не о консервативности подхода Ферми, а о его фундаментальности. Что же касается его подхода к жизни, политике, искусству и т. д., то действительно было бы правильно назвать его консерватором.

Ферми глубоко презирал научный авантюризм, субъективизм в науке, тенденцию некоторых экспериментаторов получить именно те результаты, которые априори им хочется найти. Он считал совершенно антинаучной и вредной для развития физики поспешность в опубликовании научных работ, вызванную желанием завоевать приоритет, и встречающуюся в некоторых лабораториях атмосферу «охоты за открытиями». Я помню такой случай в 30-х годах. В одной статье, по мнению Ферми, совсем неубедительной (вследствие нечеткости постановки опыта и недоброкачественности самих измерений), группа иностранных физиков опубликовала сообщение об обнаружении дифракции медленных нейтронов. Несколько позже в печати появилось описание безупречных экспериментов другой зарубежной группы по этому вопросу; Ферми был возмущен тем, что приоритет в какой-то мере будет принадлежать первой группе, которая его не заслуживает. «И самое печальное,— сказал он,— то, что против этой системы ничего нельзя предпринять». Более того, по мнению Ферми, совершенно недостойной является привычка некоторых ученых при опубликовании своих экспериментальных работ «между прочим» приводить ненадежные данные (с надеждой завоевать приоритет) и не считать для себя позором, если кто-либо опровергнет эти данные. Он презирал также саморекламу в науке.

Пленительная ясность мысли, характерная для лекций Ферми, относится также к его книгам (Ферми написал их более десяти) и статьям — не только оригинальным, о чем шла речь выше, но и обзорным и популярным. Некоторые его книги хорошо известны в Советском Союзе. Однако двухтомный «Курс физики для средних школ» (1929 г). и «Введение в атомную физику» (1928 г.) в СССР почти неизвестны.

Ферми писал свои книги так же, как и читал лекции,— предельно ясно и, казалось, с минимальным усилием. В студенческие годы мне довелось видеть рукопись (мы занимались по ней) его книги «Молекулы и кристаллы», когда автор еще работал над ней. Каждое утро, между 6 и 8 часами, Ферми аккуратно писал на нечетных страницах тетради, оставляя четные

страницы для возможных поправок. Однако, когда рукопись книги была готова к печати, число поправок оказалось совершенно ничтожным.

Удивляло также то, что Ферми мог писать, почти не прибегая к другим статьям или книгам. Кстати, однажды это привело к неожиданному результату, в связи с которым друзья Ферми долго подсмеивались над ним. В написанной Ферми книге по физике для средних школ итальянского физика XVII столетия Эванжелиста Торричелли он перекрестил в Джиованбаттиста Торричелли (а знаменитых итальянских физиков не так уж много).

Вообще Ферми мало читал, а тем более мало покупал книг по физике после окончания университета; он предпочитал самостоятельно разработать заинтересовавший его вопрос, нежели найти готовый ответ. Ферми также проводил сравнительно мало времени за научными журналами, хотя он всегда был великолепно осведомлен о происходящем в мире физики. Это достигалось «вытягиванием», по выражению самого Ферми, сведений в непосредственном разговоре с другими физиками. Вспоминается случай [6], иллюстрирующий еще одну характерную для Ферми черту — способность давать советы специалистам, работающим в других, даже малознакомых ему узких областях. В 1942 г. мне довелось встретиться с Ферми в Чикаго. В то время я работал в области применения ядерной физики к разведке месторождений нефти (нейтронный и гамма-каротаж). Поскольку Ферми не был знаком с этим методом, он начал «вытягивать» сведения из меня. Вскоре он уже сам давал мне советы и высказывал многочисленные идеи, послужившие основой для дальнейшей длительной работы в этой области.

НАУЧНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ В РИМЕ

Кипучая теоретическая деятельность Ферми со времени опубликования работы по статистике (1926 г.) до конца 1933 г., когда он начал работать в области ядерной физики, шла по трем главным направлениям.

Во-первых, Ферми в течение нескольких лет осваивал квантовую механику (а затем квантовую электродинамику), успешно объяснял (статьи 29, 31, 34) и страстно пропагандировал ее в научных кругах. Его «проповеди» пользовались громадным успехом у молодежи и ничтожным — у ученых старшего поколения (в частности, у группы выдающихся римских математиков), которые не сумели принять революционного духа новой теории. Эту его деятельность в период с 1926 по 1930 г. лучше охарактеризовать словами ее очевидца, Э. Сегре.

«Первыми были поняты статьи Шредингера, которые вызвали большой интерес и энтузиазм. Ферми быстро объяснил их своим друзьям, позже — Корбино, который оставался скептиком некоторое время; еще позже он выступил на эту тему на математическом семинаре, где профессиональные математики старшего поколения, не очень хорошо знакомые с экс-

периментальными основами физики, выдвинули несколько остроумных возражений против общепринятой интерпретации квантовой механики.

Так, например, статья 43 возникла из обсуждения, в котором многочисленные вопросы поднял профессор Кастельнуово. Ферми был склонен к нетерпимости по отношению к людям, не принимавшим нового развития квантовой механики, но, конечно, он относился по-разному к некомпетентным возражениям, которых было много, и к действительным трудностям, вроде тех, на которые было указано Кастельнуово.

Нередко он сожалел, что даже те люди, к которым он испытывал уважение и которыми восхищался, такие, как Корбино, иногда проявляли скептицизм по отношению к квантовой механике и ее интерпретации, что являлось, как он думал, результатом недостаточного понимания. (Однако следует сказать, что в последние годы своей жизни Ферми был менее убежден в том, что обычная интерпретация квантовой механики является последним словом.) Сопротивление квантовой теории оказывало в основном старшее поколение физиков, поскольку молодые физики либо поняли новую теорию, либо поверили в нее, либо научились использовать ее, даже не полностью разобравшись в ней.

Приход квантовой механики, по мнению Ферми, а также Корбино, означал завершение атомной физики. Фундаментальные вопросы были решены, будущее находилось в области ядерной физики и в исследовании сложных биологических структур».

Я хотел бы несколько дополнить последние слова Сегре. Когда я приехал в Рим в 1931 г., Ферми часто утверждал (полусерьезно), что физика идет к концу (как и география) в том смысле, что скоро все будет ясно. Он думал, что будущее принадлежит генетике. При этом сам читал с большим интересом и рекомендовал сотрудникам книгу «Наука о жизни» Уэллса, Хаксли и Уэллса. Как ни странно, эти идеи о бесперспективности физики были у Ферми в 1931—1932 гг., на заре невиданного скачка современной физики, которому он сам значительно способствовал.

К деятельности Ферми в выяснении основ новой физики следует особенно отнести его переформулировку квантовой электродинамики (статья 48), которая представляет собой блестящий (и типичный для Ферми) пример ясной трактовки трудного вопроса.

Второе важное направление теоретической деятельности данного периода состояло в продолжении его работ по статистической механике. В 1928 г. он (независимо от Томаса) применил свою статистику к определению среднего электрического потенциала в атоме (метод Томаса — Ферми, статьи 35—37).

Наконец (Last but not least!), своими теоретическими работами Ферми внес неоценимый вклад в учение о структуре атомов и молекул. Особо следует упомянуть о совокупности теоретических работ по структуре молекул, в которых Ферми дает количественное объяснение различных экспериментальных наблюдений (книга «Молекулы и кристаллы»). Эти проблемы, интересовавшие Ферми в 1931—1933 гг., были связаны с основны-

ми экспериментальными исследованиями Института, который по традиции, и особенно благодаря Разетти, в основном был первоклассной спектроскопической лабораторией.

В статьях 42 и 54 Ферми разрабатывает количественную теорию сверхтонкой структуры спектральных линий, оставляя и в этой области физики неизгладимый след. Кстати, уже тогда в течение нескольких лет Ферми был того мнения, что Институт должен заняться ядерной физикой. Исследование сверхтонкой структуры спектральных линий, обусловленной, согласно Паули, взаимодействием орбитального движения электрона с магнитным моментом ядра, явилось естественным «мостом» при переходе интересов Ферми и лаборатории в целом от атомных проблем к ядерным.

В качестве «дебюта» в области чисто ядерной физики Ферми опубликовал в 1934 г. свою известную теорию бета-распада (статья 58) — классическую работу, основанную на гипотезе Паули о том, что в бета-процессе одновременно с электроном испускается нейтрино. Имеющая сама по себе большое значение эта работа явилась и прототипом современных теорий взаимодействия элементарных частиц. Ферми направил эту работу в английский журнал «Nature» для срочного опубликования в «Письмах в редакцию». Это означало, что он сам вполне осознавал значение данной теории, в создании которой ему очень помогло близкое знакомство с дираковской теорией излучения. Однако редакция «Nature» отказала ему в опубликовании работы на том основании, что она слишком абстрактна и не представляет интереса для читателей. Это была действительно самая абстрактная из теоретических работ Ферми; но не приходится сомневаться в том, что редактор всю жизнь сожалел о своем «диагнозе». В настоящее время считают, что найденное Ферми взаимодействие между нуклонным полем и полем пары электрон — нейтрино представляет собой частный случай более общего взаимодействия между любыми четырьмя фермионами — так называемого универсального фермиевского взаимодействия, крайне малая интенсивность которого определяется малым значением «константы Ферми».

Несмотря на то, что исследовательская деятельность Ферми до 1934 г. носила почти исключительно теоретический характер, скрытый экспериментатор изредка пробуждался в нем. Был, например, такой случай. Ферми получил корректуру своей книги «Молекулы и кристаллы»; один из снимков, на котором было изображено чередование интенсивностей в молекулярном спектре азота, не удовлетворил автора книги. Ферми немедленно нашел подходящий свободный спектрограф и сам изготовил хороший снимок.

Первые крупные экспериментальные работы Ферми выполнил в области ядерной физики (1934 г.). Этим работам, за которые Ферми получил Нобелевскую премию, предшествовали два события: поездка Разетти в Германию с целью изучения экспериментальных методов ядерной физики и обсуждение на семинаре Института под руководством Ферми классической книги Резерфорда по радиоактивности.



Ф. Разетти, Э. Ферми, Э. Сегре в форме университетских профессоров во время защиты диссертаций, 1933 г.

Сразу же после открытия Фредериком и Ирэн Жолио-Кюри явления искусственной радиоактивности Ферми пришел к выводу, что нейтроны, поскольку они не имеют заряда, должны быть особенно эффективным орудием получения радиоэлементов, и со свойственной ему энергией начал систематически облучать нейтронами почти все существующие элементы. Нет необходимости напоминать здесь о всех поразительных результатах экспериментов Ферми: получение более шестидесяти радиоактивных изотопов; открытие замедления нейтронов и большой вероятности их захвата в таких элементах, как кадмий и бор; открытие «групп» нейтронов и т. д. Подробная история этого изумительного путешествия Ферми в неизвестную область физики рассказана во вводных замечаниях к статьям 61—74. Все эти блестящие и совершенно неожиданные открытия были опубликованы в виде коротких сообщений в итальянском журнале «Ricerca Scientifica», превратившемся благодаря Ферми из совершенно неизвестного издания в журнал международного значения. Только за год лаборатория спектроскопии выросла в первоклассную, хотя и маленькую, лабораторию ядерной физики.

Римская лаборатория была действительно маленькой. Общее число научных сотрудников и механиков, работавших с Ферми, едва достигало десяти. Ежегодно с дипломом физика университет оканчивали один-два студента, несмотря на то, что на физико-математическом факультете профессорами были Ферми, Разетти, Вольтерра, Леви-Чивита. Малое число дипломантов объяснялось незавидными перспективами, открывавшимися тогда перед молодыми физиками в Италии.

Что касается средств, необходимых для исследовательских работ, то фашистское правительство, так щедро помогавшее крупным промышленникам, оказалось довольно скупым, когда речь шла о финансировании науки. Однажды с целью экономии средств Ферми решил, что стандартные электрические вилки следует изготовлять в лабораторной мастерской; он провел два дня с механиком, стараясь найти удобный способ их изготовления, но после этого ему пришлось оставить свое предложение, как... неэкономичное.

Кстати, затраты на нейтронные исследования Ферми и сотрудников в Риме были удивительно малыми. Кроме зарплаты физиков и ничтожной официальной дотации Института на оборудование и материалы для всех нейтронных работ, была получена субсидия (около 1000 долларов) от Национального совета по исследованиям.

Участие Ферми в качестве исполнителя в экспериментальных работах было всегда непосредственным; он не только руководил, но и любил работать своими собственными руками. В частности, Ферми был неплохим стеклодувом.

Непосредственное и повседневное участие Ферми в работе, руководимой им, было возможно только потому, что он упорно отказывался занимать административные должности. Немногие знают, что он никогда не был во главе лабораторий, в которых работал.

Ферми в лаборатории всегда сохранял неизменное спокойствие. Говорили, что в 1942 г., когда первый ядерный реактор, построенный им, приближался к критическим условиям, Ферми прервал общее напряжение известной фразой: «Пойдем обедать». Почти за десять лет до этого случая, когда в Римском институте физики случайно, хотя и не без фермиевской интуиции, было обнаружено, что водородсодержащие вещества вызывают увеличение уровня активации при облучении нейтронами, Ферми охладил пыл своих сотрудников той же фразой: «Пойдем обедать». К концу обеда Ферми уже объяснил открытие (эффект Ферми) как явление замедления нейтронов и заметил: «Как глупо, что мы не предсказали этого раньше». Примерно через год основы той области физики, которая сегодня носит название «нейтронной», были так ясно сформулированы Ферми, что некоторые его статьи, в частности, работы «Поглощение и диффузия медленных нейтронов» и «О движении нейтронов в средах, содержащих водород» (статьи 73 и 74), сегодня, почти 30 лет спустя после опубликования, являются лучшим введением в этот раздел физики, одинаково интересующий как физиков, так и инженеров.

В период с 1934 по 1936 г. Ферми целиком посвятил себя нейтронным исследованиям. Вследствие этого в жизни Института физики, естественно, произошли заметные изменения. Ферми был вынужден прекратить свою неофициальную педагогическую деятельность с подающими надежды студентами. Крайняя занятость Ферми в экспериментальной работе привела к тому, что зарубежные физики почти перестали приезжать к нему учиться. Забегая вперед, отмечу, что в последние годы жизни Ферми вернулся к старому обычаю римского периода — к специальным занятиям с молодежью; сегодня его учениками считают себя Г. Андерсон, Вольфенштейн, Гарвин, Гелл-Манн, Гольдбергер, Ли, Маршалл, Орир, А. Розенфельд, Штейнбергер, Чемберлен, Чу, Янг и многие другие.

В опытах, выполненных в Риме в 1934—1935 гг., бомбардировка урана нейтронами вызвала образование ряда радиоактивных элементов, среди которых, по мнению Ферми, был и элемент с атомным номером 93. Как стало ясно впоследствии, эти элементы в действительности оказались продуктами деления; и хотя при бомбардировке урана образуются трансурановые элементы, сообщение Ферми об элементе 93 было неверно — единственная ошибка в течение его долгой и блестящей исследовательской деятельности. Это, надо отметить, не затормозило развития исследований, которые привели к открытию деления. Однако Ферми очень переживал опубликование работы по элементу 93, точнее, шумное обнародование (против его воли) результатов этой работы в газетах.

В Римском институте физики Ферми получил прозвище «папы», с которым обращались к нему все его сотрудники и друзья не только в Риме, но и во всем мире. Прозвище это означало, что Ферми (в области физики!) был непогрешим так же, как считается непогрешимым в вопросах религии глава католической церкви — папа римский. Ферми, конечно, остался «папой» даже после случая с элементом 93.

Что же особенно выделяло Ферми среди других известных экспериментаторов? Его не отличало какое-то особое искусство конструирования сложной аппаратуры и постановки «акробатических» экспериментов (впрочем, он быстро овладел и этим искусством, когда в том появилась необходимость). Конечно, Ферми был в высшей степени энергичным, работоспособным, терпеливым и упорным; но этими качествами обладали, вероятно, все великие естествоиспытатели. По-видимому, уникальная черта Ферми, ученого двадцатого века, заключалась в объединении экспериментального подхода с теоретическим — черта, которая была свойственна великим физикам *прошлых* веков. Он сам часто говорил, что разделение физики на теоретическую и экспериментальную — это вредная вещь. Именно благодаря этой его черте он всегда умел ставить самые существенные вопросы и затем быстро отвечать на них с помощью самых простых, но адекватных для решения поставленной задачи экспериментов.

«Аппаратурной эстетикой» он совершенно не увлекался. Единственное, что он требовал от своих экспериментальных установок, это то, чтобы они действовали так, как он наметил. В связи с этим мне вспоминается один эпизод. Однажды Разетти критиковал Ферми за то, что он изготовил некрасивую установку. «Но она работает»,— заметил Ферми. Теперь уже рассерженный Разетти наступал: «Энрико, в экспериментальной работе ты способен на недостойные поступки. Посмотри на этот электрометр Эдельмана (Разетти имел в виду блестящий, хромированный, нарядный и прекрасный прибор, бывший в наших глазах символом технического совершенства); если бы ты считал, что для получения некоторых сведений его следует смазать „куриной кровью“ (на нашем жаргоне мы так именовали широко использовавшуюся в лаборатории красноватую и неаппетитно выглядевшую мастику), ты бы сделал это. А я не способен на такой поступок, даже если бы был уверен, что это даст мне Нобелевскую премию. Признайся, Энрико, что ты бы так сделал». И Ферми, который высоко ценил экспериментальный талант Разетти, спокойно ответил: «Конечно, я выкупал бы все наши электрометры в куриной крови, если бы это помогло узнать что-нибудь существенное».

ЖИЗНЬ ФЕРМИ В РИМЕ

Личная жизнь Ферми с того времени, когда он обосновался в Риме, протекала спокойно и благополучно в течение нескольких лет, примерно до 1936 г. Он женился в 1928 г. на синьорине Лауре Капон, ставшей впоследствии автором переведенной на русский язык популярной книги «Атомы у нас дома». Как мы увидим, это событие десять лет спустя стало главной причиной того, что Ферми вместе с семьей покинул родину. В 1929 г. Ферми был несколько неожиданно избран, по-видимому, благодаря сенатору Корбино, членом Королевской Академии Италии. Это была новая Академия, созданная Муссолини для повышения престижа фашистского

режима. Члены Академии получали довольно значительное вознаграждение. Избрание в Академию заметно увеличило доходы Ферми, принесло звание «его превосходительства» и довольно смешной мундир. Полученная таким образом материальная обеспеченность позволила ему более устремленно сконцентрировать свои усилия на научной работе. Он категорически отказался не только от административных и руководящих должностей, которые, как правило, сопровождают избрание на такие посты. Теперь для Ферми стало возможным постепенно оставить редакторскую работу в отделе физики Итальянской энциклопедии Треккани (эту должность он получил в 1928 г. благодаря сенатору Корбино в виде «компенсации» за то, что остался в Риме, отказавшись от почетного и выгодного предложения занять бывшую кафедру Шредингера в Цюрихе).

Ферми вел размеренную жизнь, почти никогда не изменяя своим привычкам. Теоретической работой он занимался с половины шестого утра до половины восьмого. В Институт, который находился в живописной местности, вблизи от центра, но все-таки достаточно далеко от всякого шума, он приезжал не позже девяти утра. Официальные университетские лекции он читал с утра. На обед и отдых (или теннис три раза в неделю) отводилось время с 13 до 15 часов. В воскресенье утром он просматривал периодическую литературу в Институте, разговаривал с Корбино и со своими сотрудниками, обычно на научные темы. В воскресенье после обеда — прогулки с женой, сотрудниками и их женами. Во время рождественских каникул он ходил на лыжах. Лето проводил либо в Альпах на отдыхе, либо читая лекции за границей. Во время летнего пребывания за границей он обычно писал книгу или обзор, отражавшие содержание прочитанных лекций. Так родилась его знаменитая статья «Квантовая теория излучения» (лекции, прочитанные в 1930 г. в Мичиганском университете) и книга «Термодинамика» (лекции, прочитанные в Колумбийском университете в 1936 г.).

Так, очень эффективно, хотя спокойно и без спешки, проходило у Ферми время приблизительно до 1936 г. Как правильно заметил Сегре [5], «нейтронные исследования были проведены так быстро только потому, что они выполнялись маленькой группой, работающей в полной гармонии и без административных препятствий».

Общаясь с весьма узким кругом университетской интеллигенции, которому мир героического антифашистского итальянского рабочего класса был совершенно неизвестен, Ферми не проявлял никакого интереса к политике. До 1936 г. фашистская диктатура не очень мешала исследовательской работе Института. К тому же положение в Италии казалось много лучше, чем в Германии, что и подчеркивалось некоторыми физиками группы Ферми, работавшими временно в Германии и возвратившимися в Италию. Несмотря на свою аполитичность, во время пребывания в Риме в период фашистской диктатуры Ферми сохранил свою непоколебимую научную честность, находясь даже в совершенно развращенной фашистской Королевской Академии Италии. В частности, в Академии и в университе-



На террасе физического института в Риме, 1934 г.
Справа налево: Э. Ферми, Ф. Разетти, Э. Амальди, Э. Сегре, О. Д'Агостино

тах он всегда боролся за признание научных достижений, а не заслуг перед фашистским государством, как критерия при выборе ученых на университетские кафедры и другие должности.

Положение лаборатории начало ухудшаться с того момента, когда Муссолини подготовил и начал агрессию против Абиссинии, и продолжало ухудшаться после того, как фашистская Италия и нацистская Германия стали союзниками в позорной войне против испанского народа, и, наконец, после аннексии Австрии Германией. Фашистский режим, который вначале был орудием крупного итальянского монополистического капитала, стал невольно марионеткой более серьезного хозяина — агрессивного немецкого империализма.

Вместе с этим были и другие трудности, которые препятствовали нормальной работе Ферми в Институте физики и привели его к решению покинуть родину: потеря некоторых сотрудников, которые уже не работали в Риме, кончина профессора Корбино и назначение на пост директора Института человека, который не питал никакой симпатии к исследованиям Ферми, и, наконец, антисемитские фашистские законы, которые непосредственно его не касались, но могли угрожать его семье (жена Ферми была итальянкой еврейского происхождения, сам он был католиком).

Благоприятный случай представился в 1938 г. Ферми был награжден Нобелевской премией за исследовательские работы по свойствам нейтронов и вместе с семьей уехал из Стокгольма, куда он ездил за премией, в Нью-Йорк. Он покинул родину без шума: практически никому не было известно, что его поездка за границу — безвозвратна. Некоторое время спустя (также без шума) он обратился к итальянским авторитетным лицам с просьбой передать его академическое жалование в помощь молодым ученым. (В Италию он приезжал лишь десять лет спустя, после войны, на Международный конгресс физиков; его приняли триумфально.)

Впоследствии Ферми собственным примером внес значительный вклад в то, чтобы рассеять весьма распространенное тогда в капиталистических странах мнение о том, что «итальянец» и «фашист» — синонимы. И не случайно, что в Италии именно неофашистская печать не считает для себя позором оскорблять память человека, которым весь итальянский народ вправе гордиться как одним из своих лучших сынов.

АТОМНАЯ ЭНЕРГИЯ

В Нью-Йорке, в физическом отделении Колумбийского университета, который наряду с другими высшими учебными заведениями США предложил Ферми постоянную должность, он работал и ранее, до награждения Нобелевской премией; там у него были хорошие друзья. Поэтому он принял должность профессора физики Колумбийского университета и с семьей поселился в Нью-Йорке. Там он создал (1939 г.) количественную теорию ионизационных потерь энергии заряженными частицами, учиты-

вающую поляризацию вещества, через которое эти частицы проходят. Из этой, впоследствии проверенной опытом, теории, которая теперь стала классической, следует, что тормозная способность веществ зависит от степени их конденсации (фермиевский эффект плотности, статья 85).

Возобновление экспериментальной деятельности Ферми в США определилось тем, что сразу после открытия Ганом и Штрассманом деления урана нейтронами он понял, какие революционные возможности могли вытекать из этого явления. В Пьюпиновской лаборатории некоторые физики как раз заинтересовались проблемой урана. Один из них, Г. Андерсон, по характеру, складу ума и научным склонностям очень напоминал Амальди, идеального помощника Ферми в его экспериментальной работе. К тому же лаборатория имела хороший циклотрон. Итак, Ферми с Андерсоном образовали ядро небольшого коллектива, из которого затем выросло огромное научно-техническое учреждение — так называемая Металлургическая лаборатория в Чикаго. Ферми со своей склонностью все делать самому и римским опытом работы с микроскопическим коллективом, конечно, не предвидел такого превращения.

Независимо от группы экспериментаторов, работавших под руководством Жолио-Кюри, Ферми скоро экспериментально доказал, что при делении урана испускается несколько нейтронов, а это говорило о возможности цепной реакции (статьи 82 и 84). С этого времени (1939 г.) вся деятельность Ферми на несколько лет была посвящена проблеме овладения атомной энергией: добился он этого в декабре 1942 г. в Чикаго. Ферми назвал первый ядерный реактор «pila», что по-итальянски означает нечто, сложенное из многих одинаковых слоев, подобно тому, как вольтов столб — первый сравнительно мощный источник постоянного тока — по-итальянски называется «pila» Вольты. Ясно, что «pila» Ферми имеет не меньшее историческое значение, чем «pila» Вольты.

После создания первого реактора во время второй мировой войны Ферми продолжал свои исследования в области мирного и военного применения атомной энергии в Чикаго, а с 1944 г.— в Лос-Аламосе; при этом заметим, он не был ни директором Чикагской металлургической лаборатории (возглавлявшейся С. Аллисоном), ни Лос-Аламосской научной лаборатории (руководившейся знаменитым физиком Р. Оппенгеймером). Вот рассказ Сегре [5] о деятельности Ферми в Лос-Аламосе.

«У Ферми не было никакой специфической научной обязанности, ни административной ответственности; правда, он состоял членом Руководящего совета Лаборатории, с которым директор консультировался по всем важным вопросам, но по существу в Лаборатории он был кем-то вроде „оракула", работа которого заключалась в решении проблем, находящихся выше обычных способностей коллектива (и какого коллектива!). Дж. фон Нейман, который был там консультантом, был также „оракулом". В Лос-Аламосе Ферми прямо интересовался только „кипящим" котлом, гомогенным реактором; но вообще, повторяю, он участвовал в работах по всем новым или необычным проблемам. Помню, я присутствовал

в его кабинете на обсуждениях гидродинамических проблем вместе с фон Нейманом. Обсуждения приняли странную форму соревнования перед черной доской: кто первый решит проблему. Фон Нейман, пользуясь своим непостижимо быстрым аналитическим искусством, обычно выигрывал. Иногда такие обсуждения прерывались неожиданными событиями. Например, во время одной из этих гидродинамических дискуссий я был свидетелем прихода эксперта по электронике, который находился перед новой и очень трудной проблемой создания нужной электронной схемы. В течение 20 минут Ферми придумал схему, которая могла решить проблему; однако никто не знал, существует ли лампа с необходимыми особыми характеристиками. Консультация со справочником обнаружила, что требуемая лампа имеется; соответствующий прибор был скоро создан и удовлетворительно работал.»

Ферми работал над созданием атомной бомбы и принимал участие в испытании ее первого образца. Ряд дальновидных ученых США во главе с Лео Сцилардом и лауреатом Нобелевской премии Дж. Франком обратились к правительству США с настоятельной просьбой не использовать это ужасное оружие в военных операциях. Однако четверо видных ученых, входивших в состав правительственного совета по ядерным делам, Комптон, Лоуренс, Оппенгеймер и Ферми, рекомендовали использование атомной бомбы в войне против Японии. Это, к сожалению, факт, но не им определилась судьба Хиросимы. Теперь хорошо известно, что при использовании атомной бомбы в конце мировой войны правительство США никак не руководствовалось требованиями военной ситуации: ужас Хиросимы нужен был ему как первый акт атомной дипломатии.

Конец войны застал Ферми в Лос-Аламосе.

Здесь невозможно дать хотя бы отдаленное представление о той колоссальной работе, которую выполнил Ферми в области атомной энергии. Представленные в настоящем издании научные работы и отчеты Ферми говорят сами за себя. Большинство работ этого периода (1939—1945 гг.) было засекречено и поэтому впервые появились в печати в недавно вышедшем за рубежом издании сочинений Ферми. Следует иметь в виду, что большинство отчетов не было предназначено для печати; безусловно, они существенно изменились бы к лучшему, если бы Ферми сам подготовил их к опубликованию. Тем не менее в настоящем издании приводятся, хотя и выборочно, работы Ферми данного периода, поскольку они не только характеризуют напряженную деятельность Ферми в это время, но и вместе с вводными замечаниями Андерсона, Сегре и других достаточно подробно описывают беспрецедентную по объему исследовательскую работу, представляющую большой интерес для истории науки и технологии, для истории вообще. Можно только пожалеть, что еще нет подробного описания подвига советских ученых, выполнявших под руководством И. В. Курчатова аналогичную работу в гораздо более трудных условиях.

Работы по замедлению и диффузии нейтронов в графите, выполненные Ферми совместно с Андерсоном, являются примером экспериментального

и теоретического мастерства. Многие научные термины, принятые в этой области, носят имя Ферми: «нейтронный „возраст“ по Ферми», «фермиевская тепловая колонна» и т. д. Здесь же следует напомнить о методе Ферми определения критических размеров реагирующей среды в опытах, выполненных при относительно маленьком количестве урансодержащего вещества (экспоненциальный опыт Ферми). Опыт, описание которого можно найти во всех книгах, посвященных ядерным реакторам, так прост, что сегодня трудно представить себе иной подход к рассматриваемому вопросу. Кстати, многие из фермиевских результатов по исследованию реакторов, и вообще по развитию «нейтроники», отражены в великолепных «Лекциях по нейтронной физике» (статья 112), прочитанных для молодых ученых Лос-Аламосской лаборатории. Как видно, от преподавательской деятельности Ферми не отказался даже в период крайне напряженной экспериментальной работы.

ПОСЛЕДНИЙ ПЕРИОД НАУЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

После войны Ферми принял должность профессора физики Чикагского университета (1946 г.) и одновременно стал сотрудником только что созданного Института ядерных проблем (теперь носящего его имя). Он отказался от поста директора Института, и директором стал его старый друг С. Аллисон. Теперь Институт возглавляет его ученик Г. Андерсон.

Используя построенный им реактор на тяжелой воде в качестве источника нейтронов, Ферми открыл новую главу в области ядерной физики — нейтронную оптику, ряд важных вопросов которой хорошо описан в его переведенной на русский язык книге «Лекции по атомной физике». В этой же книге можно найти обсуждение фундаментальной проблемы нейтрон-электронного взаимодействия, решению которой Ферми посвятил (1947 г.) остроумный эксперимент (статья 121).

Создатель ядерной науки Резерфорд сказал, что ученики не позволяют ему стареть. Это утверждение верно для большинства ученых, достойных звания наставника. Что же касается Ферми, то до конца своей жизни он был моложе духом любого своего ученика или сотрудника. И до конца своих дней Ферми оставался студентом, всегда полным страстного желания получить новые знания.

В возрасте около пятидесяти лет Ферми, имевший в своем распоряжении ряд реакторов для фундаментальных исследований в крайне интересной, им же созданной области, решает полностью изменить направление своей деятельности и посвящает себя исследованиям частиц высоких энергий. В частности, его привлекает одна из центральных проблем современной физики — проблема мезон-нуклонного взаимодействия. Его исследования (1953 г.) рассеяния положительных и отрицательных π-мезонов протонами открыли еще одну новую главу экспериментальной и теоретической физики (статьи 131—140).

В работах по рассеянию π-мезонов на водороде особенно ярко выступает личность Ферми как выдающегося теоретика и экспериментатора. В этих работах он участвовал не только как руководитель, но и как непосредственный исполнитель; это видно хотя бы из того, что он разработал, например, конструкцию внутренней мишени синхроциклотрона, управляемой дистанционно.

В работах по π-мезонам, как и в других работах, неизгладимый след идей и личности Ферми оставался не только в содержании его исследований, но также и в особых методических подходах, в новых научных выражениях и даже в крайне удачных обозначениях. Между прочим, Ферми был того мнения, что вопрос о простоте обозначений имеет первостепенное значение в теоретической физике.

Невозможно получить представление обо всем объеме его теоретической деятельности по опубликованным статьям: для печатания была отобрана лишь незначительная часть всех работ. Вот почему нет ни одной теоретической работы зрелого Ферми, которая не была бы выдающейся. Результаты же неопубликованных работ Ферми записал в краткой форме и сохранил в многочисленных тетрадках, составлявших, как он сам говорил, его искусственную память.

Из теоретических статей Ферми в области высоких энергий особое место занимают две, касающиеся так называемого фермиевского механизма ускорения первичных космических лучей и теории множественного образования мезонов. Обе основаны на идеях, столь же простых, как и поразительных.

В основе объяснения (1949 г.) механизма ускорения первичных частиц в космических лучах лежит следующее рассуждение, основанное на принципе равномерного распределения энергии. Рассмотрим соударения микрочастиц с движущимися макроскопическими телами. Хотя в отдельном столкновении частицы могут потерять или увеличить свою энергию, в конечном счете имеется тенденция к статистическому равновесию, а это означает, что частицы при соударениях с макроскопическими телами в среднем ускоряются. Согласно теории Ферми, заряженные частицы отклоняются магнитными полями, связанными с межзвездным проводящим газом, и в конце концов стремятся приобрести энергию, равную энергии движущегося газа в целом (статьи 123, 145). Эта работа имеет большое значение не только для физики космических лучей; в ней содержатся основополагающие идеи и подходы к таким областям, как физика плазмы, космофизика и астрофизика.

Это не единственная работа Ферми, имеющая астрофизическое значение; давным-давно он тянулся к астрофизике, но только в последние годы жизни ему удалось достичь вершины и в этой области науки. Астрофизическая деятельность Ферми подробно освещается во вводных замечаниях Чандрасекара к статье 141.

В теории множественного образования частиц (1950 г.) процесс соударения при очень высоких энергиях рассматривается при помощи статисти-

ческих и даже термодинамических методов (статья 125). До сих пор фермиевские идеи остаются основополагающими в области физики сверхвысоких энергий.

Такое поразительное долголетие идей Ферми объясняется тем, что он обладал исключительной физической интуицией. Ферми всегда находил наиболее простые подходы к решению самых сложных практических задач. Что же касается исследований фундаментального характера, то избранные Ферми большие проблемы становились всегда простыми, хотя эта простота, конечно, появлялась только после того, как он их блестяще разрешал. О замечательном примере интуиции Ферми (во время исследований, приведших к открытию явления замедления нейтронов) рассказано довольно подробно во вводных замечаниях к статьям 61—70 и 141.

Можно привести и другие примеры интуиции Ферми. Не проявлением ли интуиции был вопрос, который на одном из семинаров он задал Марии Гепперт-Майер? Она поблагодарила его за этот вопрос в своей знаменитой работе о модели ядерных оболочек, за которую много лет спустя была удостоена Нобелевской премии, следующими словами: «Я признательна Энрико Ферми за его замечание в виде вопроса, имеется ли хоть какое-либо указание, свидетельствующее в пользу спин-орбитальной связи, которое и породило настоящую работу».

Еще одно далеко идущее замечание сделал Ферми, когда М. Гелл-Манн в начале 50-х годов предложил ввести «странность» элементарных частиц. В схеме Гелл-Манна было необходимо, чтобы K^0-мезон отличался от $\bar{K}^0$-мезона, причем распады обеих этих частиц считались в то время тождественными. И вот Ферми спросил Гелл-Манна: «Как вы можете представить себе K^0- и $\bar{K}^0$-мезоны различимыми, если они распадаются неразличимым образом?» Как теперь ясно, в этих словах скрыта глубокая догадка о дуальных свойствах нейтральных каонов и вообще о том круге физических проблем, относящихся к свойствам нейтральных каонов, который вскоре вырос в самую волнующую главу физики элементарных частиц.

Я хотел также рассказать об одной привычке Ферми, которая была известна только тем, кто хорошо его знал. Хотя Ферми никогда не боялся трудностей (в частности, математических) в своей работе, все-таки он не любил их подчеркивать при изложении результатов. Таким образом, в лекциях или беседах Ферми всегда можно было видеть отчетливое стремление обойти трудности. Эта черта его характера хорошо проиллюстрирована во вводных замечаниях к статье 141. Иногда она приводила к довольно любопытным эпизодам. Это происходило чаще всего тогда, когда Ферми, убедившись в правильности некоторого нового результата (конечно, доказанного им со всей научной строгостью), намеренно излагал его с помощью только простых и интуитивных аргументов. И если кто-нибудь пробовал оспаривать результат, как нестрогий, или искал более строгое решение, это доставляло ему большое удовольствие: он или вовсе молчал, улыбаясь, или с удовольствием лукаво произносил: «Несчастненькие!» Читателю может показаться, что это похоже на «демагогию». Конечно, де-

ло не в демагогии: всем этим Ферми призывал к поискам самого дорогого для него — простого пути к истине.

Мне хотелось бы здесь отметить также полное отсутствие у Ферми научного догматизма. Это редчайшее явление для таких одаренных физиков, каким был Ферми, с такой огромной эрудицией и удивительной способностью использовать «незыблемые» законы и основы науки. Кстати, мне кажется, что как раз одна из самых характерных черт Ферми — это его требование «золотой середины» или, если хотите, необходимости «борьбы на два фронта» в науке: крайне важны основные принципы, но вредна предвзятость; да здравствует новое, но пусть новое узаконивается только тогда, когда старое оказалось негодным; физика движется вперед благодаря открытиям, но не только благодаря открытиям; очень хорошо, если физику удается открыть новое явление или предсказать неожиданную закономерность, но физика не делается «охотой за открытиями»; оригинальность и научная фантазия хороши только в сочетании с глубоким знанием.

Ферми приехал в Италию в 1949 г. на физический конгресс (первую значительную международную конференцию после войны), состоявшийся в Комо, городе Алессандро Вольта. В Комо можно было убедиться, с какой теплотой относились к нему не только зарубежные и итальянские физики, но и местные жители. В Италии он провел всю осень 1949 г. и прочел те самые лекции, которые впоследствии были изданы в виде книги «Лекции по атомной физике». Уже один взгляд на оглавление этой полупопулярной книги дает представление о широте интересов Ферми в то время: от физики элементарных частиц до нейтронной оптики, от дираковского монополя до космологии, от квантовой электродинамики до ядерной археологии.

И другие лекции, связанные с его преподавательской деятельностью в Чикагском университете, или с участием в летних школах, как правило, завершались изданием книги. К изданию книги «Лекции по пионам и нуклонам» привела и его последняя, состоявшаяся за несколько месяцев до смерти, поездка в Италию, где он читал свои великолепные лекции на эту тему в летней школе (теперь ежегодная школа по физике имени Энрико Ферми) в Варенне, на озере Комо.

По возвращении в Чикаго стало ясно, что он неизлечимо болен. Во вводных замечаниях Янга к статье 124 содержится волнующий рассказ о прощании Янга и Гелл-Манна со своим учителем в больнице, где Ферми лежал, вполне сознавая безнадежность своего положения. Он был слишком рационалистичен, чтобы тешить себя иллюзиями, но работал до конца своей жизни с олимпийским спокойствием. Он скончался 29 ноября 1954 года.

Сегре [5] рассказывает, что в последние годы он заметил у Ферми ярко выраженное желание избегать даже малейшей потери времени, как будто он предчувствовал, что времени у него осталось слишком мало. Ферми действовал так, как будто судьба определила ему задание, поставила цель которую он должен был обязательно достичь. В 1946 г. Ферми, оце

нивая, чтó им уже было сделано и чтó остается сделать, сказал Сегре: «Одна треть». И этим он хотел сказать, что он дал науке «только» $^1/_3$ того, что он, глядя в будущее, собирался создать за время своей жизни.

Трудно представить, сколько успел бы Ферми еще сделать в науке, если бы он прожил еще 15—20 лет. Судя по тому, как фактически развивалась после смерти Ферми физика элементарных частиц и астрофизика, на которых были главным образом сфокусированы его интересы в последний период жизни, позволительно считать, что он мог бы внести еще огромный вклад в науку. Я хотел бы проиллюстрировать эту точку зрения на примере.

После работы учеников Ферми, теперь лауреатов Нобелевской премии, Ли и Янга (1956 г.) о несохранении четности в слабых взаимодействиях, Ландау, Саламом и другими была сразу предложена теория так называемого продольного нейтрино. Вполне допустимо, что Ферми не осознал бы первым уникальные новые свойства нейтрино, но после опубликования теории продольного нейтрино он наверняка создал бы универсальную теорию слабых взаимодействий, которая была предложена в 1957 г. лауреатами Нобелевской премии Р. Фейнманом и одним из учеников Ферми — М. Гелл-Манном. Ведь фермиевская теория бета-распада (1933 г.) содержала все предпосылки универсальной теории; к тому же никто лучше Ферми не мог разгадать ошибочность некоторых экспериментальных результатов, которые как раз препятствовали созданию этой теории, сегодня по праву называемой теорией универсального взаимодействия Ферми. Но Ферми не смог дожить до того времени, когда его теория фактически стала последним словом в науке о слабых взаимодействиях.

Ряд других работ Ферми приобрел особенную важность спустя несколько лет после его кончины. Среди них здесь хотелось бы упомянуть первую работу о составных моделях элементарных частиц (статья 124), которая дала начало новому направлению, вылившемуся пятнадцать лет спустя в современную теорию так называемых «кварков».

Досадно также, что Ферми, обнаруживший в 1953 г. первый случай так называемых адронных резонансов (статья 132), не смог увидеть продолжающегося до сих пор триумфального развития этого направления и появления в таблицах элементарных частиц сотен резонансов.

Еще одним примером проявления научной проницательности Ферми является его работа (см. приложение 1) по теории, которая сегодня известна под названием теории «горячей Вселенной». Если судить по живому интересу, с которым Ферми следил за этой теорией, то можно утверждать, что он быстро и творчески реагировал бы на астрофизическую сенсацию 1965 года: сообщение о наблюдении Пенсиасом и Вильсоном изотропного космического электромагнитного излучения со спектром, соответствующим излучению черного тела при температуре около 3 °K (так называемое реликтовое излучение).

Для большинства образованных людей имя Ферми связано с созданием первого ядерного реактора, что послужило решающим шагом в новый,

атомный век. Для профессиональных физиков имя Ферми связано с блестящими успехами современной физики, всей физики почти полувекового периода. Спустя 15 лет после кончины Ферми не найдешь ни одного выпуска физического журнала, будь это ЖЭТФ, «Ядерная физика», «Physical Review» или какой-либо другой журнал, в котором бы несколько раз ни упоминалось его имя. Награждение Нобелевской премией считается признаком достижения вершин в науке. Невольно спрашиваешь: если бы исследования Ферми публиковались различными авторами, скольких Нобелевских премий они могли быть удостоены? Мне кажется, что не менее шести, а именно: за статистику, теорию бета-распада, исследования по физике нейтронов, совокупность теоретических работ по структуре атомов и молекул, создание первого атомного реактора, работы по физике высоких энергий.

Те, кому посчастливилось учиться у Ферми и работать под его руководством, будут всегда помнить о нем, как о непогрешимом «папе» физиков, station уникуме XX века.

Б. Понтекорво

ЛИТЕРАТУРА

1. *E. Persico.* Scientia, 1955, 90, 316.
2. *E. Persico.* Scientific American, 1962, 207, № 5, 181.
3. *Л. Ферми.* Атомы у нас дома. ИЛ, 1958.
4. *F. Rasetti.* Science, 1955, 121, 449.
5. *E. Segre.* Biographical Introduction. В кн.: *E. Fermi.* «Collected Papers». The University of Chicago Press, v. 1, 1962.
6. *Б. Понтекорво.* УФН, 1955, 57, 349.

К статьям 1 и 2

В статье 1 (связанной со статьей 2) рассматривается инертная масса жесткой системы электрических зарядов; она определяется из воздействия на движущиеся заряды их собственного электромагнитного поля. Полученный результат состоит в том, что в наиболее общем случае масса выражается через тензор. В частном случае сферически симметричной системы тензор вырождается в скаляр, равный $(^4/_3)\ U/c^2$. Это значение, хотя и согласуется с известным расчетом электромагнитной массы равномерно заряженной сферической оболочки, выполненным Лоренцом, но противоречит эйнштейновскому принципу эквивалентности (см. статью 4).

В статье 2 с помощью методов общей теории относительности определяется влияние однородного гравитационного поля на систему электрических зарядов. Как оказывается, заряды имеют вес, равный весу материальной массы U/c^2 (где U — электростатическая энергия системы), что находится в полном согласии с эйнштейновским принципом эквивалентности между массой и энергией.

Э. Персико

1

О ДИНАМИКЕ СИСТЕМЫ ЖЕСТКО СВЯЗАННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗАРЯДОВ, ДВИЖУЩЕЙСЯ ПОСТУПАТЕЛЬНО *

§ 1. Когда система электрических зарядов движется произвольным образом, созданное ею электрическое поле отличается от поля, описываемого законом Кулона. Электрическое поле, обусловленное всей системой, вызывает появление сил, действующих на все элементы заряда системы. Результирующая этих, т. е. внутренних, электрических сил, очевидно, равнялась бы нулю, если бы выполнялся закон Кулона. Но, вообще говоря, в том случае, когда система движется, этот закон уже несправедлив, и поэтому результирующая уже не равна нулю.

Такая результирующая выражает электромагнитную силу инерции. Цель настоящей работы — рассчитать ее для случая какой-либо системы, движущейся поступательно. Если система имеет вид распределенного по поверхности сферы электрического заряда, как предполагается в большинстве моделей электрона, то, как известно [1], указанная результирую-

---

* *Sulla dinamica di un sistema rigido di cariche elettriche in moto traslatorio.* Nuovo Cimento, 1921, 22, 199—207.

[1] Richardson. Electron Theory of Matter, гл. XIII. Разница между моими формулами и формулами в книге Ричардсона обусловлена тем, что последний использовал единицы Хевисайда.

щая определяется, по крайней мере в первом приближении, выражением

$$-\frac{2e^2}{3Rc^3}\Gamma + \frac{2e^2}{3c^2}\dot{\Gamma}, \tag{1}$$

где e, R — полный заряд и радиус системы, c — скорость света, Γ и $\dot{\Gamma}$ — ускорение и его временнáя производная. Для квазистационарных движений второй член выражения (1) становится пренебрежимо малым и (1) сводится к

$$-m\Gamma, \tag{2}$$

где m — электромагнитная масса.

В § 2 выражение (1) обобщается на случай любых систем, соответствующих, в частности, молекулярным моделям, причем предполагается, что скорость системы пренебрежимо мала по сравнению со скоростью света. Если F_i ($i = 1,2,3$) — компоненты результирующей, о которой идет речь, то найдем

$$F_i = \sum_k m_{ik}\Gamma_k + \sum_k \sigma_{ik}\dot{\Gamma}_k, \tag{3}$$

где m_{ik}, σ_{ik} — величины, зависящие от строения системы. Поэтому в общем случае уже нельзя говорить о скалярной электромагнитной массе и вместо нее следует ввести тензор m_{ik}.

Далее, § 3 посвящен изучению динамического закона квазистационарных движений:

$$K_i = \sum_k m_{ik}\Gamma_k, \tag{4}$$

где K_i — компоненты внешней силы. В нем показано, что для этого закона продолжают быть справедливыми такие основные принципы, как закон живых сил и принцип Гамильтона.

Наконец, в § 4 с помощью специальной теории относительности закон (4) для квазистационарных движений, справедливый только для малых скоростей, обобщается на случай любой скорости.

Этим завершается изучение электромагнитных масс как инертных масс. В другой работе будут рассмотрены электромагнитные массы как гравитационные массы с точки зрения общей теории относительности.

§ 2. Известно [2], что электрическая сила, обусловленная движущимся точечным единичным зарядом, является суммой двух сил, которые при пренебрежении скоростью v частицы по сравнению со скоростью света c

---

[2] См., например, Richardson. Цит. соч.

можно определить следующим образом: первая сила $\mathbf{E}_1$ определяется законом Кулона, вторая $\mathbf{E}_2$ имеет вид

$$\mathbf{E}_2 = \frac{\Gamma^* \cdot \mathbf{a}}{c^2 r}\,\mathbf{a} - \frac{1}{c^2 r}\,\Gamma^*. \tag{5}$$

В этой формуле r — расстояние между частицей M и точкой P, в которой рассчитывается сила, $\mathbf{a}$ — единичный вектор с направлением MP, наконец, Γ^* — ускорение частицы в момент времени $t - r/c$. Если в M вместо единичного заряда находится заряд $\rho d\tau$ (ρ — плотность электрического заряда, $d\tau$ — элемент объема), то сила в P будет $\rho d\tau\,(E_1 + E_2)$; поэтому сила в точке P, обусловленная всеми зарядами, будет $\int_\tau \rho\,(E_1 + E_2)\,d\tau$, где интегрирование следует распространить на все пространство τ, в котором находятся заряды. Если в точке P имеется заряд $\rho' d\tau'$, то в этой точке действует сила $\rho' d\tau' \int \rho\,(E_1 + E_2)\,d\tau$.

Сила, действующая на всю систему, поэтому равна

$$\mathbf{F} = \iint \rho\rho'\,(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)\,d\tau\,d\tau',$$

где оба интегрирования должны проводиться по той же самой области. Очевидно, что

$$\iint \rho\rho' \mathbf{E}_1 d\tau d\tau' = 0,$$

и поэтому

$$\mathbf{F} = \iint \rho\rho' \mathbf{E}_2 d\tau d\tau'.$$

Далее, если обозначить через Γ и $\dot{\Gamma}$ ускорение и его временну́ю производную в момент времени t, то при достаточно малом r можно положить

$$\Gamma^* = \Gamma - \frac{r}{c}\dot{\Gamma};$$

тогда, наконец, получим

$$\mathbf{F} = \iint \left(\frac{\Gamma \cdot \mathbf{a}}{c^2 r}\,\mathbf{a} - \frac{\Gamma}{c^2 r}\right) \rho\rho' d\tau d\tau' - \iint \left(\frac{\dot{\Gamma}\mathbf{a}}{c^3}\,\mathbf{a} - \frac{\dot{\Gamma}}{c^3}\right) \rho\rho' d\tau d\tau'. \tag{6}$$

Обозначим через x_1, x_2, x_3 прямоугольные декартовы координаты, и пусть (x_i) — координаты точки M, (x_i') — координаты точки P. Компоненты $\mathbf{a}$ будут $a_i = (x_i' - x_i)/r$. Переписывая (6) в скалярной форме и замечая, что Γ_i и $\dot{\Gamma}_i$ — постоянны при интегрировании вследствие предположения о поступательном характере движения, получаем

$$F_i = -\sum_k m_{ik}\Gamma_k + \sum_k \sigma_{ik}\dot{\Gamma}_k. \tag{7}$$

Здесь мы положили

$$
\left.\begin{aligned}
m_{ii} &= \frac{2U}{c^2} - \iint \frac{\rho\rho'(x_i' - x_i)^2}{c^2 r^3}\, d\tau d\tau', \\
m_{ik} = m_{ki} &= -\iint \frac{\rho\rho'(x_i' - x_i)(x_k' - x_k)}{c^2 r^3}\, d\tau d\tau', \quad i \neq k,
\end{aligned}\right\} \tag{8}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_{ii} &= \frac{e^2}{c^3} - \iint \frac{\rho\rho'(x_i' - x_i)^2}{c^3 r^2}\, d\tau d\tau', \\
\sigma_{ik} = \sigma_{ki} &= -\iint \frac{\rho\rho'(x_i' - x_i)(x_k' - x_k)}{c^3 r^2}\, d\tau d\tau', \quad i \neq k.
\end{aligned}\right\} \tag{9}
$$

В этих формулах U представляет электростатическую энергию системы, равную $\frac{1}{2}\iint \frac{\rho\rho'}{r}\, d\tau d\tau'$, и e — полный электрический заряд, равный $\int \rho d\tau = \int \rho' d\tau'$.

Из формул (8) и (9) сразу следует, что если перейти от осей (x_i) к другим, (y_i), с помощью ортогонального преобразования

$$
y_i = \sum_k \alpha_{ik} x_k,
$$

то m_{ik} и σ_{ik} относительно новых осей будут иметь вид

$$
m_{ik}' = \sum_{r,s} \alpha_{ir}\alpha_{ks} m_{rs},
$$

$$
\sigma_{ik}' = \sum_{r,s} \alpha_{ir}\alpha_{ks} \sigma_{rs}.
$$

Таким образом, как m_{ik}, так и τ_{ik} — ковариантные симметричные тензоры. Поэтому для каждого из них имеются три главных ортогональных направления, так что, выбирая оси параллельными им, будем иметь $m_{ik} = 0$ или $\sigma_{ik} = 0$, при $i \neq k$.

Однако главные оси тензоров m, σ, вообще говоря, будут разными. В том случае, когда система обладает сферической симметрией, в формулах (8) и (9) можно выполнить интегрирование, поскольку вместо $\frac{(x_i' - x_i)(x_k' - x_k)}{r^2}$ можно взять среднее значение этого выражения для всех возможных направлений MP, которое при $i = k$ равно $\frac{2\pi}{4\pi}\int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta d\theta$, а при $i \neq k$ равно нулю.

Поэтому

$$m_{11} = m_{22} = m_{33} = \frac{4U}{3c^2}, \qquad m_{23} = m_{31} = m_{12} = 0,$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{2e^2}{3c^3}, \qquad \sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{12} = 0.$$

Подставляя эти значения в (7), получаем хорошо известные формулы для равномерно заряженной сферической оболочки.

§ 3. Возвращаясь к общему случаю, заметим, что для квазистационарных движений выражение (5) можно заменить следующим:

$$F_i = -\sum_k m_{ik}\Gamma_k.$$

Если на систему действует внешняя сила (X_i), то полная сила будет $(X_i + F_i)$. Если предположить, что система лишена «материальной» массы, то должно быть $X_i + F_i = 0$, и поэтому

$$X_i = \sum_k m_{ik}\Gamma_k. \tag{10}$$

Легко показать, что при законе движения (10) сохраняются закон живых сил и принцип Гамильтона. Действительно, пусть через $V \equiv (V_1, V_2, V_3)$ обозначена скорость. Умножим уравнение (10) на V_i. Суммируя по индексу i, получаем

$$\sum_i X_i V_i = \sum_{ik} m_{ik} V_i \frac{dV_k}{dt}.$$

Взаимозаменяя во второй сумме i и k и замечая, что $m_{ik} = m_{ki}$, находим

$$\sum_i X_i V_i = \sum_{ik} m_{ik} V_k \frac{dV_i}{dt}.$$

Суммируя, получаем

$$2\sum_i X_i V_i = \sum_{ik} m_{ik}\left(V_i \frac{dV_k}{dt} + V_k \frac{dV_i}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\sum_{ik} m_{ik} V_i V_k.$$

Здесь левая часть представляет собой удвоенное значение мощности P внешних сил. Поэтому

$$P = \frac{dT}{dt},$$

где

$$T = \frac{1}{2} \sum m_{ik} V_i V_k. \tag{11}$$

Если же умножить обе части уравнения (10) на δx_i и просуммировать, то аналогичным образом получим

$$\sum_i X_i \delta x_i = \frac{1}{2} \sum_{ik} m_{ik} \left(\frac{d^2 x_k}{dt^2} \delta x_i + \frac{d^2 x_i}{dt^2} \delta x_k \right) = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{ik} m_{ik} (\dot{x}_k \delta x_i + \dot{x}_i \delta x_k) \right\} -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{ik} m_{ik} (\dot{x}_k \delta \dot{x}_i + \dot{x}_i \delta \dot{x}_k) = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{ik} m_{ik} (\dot{x}_k \delta x_i + \dot{x}_i \delta x_k) \right\} - \delta T.$$

Умножая последнее равенство на dt и интегрируя в пределах от t' до t'', при этом полагая вариации δx_i равными нулю, получаем уравнение

$$\int_{t'}^{t''} \left(\delta T + \sum_i X_i \delta x_i \right) dt = 0, \tag{12}$$

которое выражает принцип Гамильтона.

Уравнения (10) принимают простую форму

$$X_i = m_{ii} \Gamma_i, \tag{13}$$

если воспользоваться не произвольными осями, а главными осями тензора m_{ik}.

§ 4. Эта формула справедлива только в том случае, когда отношение V/c пренебрежимо мало. Для того чтобы обобщить ее на случай любой скорости, обозначим через $S \equiv (x_1, x_2, x_3, t)$ указанную систему отсчета; через $S^* \equiv (x, y, z, t)$ — покоящуюся относительно S систему, ось x которой ориентирована в направлении скорости системы в некоторый заданный момент времени $\bar{t}$; наконец, пусть $S' \equiv (x', y', z', t')$ — система, пространственные оси которой параллельны (x, y, z), движущаяся по отношению к S равномерно со скоростью v, равной скорости движения в момент времени $\bar{t}$. Имеем

$$t' = \beta \left(t - \frac{v}{c^2} x \right), \quad x' = \beta (x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{14}$$

где при фиксированном $\bar{t}$ величина v, а значит и β, постоянны.

Предположим, что силы, действующие на нашу систему, возникают благодаря внешнему электромагнитному полю (**E**, **H**); поскольку в момент времени $\bar{t}$ система имеет скорость, равную нулю по отношению к

S', для нее будут справедливы уравнения (10), и поэтому в очевидных обозначениях

$$eE'_x = m_{xx}\Gamma'_x + m_{xy}\Gamma'_y + m_{xz}\Gamma'_z,$$
$$eE'_y = m_{yx}\Gamma'_x + m_{yy}\Gamma'_y + m_{yz}\Gamma'_z,$$
$$eE'_z = m_{zx}\Gamma'_x + m_{zy}\Gamma'_y + m_{zz}\Gamma'_z.$$

Однако

$$eE'_x = eE_x, \quad eE'_y = e\beta\left(E_y - \frac{v}{c}H_z\right), \quad eE'_z = e\beta\left(E_z + \frac{v}{c}H_y\right).$$

Положив

$$\mathbf{k} = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\,\mathbf{V}\times\mathbf{H}\right), \tag{15}$$

найдем

$$eE'_x = k_x, \qquad eE'_y = \beta k_y, \qquad E'_z = \beta k_z.$$

С другой стороны,

$$\Gamma'_x = \frac{d^2x'dt' - d^2t'dx'}{dt'^3}.$$

Но в момент времени $\bar{t}$ имеем $\frac{dx'}{dt'} = 0$, и поэтому $\Gamma'_x = d^2x'/dt'^2$. Принимая t в качестве независимой переменной и замечая, что $dx/dt = v$, находим

$$\Gamma'_x = \beta^3\Gamma_x.$$

Аналогично

$$\Gamma'_y = \beta^2\Gamma_y, \qquad \Gamma'_z = \beta^2\Gamma_z.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} k_x &= m_{xx}\beta^3\ddot{x} + m_{xy}\beta^2\ddot{y} + m_{xz}\beta^2\ddot{z},\\ k_y &= m_{yx}\beta^2\ddot{x} + m_{yy}\beta\ddot{y} + m_{yz}\beta\ddot{z}.\\ k_z &= m_{zx}\beta^2\ddot{x} + m_{zy}\beta\ddot{y} + m_{zz}\beta\ddot{z}. \end{aligned} \tag{16}$$

Обозначая через α_{xi} косинус угла между осями x и x_i, имеем

$$k_i = \alpha_{xi}k_x + \alpha_{yi}k_y + \alpha_{zi}k_z.$$

С другой стороны, поскольку m_{i0} ковариантная величина, имеем, например,

$$m_{xy} = \sum_r m_{rr}\alpha_{xr}\alpha_{yr}.$$

Аналогично,

$$\ddot{x} = \sum_j \ddot{x}_j\alpha_{xj}.$$

Тогда, умножая соотношения (16) соответственно на α_{xi}, α_{yi}, α_{zi} и суммируя, получаем

$$k_i = \sum_{rj} m_{rr}\ddot{x}_j\,[\beta^3\alpha_{xr}^2\alpha_{xj}\alpha_{xi} + \beta^2\alpha_{xr}\alpha_{yr}\alpha_{yj}\alpha_{xi} + \beta^2\alpha_{xr}\alpha_{zr}\alpha_{zj}\alpha_{xi} +$$
$$+ \beta^2\alpha_{yr}\alpha_{xr}\alpha_{xj}\alpha_{yi} + \beta\alpha_{yr}^2\alpha_{yj}\alpha_{yi} + \beta\alpha_{yr}\alpha_{zr}\alpha_{zj}\alpha_{yi} + \beta^2\alpha_{zr}\alpha_{xr}\alpha_{xj}\alpha_{zi} +$$
$$+ \beta\alpha_{zr}\alpha_{yr}\alpha_{yj}\alpha_{zi} + \beta\alpha_{zr}^2\alpha_{zj}\alpha_{zi}].$$

Но $\alpha_{xi} = \dot{x}_i/v$. Учитывая соотношения между α, наконец, находим искомое обобщение уравнений (13)

$$k_i = \beta\sum_{jr}\ddot{x}_j m_{rr}\left\{(\beta-1)^2\frac{\dot{x}_i\dot{x}_j\dot{x}_r^2}{v^4} + (\beta-1)\left[(jr)\frac{\dot{x}_i\dot{x}_r}{v^2} + (ir)\frac{\dot{x}_j\dot{x}_r}{v^2} + (ir)(jr)\right]\right\}, \tag{17}$$

где

$$(jr) = 1 \text{ при } j = r, \qquad (jr) = 0 \text{ при } j \neq r.$$

В случае сферической симметрии положим $m_{11} = m_{22} = m_{33} = m$; тогда можно выполнить суммирование в соотношении (17) и найти:

$$k_i = \beta m\ddot{x}_i + m\beta(\beta^2 - 1)\frac{\dot{x}_i}{v^2}\sum_j \dot{x}_j\ddot{x}_j,$$

откуда, вспоминая, что

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

находим хорошо известную формулу динамики электрона

$$k_i = \frac{d}{dt}\frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Пиза, январь 1921 г.

См. вводные замечания к статье 1

2

ОБ ЭЛЕКТРОСТАТИКЕ ОДНОРОДНОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ И О ВЕСЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ МАССЫ *

Введение

Цель настоящей работы — исследовать, на основе общей теории относительности, влияние однородного гравитационного поля на электростатические явления, происходящие в нем. Устанавливается дифференциальное уравнение, связывающее потенциал электрического поля с плотностью зарядов (т. е. уравнение, соответствующее уравнению Пуассона в классической электростатике); его удается решить по крайней мере для случая, когда гравитационное поле является достаточно слабым (а земное гравитационное поле явно удовлетворяет такому условию). Таким образом находятся поправки к закону Кулона, которые обязаны присутствию гравитационного поля.

Во-первых, теория применяется к изучению распределения электрического заряда по проводящей сфере; показано, что под влиянием гравитационного поля сфера поляризуется.

Во-вторых, исследуется вес электромагнитной массы, т. е. сила, которая в гравитационном поле действует на систему жестко связанных электрических зарядов (например, на систему зарядов, удерживаемую абсолютно твердым диэлектриком).

Найдено, что такой вес дается произведением гравитационного ускорения на u/c^2, где u — электростатическая энергия системы зарядов и c — скорость света. Таким образом, найдено, что гравитационная масса, т. е. отношение веса к гравитационному ускорению, не совпадает для нашей системы (по крайней мере, в общем случае) с инертной массой, потому что, например, для сферически симметричной системы последняя равна $(^4/_3)\, u/c^2$ (в прежних обозначениях).

Кстати, известно, что специальная теория относительности приводит к значению $\Delta u/c^2$ для увеличения *инертной* массы системы, которой сообщается энергия Δu, а это легко можно связать с вышеупомянутым результатом.

Наконец, показано, как можно найти точку, которая относится к весу нашей системы зарядов так же, как центр тяжести к весу обычной системы «материальных» масс.

---

* *Sull'elettrostatica di un campo gravitazionale uniforme e sul peso delle masse elettromagnetiche.* Nuovo Cimento, 1921, 22, 176—188.

Часть 1

ЭЛЕКТРОСТАТИКА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

§ 1. Рассмотрим область пространства, где имеется однородное гравитационное поле, и предположим, что электростатические эффекты в ней настолько слабы, что обусловленным ими изменением метрики рассматриваемой области можно пренебречь. При этих предположениях метрический элемент пространственно-временнóго многообразия в этой области можно записать в виде [1]

$$ds^2 = adt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \tag{1}$$

где a — функция только z.

Переменные t, x, y, z будут обозначаться также через x_0, x_1, x_2, x_3, а коэффициенты квадратичной формы (1) — через g_{ik}.

Пусть φ_i — векторный потенциал и F_{ik} — электромагнитное поле. Тогда

$$F_{ik} = \varphi_{ik} - \varphi_{ki}; \tag{2}$$

при этом в дальнейшем будем исходить из фундаментальной формы (1)

Ограничиваясь электростатическими полями, положим $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$ и обозначим для краткости $\varphi_0 = \varphi$. Тогда

$$F_{ik} = \varphi_{ik} - \varphi_{ki} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i},$$

т. е.

$$\begin{aligned} &F_{01} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad && F_{02} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad && F_{03} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \\ &F_{23} = F_{31} = F_{12} = 0, \quad && F_{ik} = -F_{ki}, \quad && F_{ii} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Кроме того,

$$F^{(ij)} = \sum_{kh} g^{(ih)} g^{(jk)} F_{hk} = g^{(ii)} g^{(jj)} F_{ij},$$

откуда, учитывая, что

$$g^{(00)} = \frac{1}{a}, \qquad g^{(11)} = g^{(22)} = g^{(33)} = -1,$$

получаем

$$\begin{aligned} &F^{(01)} = -\frac{1}{a}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad && F^{(02)} = -\frac{1}{a}\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad && F^{(03)} = -\frac{1}{a}\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \\ &F^{(23)} = F^{(31)} = F^{(12)} = 0, \quad && F^{(ik)} = -F^{(ki)}, \quad && F^{(ii)} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

---

[1] T. Levi-Civita. Nota II. *Sui ds^2 einsteiniani*, Rend. Acc. Lincei, **27**, 1 sem. No. 7.

В случае, о котором сейчас идет речь, действие можно записать в следующем виде:

$$W = \int_{\omega} \sum_{ik} F_{ik} F^{(ik)} d\omega + \int de \int \varphi dx_0, \tag{5}$$

где

$$d\omega = \sqrt{-\|g_{ik}\|}\, dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 = \sqrt{a}\, dxdydzdt$$

является элементом гиперобъема многообразия, и интегрирование по $d\omega$ распространяется на определенную область многообразия, в то время как интегрирование по de, dx_0 следует распространить соответственно на все элементы электрического заряда, мировые линии которых проходят через рассматриваемую область, и на те отрезки таких линий, которые там находятся.

§ 2. При вариации W величину φ можно варьировать произвольно, но с единственным условием, что на границе области интегрирования $\delta\varphi = 0$.

Вариации же δx, δy, δz, кроме условия $\delta x = \delta y = \delta z = 0$ на границе, могут подчиняться также другим условиям, которые следует определять в различных частных случаях. Например, внутри проводящего тела они будут совсем произвольными, а в абсолютно твердом диэлектрике они должны представлять компоненты виртуального жесткого смещения и т. д.

Подставляя в соотношение (5) значения из (3) и (4), находим

$$W = -\frac{1}{2} \iiiint \frac{1}{\sqrt{a}} \left\{ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 \right\} dxdydzdt + \int de \int \varphi dt, \tag{6}$$

откуда

$$\delta V = \iiiint \delta\varphi \left[\frac{1}{\sqrt{a}} \Delta_2\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \frac{d \frac{1}{\sqrt{a}}}{dz} + \rho \right] dxdydzdt +$$
$$+ \iiiint \rho \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \delta z \right) dxdydzdt; \tag{7}$$

это сразу можно видеть, если заметить, что (вследствие сделанных гипотез) вдоль мировой линии $dx = dy = dz = 0$ и что $\rho\, dxdydz = de$, где ρ — плотность электрического заряда.

Так как внутри области интегрирования вариация $\delta\varphi$ является произвольной, то для тождественного обращения в нуль δW должно иметь место соотношение

$$\Delta_2\varphi - \frac{d \ln \sqrt{a}}{dz} \frac{\partial\varphi}{dz} = -\rho \sqrt{a}. \tag{8}$$

Кроме того, мы должны иметь

$$\iiiint \rho\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\delta z\right) dx\,dy\,dz\,dt = 0 \tag{9}$$

для каждой системы значений δx, δy, δz, совместимой с предполагаемыми связями.

В уравнении (8) содержится обобщение закона Пуассона, к которому приводится уравнение (8) при постоянном a, т. е. в отсутствие гравитационного поля.

§ 3. Если через G обозначить гравитационное ускорение рассматриваемого поля, т. е. ускорение, с которым будет двигаться свободная материальная точка, то

$$G = -\frac{1}{2}\frac{da}{dz}\,. \tag{10}$$

При этом уравнение (8) принимает вид

$$\Delta_2\varphi + \frac{G}{a}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\rho\sqrt{a}. \tag{11}$$

Чтобы найти решение уравнения (11) при заданном значении ρ в каждой точке, допустим, что электрические заряды содержатся внутри малой области вокруг начала координат. Кроме того, положим в начале координат $a = c^2$ (c — скорость света вблизи начала); предположим также, что гравитационное поле настолько мало, что допускает пренебрежение членами, содержащими квадрат величины lG/c^2, где l — максимальная длина, существенная для рассматриваемой задачи. При этих предположениях

$$\sqrt{a} = c + \frac{1}{2c}\frac{da}{dz}\,z = c\left(1 - \frac{G}{c^2}\,z\right).$$

Уравнение (11) можно поэтому записать в виде

$$\Delta_2\varphi + \frac{G}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -c\left(1 - \frac{G}{c^2}\,z\right)\rho. \tag{12}$$

Решение этого уравнения, в чем можно сразу убедиться, в указанном приближении имеет вид

$$\varphi_P = \frac{c}{4\pi}\int\left(1 - \frac{G}{c^2}\right) z_M d\tau_M \left(\frac{1}{r} - \frac{G}{2c^2}\frac{z_P - z_M}{r}\right) =$$

$$= \frac{c}{4\pi}\int \rho_M d\tau_M \left(\frac{1}{r} - \frac{G}{2c^2}\frac{z_P + z_M}{r}\right), \tag{13}$$

где M — произвольная точка области τ_M, в которой находятся электрические заряды, P — точка, в которой вычисляется φ, и r — расстояние MP.

Вследствие линейности уравнения (12), к решению уравнения (13), естественно, можно добавить любое решение уравнения

$$\Delta_2\varphi + \frac{G}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \tag{12*}$$

полученного при подстановке $\rho = 0$ в (12). Такое решение будет представлять поле, обусловленное всеми причинами, кроме ρ_M. Для интересующих нас применений удобно рассмотреть следующее частное решение уравнения (12*):

$$\varphi = -cE_x^*x - cE_y^*y + \frac{c^2}{G}E_z^*e^{-\frac{G}{c^2}z}, \tag{14}$$

где E_x^*, E_y^*, E_z^* — константы.

Если E — напряженность электрического поля, то в начале координат

$$E_x = -\frac{1}{c}F_{01}, \qquad E_y = -\frac{1}{c}F_{02}, \qquad E_z = -\frac{1}{c}F_{03}.$$

Отсюда следует, что в начале координат напряженность внешнего электрического поля (14) имеет компоненты

$$E_x^*, \qquad E_y^*, \qquad E_z^*.$$

§ 4. Далее рассчитаем электрическое поле, обусловленное зарядом e, сконцентрированным в начале координат. Из выражения (13) имеем

$$\varphi = \frac{ce}{4\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{G}{2c^2}\frac{z}{r}\right). \tag{15}$$

Эта формула является обобщением элементарного закона Кулона, как это сразу можно видеть, полагая $G = 0$. Вспоминая соотношения (3), получаем

$$\left.\begin{aligned} F_{01} &= \frac{ce}{4\pi}\left(\frac{x}{r^3} - \frac{G}{2c^2}\frac{zx}{r^3}\right), \\ E_{02} &= \frac{ce}{4\pi}\left(\frac{y}{r^3} - \frac{G}{2c^2}\frac{zy}{r^3}\right), \\ F_{03} &= \frac{ce}{4\pi}\left(\frac{z}{r^3} - \frac{G}{2c^2}\frac{z^2}{r^3} + \frac{G}{2c^2}\frac{1}{r}\right). \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Предыдущие три формулы можно объединить в одно векторное соотношение. Действительно, если обозначить через $\mathbf{F}_0$ вектор с компонентами F_{01}, F_{02}, F_{03}, через **a** — единичный вектор с направлением MP **и**, наконец, через **G** — вектор с модулем G и направлением вдоль оси z, то

формулы (16) можно записать в виде

$$\mathbf{F}_0 = \frac{ce}{4\pi}\left\{\frac{\mathbf{a}}{r^2} - \frac{\mathbf{G}\cdot\mathbf{a}}{2c^2r}\,\mathbf{a} + \frac{1}{2c^2r}\,\mathbf{G}\right\}. \tag{17}$$

Интересно сравнить эту формулу с выражением для напряженности электрического поля, создаваемого электрическим зарядом e, который в отсутствие гравитационного поля обладает ускорением $\mathbf{\Gamma}$, квазистационарным движением и скоростью, пренебрежимо малой по сравнению со скоростью света. Эта напряженность в тех же обозначениях дается выражением

$$\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi}\left\{\frac{\mathbf{a}}{r^2} + \frac{\mathbf{G}\cdot\mathbf{a}}{2c^2r}\,\mathbf{a} - \frac{1}{c^2r}\,\mathbf{\Gamma}\right\}. \tag{18}$$

Отсюда видно, что, подставляя в (18)

$$\mathbf{\Gamma} = \frac{\mathbf{G}}{2}, \tag{19}$$

получаем

$$F_0 = cE.$$

Если заметить, что cE — электрическая часть электромагнитного поля, создаваемого ускоренно движущимся зарядом, то этот результат может быть выражен следующим образом.

Электрическая часть (F_{01}, F_{02}, F_{03}) электромагнитного поля (F_{ik}), созданного неподвижным электрическим зарядом, находящимся в однородном гравитационном поле с напряженностью G, совпадает с электрической частью электромагнитного поля, которое в отсутствие гравитационного поля создавалось бы тем же зарядом, если бы он двигался при указанных условиях с ускорением $G/2$ по направлению, противоположному гравитационному полю.

§ 5. Изучим далее, как гравитационное поле влияет на распределение электрического заряда в проводящем теле. Поскольку внутри этого тела δx, δy, δz являются произвольными, из соотношения (9) следует, что $\varphi = \text{const}$ внутри тела, и поэтому из уравнения (8) $\rho = 0$. Поэтому электрический заряд находится полностью на поверхности. Предположим далее, что тело суть сфера с центром O в начале координат и радиусом R.

Попробуем удовлетворить условию $\varphi = \text{const}$ внутри тела, предполагая, что поверхностная плотность электричества в произвольной точке M поверхности задается выражением

$$\frac{e}{4\pi R^2} + \frac{e}{R}\,a\cos\vartheta, \tag{20}$$

где ϑ — угол между радиусом-вектором OM и осью z, а a — константа (определяемая позже), которая по порядку величины равна G/c^2. Потен-

циал во внутренней точке P, согласно (13), есть

$$\varphi_P = \frac{c}{4\pi}\int\limits_\sigma \left(\frac{e}{4\pi R^2} + \frac{ea\cos\vartheta}{R}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{G}{2c^2}\,\frac{z_P + z_M}{r}\right) d\sigma,$$

где интегрирование следует распространить на всю поверхность σ сферы. Пренебрегая членами порядка выше G/c^2, получаем

$$\varphi_P = \frac{ce}{16\pi^2R^2}\int\frac{d\sigma}{r} + \frac{cea}{4\pi R}\int\frac{\cos\vartheta d\sigma}{r} - \frac{ceGz_P}{32\pi^2R^2c^2}\int\frac{d\sigma}{r} - \frac{ceG}{32\pi^2R^2c^2}\int\frac{z_M}{r}\,d\sigma. \quad (21)$$

Но поскольку P — точка внутри сферы, то

$$\int\frac{d\sigma}{r} = 4\pi R, \qquad \int\frac{\cos\vartheta}{r}\,d\sigma = \frac{4}{3}\pi z_P, \qquad \int\frac{z_M}{r}\,d\sigma = \frac{4}{3}\pi R z_P.$$

Тогда

$$\varphi_P = \frac{ce}{4\pi R} + \frac{c}{3}\left(\frac{e}{R}\,a - \frac{eG}{2\pi Rc^2}\right) z_P. \quad (22)$$

Поэтому, чтобы φ_P была константой, мы должны положить

$$a = \frac{1}{2\pi}\,\frac{G}{c^2}\,.$$

Подставляя это значение в выражение (20), находим для поверхностной плотности выражение

$$\frac{e}{4\pi R^2}\left(1 + \frac{2G}{c^2}\,R\cos\vartheta\right). \quad (23)$$

Итак, в сфере, находящейся в гравитационном поле, возникает поляризация с моментом

$$\frac{3}{2}\,\frac{G}{c^2}\,eR^2.$$

Часть II

ВЕС ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ МАСС

§ 6. Пусть имеется система жестко связанных зарядов, так что величинам δx, δy, δz (см. § 2) следует приписать форму компонент жесткого смещения. Оставив до следующего параграфа обсуждение вращательных смещений, рассмотрим вначале трансляционные смещения, т. е. предположим, что δx, δy, δz суть произвольные функции времени, но не зависят от x, y, z.

Тогда мы попытаемся удовлетворить соотношению (9), полагая, что потенциал φ_P в произвольной точке P есть сумма потенциала, данного ра-

венством (13), и потенциала типа (14). Обозначим эти два слагаемых через φ'_P и φ''_P и предположим, что отношение производных φ'_P и φ''_P по любому направлению имеет порядок величины lG/c^2, квадратом которого мы согласились пренебрегать. Тогда соотношение (9) можно записать в виде

$$\int dt\left\{\delta x \int\limits_{\tau_P}\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x}+\frac{\partial\varphi''}{\partial x}\right)\rho_P d\tau_P+\delta y \int\limits_{\tau_P}\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial y}+\frac{\partial\varphi''}{\partial y}\right)\rho_P d\tau_P+\right.$$
$$\left.+\delta z \int\limits_{\tau_P}\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial z}+\frac{\partial\varphi''}{\partial z}\right)\rho_P d\tau_P\right\}=0.$$

Поскольку δx, δy, δz — произвольные функции времени, не зависящие друг от друга, это уравнение эквивалентно трем следующим:

$$\int\limits_{\tau_P}\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x}+\frac{\partial\varphi''}{\partial x}\right)\rho_P d\tau_P=\int\limits_{\tau_P}\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial y}+\frac{\partial\varphi''}{\partial y}\right)\rho_P d\tau_P=\int\limits_{\tau_P}\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial z}+\frac{\partial\varphi''}{\partial z}\right)\rho_P d\tau_P=0. \tag{24}$$

Теперь, замечая, что

$$\frac{\partial r}{\partial x_P}=\frac{x_P-x_r}{r},$$

из формулы (13) сразу получаем

$$\int\limits_{\tau_P}\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\rho_P d\tau_P=-\frac{c}{4\pi}\int\limits_{\tau_P}\int\limits_{\tau_M}\rho_P\rho_M d\tau_P d\tau_M\left\{\frac{x_P-x_M}{r^3}-\frac{G}{2c^2}\frac{(x_P-x_M)(z_P+z_M)}{r^3}\right\},$$

где оба интеграла следует распространить на занятую зарядами область. Поменяв местами во втором члене P и M, что ничего не изменяет, получим

$$\int\limits_{\tau_P}\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\rho_P d\tau_P=$$
$$=-\frac{c}{4\pi}\int\limits_{\tau_M}\int\limits_{\tau_P}\rho_M\rho_P d\tau_M d\tau_P\left\{\frac{x_M-x_P}{r^3}-\frac{G}{2c^2}\frac{(x_M-x_P)(z_M+z_P)}{r^3}\right\},$$

откуда, взяв полусумму полученных двух выражений, находим

$$\int\limits_{\tau_P}\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\rho_P d\tau_P=0. \tag{25}$$

Совершенно аналогично имеем

$$\int\limits_{\tau_P}\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\rho_P d\tau_P=0. \tag{26}$$

Подобным образом

$$\int_{\tau_P} \frac{\partial \varphi'}{\partial z}\, \rho_P d\tau_P =$$

$$= -\frac{c}{4\pi} \int_{\tau_P} \int_{\tau_M} \rho_P \rho_M d\tau_P d\tau_M \left\{ \frac{z_P - z_M}{r^3} - \frac{G}{2c^2} \frac{(z_P - z_M)(z_P + z_M)}{r^3} + \frac{G}{2c^2} \frac{1}{r} \right\},$$

и, меняя местами M и P,

$$\int_{\tau_P} \frac{\partial \varphi'}{\partial z}\, \rho_P d\tau_P =$$

$$= -\frac{c}{4\pi} \int_{\tau_P} \int_{\tau_M} \rho_M \rho_P d\tau_M d\tau_P \left\{ \frac{z_M - z_P}{r^3} - \frac{G}{2c^2} \frac{(z_M - z_P)(z_M + z_P)}{r^3} + \frac{G}{2c^2} \frac{1}{r} \right\};$$

взяв теперь полусумму полученных выражений, найдем

$$\int_{\tau_P} \frac{\partial \varphi'}{\partial z}\, \rho_P d\tau_P = -\frac{c}{4\pi} \frac{G}{2c^2} \int_{\tau_P} \int_{\tau_M} \frac{\rho_P \rho_M}{r}\, d\tau_P d\tau_M = -G \frac{u}{c^2} c, \tag{27}$$

где u — электростатическая энергия системы (в пренебрежении членами, связанными с гравитационными поправками). В силу предположений, сделанных нами относительно производных φ'', сразу же можно записать (в рамках нашего приближения)

$$\left.\begin{aligned} \int_{\tau} \frac{\partial \varphi''}{\partial x} \rho\, d\tau &= -cE_x^* e, \\ \int_{\tau} \frac{\partial \varphi''}{\partial y} \rho\, d\tau &= -cE_y^* e, \\ \int_{\tau} \frac{\partial \varphi''}{\partial z} \rho\, d\tau &= -cE_z^* e, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

где через $e = \int_{\tau} \rho d\tau$ обозначен полный заряд системы. Подставляя полученные выражения в равенства (24), находим

$$eE_x^* = 0, \qquad eE_y^* = 0, \qquad eE_z^* = -G \frac{u}{c^2}. \tag{29}$$

В этих формулах и содержится наш результат. Действительно, они говорят нам, что для поддержания нашей системы в равновесии необходимо внешнее поле (E^*), которое действует на систему (в первом приближении) с силой eE^*. Учитывая, что эта сила направлена противоположно весу

системы, находим для веса — eE^*, а для его компонент —

$$0, \ 0, \ G\frac{u}{c^2}. \qquad (30)$$

Итак, мы пришли к выводу, что *вес электромагнитной массы всегда направлен вертикально и по величине равен весу материальной массы u/c^2.*

§ 7. В предыдущем параграфе δx, δy, δz являлись компонентами трансляционного смещения. Если же рассматриваются компоненты виртуального смещения вокруг оси, проходящей через начало координат, т. е. полагается

$$\delta x = qz - ry, \qquad \delta y = rx - pz, \qquad \delta z = py - qx, \qquad (31)$$

то интеграл (9) приобретает вид

$$\int d\tau \left\{ p \int_\tau \rho \left(y \frac{\partial \varphi}{\partial z} - z \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) d\tau + q \int_\tau \rho \left(z \ \frac{\partial \varphi}{\partial x} = x \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) d\tau + \right.$$
$$\left. + r \int_\tau \rho \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) d\tau \right\}; \qquad (32)$$

при этом часть, обусловленная внешним полем φ'', здесь не рассматривается.

Интегралы в скобках легко вычислить на основе формул (13) с помощью приемов, подобных использованным в предыдущем параграфе. Их значения соответственно равны

$$-\frac{G}{8\pi c}\iint \frac{y_P}{r}\rho_P\rho_M d\tau_P d\tau_M; \qquad +\frac{G}{8\pi c}\iint \frac{x_P}{r}\rho_P\rho_M d\tau_P d\tau_M; \qquad 0. \qquad (33)$$

Принимая за начало координат точку O', определенную точкой O и вектором

$$O' - O = \frac{1}{2u}\iint \frac{P-O}{r}\rho_P\rho_M d\tau_P d\tau_M,$$

сразу можно видеть, что три интеграла обращаются в нуль при любой ориентации системы относительно точки O'. Отсюда следует, что при таком выборе нового начала координат интеграл (9) тождественно обращается в нуль, т. е. при любой ориентации системы момент веса по отношению к точке O' равен нулю; итак, точка O' обладает свойствами центра тяжести.

Пиза, март 1921 г.

К статье 3

Эта статья зародилась у Ферми, вероятно, в связи со статьей 2, хотя ни в одной из этих статей не дается явной ссылки на другую. Видимо, можно предположить, что Ферми, изучив соотношения между гравитационным и электромагнитным полями при довольно специальных условиях (статья 2), увидел возможность более систематического рассмотрения этой и других аналогичных задач с помощью системы пространственно-временны́х координат, которая особенно подходит для прослеживания за поведением во времени явлений, происходящих в малой пространственной области. Таким образом он пришел к этой статье, которая, за исключением последней части, является, по существу, доказательством некоторой теоремы тензорного исчисления. Эта теорема представляет значительный интерес для приложений, и поэтому приводится в наиболее важных курсах тензорного исчисления (см., например, T. Levi-Civita. Calcolo Differenziale Assoluto. Roma, 1925, p. 190). Впоследствии эта теорема была распространена на некоторый класс нериманосвких пространств и на любые линейно связанные пространства. «Координаты Ферми» широко используются в книге: J. Singe. Relativity, the General Theory. Amsterdam, 1960 (см. русский перевод: Дж. Синг. Общая теория относительности. Москва, 1963.— *Прим. ред.*).

Э. Персико

3

О ЯВЛЕНИЯХ, ПРОИСХОДЯЩИХ ВБЛИЗИ ОТ МИРОВОЙ ЛИНИИ*

ЗАМЕТКА I

1. Здесь будут изучены те явления, которые происходят вблизи от мировой линии, т. е. на нерелятивистском языке, в пространственной области, возможно, изменяющейся со временем, но всегда остающейся очень малой с точки зрения отклонения от эвклидовости пространственно-временно́го многообразия. С этой целью следует прежде всего найти удобную систему отсчета, в которой вблизи от изучаемой линии выражение для ds^2 принимает простой вид. Ее нахождению мы должны предпослать некоторые геометрические рассуждения.

Пусть в римановом многообразии V_n, или в многообразии с метрической связностью в смысле Вейля [1], задана линия L. С каждой точкой P

---

* *Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria*. Rend. Lincei, 1922, 31 (1), 21—23, 51—52, 101—103. Представлено чл.-корр. Дж. Армеллини на заседании 22 января 1922 г.

[1] Weyl. Raum, Zeit, Materie. Berlin, Springer, 1921, p. 109.

линии L будем связывать направление y, перпендикулярное L, и такое, что направление $y + dy$ в точке $P + dP$ получается из направления y в точке P следующим образом. Пусть η — направление касательной к L в точке P; пусть y, η параллельно переносятся [2] из P в $P + dP$ и, наконец, пусть $y + \delta y$, $\eta + \delta\eta$ — полученные таким образом направления, которые опять-таки будут ортогональными вследствие основных свойств параллельного переноса.

Если L не геодезическая линия, то $\eta + \delta\eta$ не совпадает с направлением $\eta + d\eta$ касательной к L в точке $P + dP$, и эти два направления будут определять в $P + dP$ некоторую площадку. Рассмотрим в точке $P + dP$ элемент S_{n-2}, перпендикулярный к этой площадке, и будем поворачивать вокруг S_{n-2} как целое элементарную окрестность точки $P + dP$ до тех пор, пока $\eta + \delta\eta$ не совместится с $\eta + d\eta$. Тогда $y + \delta y$ займет положение, которое мы принимаем как направление $y + dy$ в точке $P + dP$. После того как направление y в некоторой точке линии L произвольно задано, процесс интегрирования позволяет узнать его для всех точек L.

Найдем теперь аналитические выражения, отражающие указанные операции для риманового многообразия; они тождественны выражениям, справедливым для метрического многообразия Вейля при условии, что калибровка (Eichung) выбирается таким образом, что мера жесткого отрезка, движущегося вблизи линии L, является постоянной. Пусть

$$ds^2 = \sum_{i,k} g_{ik} dx_i dx_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

и пусть y_i, $y^{(i)}$, η_i, $\eta^{(i)} = dx_i/ds$ — системы ко- и контравариантных компонент направлений y, η.

Имеем

$$\frac{\delta\eta^{(i)}}{ds} = -\sum_{hl} \begin{Bmatrix} h\ l \\ i \end{Bmatrix} \eta^{(h)} \frac{dx_l}{ds} = -\sum_{hl} \begin{Bmatrix} h\ l \\ i \end{Bmatrix} \frac{dx_h}{ds}\frac{dx_l}{ds};$$

кроме того,

$$\frac{d\eta^{(i)}}{ds} = \frac{d}{ds}\frac{dx_i}{ds} = \frac{d^2x_i}{ds^2}.$$

Поэтому

$$\frac{\delta\eta^{(i)} - d\eta^{(i)}}{ds} = -\left(\frac{d^2x_i}{ds^2} + \sum_{hl} \begin{Bmatrix} h\ l \\ i \end{Bmatrix} \frac{dx_h}{ds}\frac{dx_l}{ds}\right) = -C^i.$$

Здесь C^i являются контравариантными компонентами вектора C геодезической кривизны, т. е. вектора, направленного по главной нормали геодезической и с модулем, равным геодезической кривизне.

[2] T. Levi-Civita. Rend. Circ. Palermo, 1917, t. XLII, p. 173.

С другой стороны,

$$\frac{\delta y^{(i)}}{ds} = -\sum_{hk} \begin{Bmatrix} h & k \\ & i \end{Bmatrix} y^{(h)} \frac{dx_k}{ds}. \qquad (2)$$

Поскольку y перпендикулярно линии L, смещение, при котором из $y + \delta y$ получается $y + dy$, будет параллельно касательной к L, и его величина будет равна проекции $\delta\eta - d\eta$ на самое y, т. е. скалярному произведению $\delta\eta - d\eta$ на y:

$$\sum_i (\delta\eta_i - d\eta_i)\, y^{(i)} = -ds \sum_i C_i y^{(i)},$$

поскольку длина y равна единице. Контравариантные компоненты этого смещения можно получить, умножая его величину на контравариантные координаты касательной к L, т. е. на dx_i/ds. В конечном счете поэтому они равны $-dx_i \sum_r C_r\, y^{(r)}$. Из соотношения (2) сразу следует

$$\frac{dy^{(i)}}{ds} = -\sum_{hk} \begin{Bmatrix} h & k \\ & i \end{Bmatrix} y^{(h)} \frac{dx_k}{ds} - \frac{dx_i}{ds} \sum C_h y^{(h)}. \qquad (3)$$

Уравнение (3), написанное для $i = 1, 2, \ldots, n$, эквивалентно системе n дифференциальных уравнений первого порядка с n неизвестными $y^{(1)}$, $y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}$, которые, таким образом, могут быть определены, если заданы их начальные значения. Из соотношения (3) нетрудно было бы формально проверить, что если начальные значения $y^{(i)}$ удовлетворяют условию перпендикулярности L, то такое условие остается справедливым вдоль всей линии.

2. В точке P_0 линии L зададим произвольным образом n направлений $y_1, y_2, \ldots, y_n$, ортогональных между собой, с условием, что y_n — касательная к L. Направления $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ будут перпендикулярными линии L, и мы можем перенести их вдоль L согласно заданному в предыдущем параграфе закону, который, как это ясно из самого определения, сохраняет их ортогональность. Таким образом, с каждой точкой L мы будем ассоциировать n направлений, ортогональных между собой, последнее из которых принадлежит касательной к линии L. Далее, представим, что наше V_n вложено в эвклидово пространство S_N с соответствующим числом измерений. Теперь мы можем принять в качестве координат точки в V_n декартовы ортогональные координаты ее проекции на S_N (касательное к V_n в произвольной точке P линии L) с началом координат в P и направлениями $y_1, y_2, \ldots, y_n$. С помощью этих координат метрический элемент многообразия V_n в точке P принимает вид

$$ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + \ldots + dy_n^2;$$

сразу видно, что они являются также геодезическими в точке P. Иными

словами, для координат y в окрестности точки P можно положить с точностью до бесконечно малых величин выше первого порядка $g_{ii} = 1$, $g_{ik} = 0$ $(i \neq k)$. Ясно, что для каждой точки линии L имеется одна такая система отсчета.

Далее рассмотрим точку Q_0 многообразия V_n, которая в системе отсчета, относящейся к точке P_0 линии L, имеет координаты $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_{n-1}$, 0. Тогда для любой другой точки P линии L мы можем определить точку Q, которая в системе отсчета, относящейся к P, имеет те же координаты, что и Q_0 в системе, относящейся к P_0. Точка Q будет, таким образом, пробегать вдоль линии, параллельной L. Теперь мы найдем соотношение, связывающее ds_Q с ds_P, в предположении, что Q — бесконечно близка к P. Для этого заметим, что смещение, переносящее Q в $Q + dQ$, составлено из смещений, обозначенных в разделе 1 через δ и $d - \delta$, и что первое из них (поскольку это — параллельное смещение) с точностью до бесконечно малых величин высшего порядка дает $\delta s_Q = ds_P$; второе — вращение, которое, как мы видели в разделе 1, дает $(d - \delta)\, s_Q = ds_P\, \mathrm{C}\cdot(Q - P)$, где точка означает скалярное произведение, а $Q - P$ — вектор с началом в P и концом в Q. Кроме того, ds_Q и $(d - \delta)s_Q$ имеют направление касательной к L. Поэтому $ds_Q = \delta s_Q + (d - \delta)s_Q$, т. е.

$$ds_Q = ds_P\,[1 + \mathrm{C}\cdot(Q - P)]. \tag{4}$$

Траектории точек Q составляют $(n - 1)$-кратную бесконечность линий, и поэтому, по крайней мере с соответствующими ограничениями, через каждую точку M в V_n будет проходить одна из таких линий; таким образом, мы можем охарактеризовать M с помощью координат $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_{n-1}$ точки Q, которые соответствуют линии, проходящей через M и дугу s_P линии L, отсчитанную от произвольного начала до той точки P, которая соответствует совпадающей с M точке Q.

Если M бесконечно близка к L, то ds_Q будет перпендикулярно гиперповерхности $s_P = \mathrm{const}$. Поэтому имеем

$$ds_M^2 = ds_Q^2 + d\bar{y}_1^2 + d\bar{y}_2^2 + \ldots + d\bar{y}_{n-1}^2,$$

и, учитывая соотношение (4),

$$ds_M^2 = [1 + \mathrm{C}\cdot(M - P)]^2 ds_P^2 + d\bar{y}_1^2 + d\bar{y}_2^2 + \ldots + d\bar{y}_{n-1}^2. \tag{5}$$

Итак, вблизи L мы нашли крайне простое выражение для ds^2.

ЗАМЕТКА II

3. Прежде чем перейти к физическим применениям полученных результатов, хотелось бы сделать еще некоторые геометрические замечания. Очевидно, что предыдущие рассуждения и, следовательно, формула (5), спра-

ведливые для любого многообразия только вблизи L, для эвклидовых пространств справедливы всюду. Будем теперь ассоциировать с линией L в V_n линию L^* эвклидового пространства S_n, где через $\overset{*}{x}_i$ будут обозначены ортогональные декартовы координаты. Если условиться, что символы со звездочкой относятся к линии L^*, то для S_n можно записать формулу, аналогичную (5):

$$ds^2_{M^*} = [1 + \mathbf{C}^* (M^* - P^*)]^2 ds^2_P + d\bar{y}^{*2}_1 + d\bar{y}^{*2}_2 + \ldots + d\bar{y}^{*2}_{n-1}. \qquad (5^*)$$

Подобно тому как в формуле (5) $\mathbf{C}$ зависит от s_P, так и в (5*) $\mathbf{C}^*$ зависит от s_{P^*}.

Пусть $K^{(1)}, K^{(2)}, \ldots, K^{(n-1)}$ — контравариантные компоненты $\mathbf{C}$, относящиеся к $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_{n-1}$ и $K^{(1)*}, K^{(2)*}, \ldots, K^{(n-1))*}$ — компоненты $\mathbf{C}^*$, относящиеся к $\bar{y}^*$. Можно ли определить L таким образом, чтобы функции $K^{(r)*}(s_P)$ стали равными $K^{(r)}(s_P)$? Чтобы ответить на этот вопрос, сначала положим $s_P = s_{P^*}$, т. е. установим между точками L и L^* взаимно однозначное соответствие, которое сохраняет дуги. Далее, заметим, что $K^{(r)*}$ — проекция $\mathbf{C}^*$ на r-направление y^*, т. е.

$$K^{(r)*} = \sum_{i=1}^{n} y^*_{i/r} \frac{d^2 x_i^*}{ds^2_P} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1). \qquad (6)$$

Компоненты $K^{(r)}$ — известные функции s_P. Поэтому условие $K^{(r)} = K^{(r)*}$ приводит к $(n-1)$ уравнениям

$$K^{(r)}(s_P) = \sum_{i=1}^{n} y^*_{i/r} \frac{d^2 x^*_i}{ds^2_P} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1). \qquad (7)$$

С другой стороны, соотношения (3), написанные для S_n, дают $n(n-1)$ дополнительных уравнений. Если прибавить к ним еще соотношение

$$ds^2_P = dx^{*2}_1 + dx^{*2}_2 + \ldots + dx^{*2}_n, \qquad (8)$$

то будем иметь систему $(n-1) + n(n-1) + 1 = n^2$ уравнений с n^2 неизвестными $\overset{*}{x}_i$, $\overset{*}{y}_{i/r}$, позволяющих представить их как функции s_P. Таким образом, можем определить параметрические уравнения $\overset{*}{x}_i = \overset{*}{x}_i(s_P)$ линии L^*. Итак, формула (5) становится тождественной формуле (5*), т. е. мы представили окрестности линии L^* в виде наложения на окрестности линии L. И поскольку L^* находится в эвклидовом пространстве, мы можем сказать также, что мы расположили окрестности L в эвклидовом пространстве, т. е. мы нашли координаты, геодезические одновременно во всех точках L.

ЗАМЕТКА III

4. Для применения предыдущих результатов к теории относительности предположим, что V_n суть пространственно-временно́е многообразие V_4 и L — мировая линия, вблизи которой мы будем изучать явления. Полагая, для краткости, в формуле (5) $ds_M = ds$, в этом случае находим

$$ds^2 = [1 + \mathbf{C}\cdot(M - P)]^2 ds_P^2 + d\bar{y}_1^2 + d\bar{y}_2^2 + d\bar{y}_3^2.$$

Чтобы избежать появления мнимых выражений и восстановить однородность, произведем следующую замену переменных

$$s_P = vt, \qquad \bar{y}_1 = ix, \qquad \bar{y}_2 = iy, \qquad \bar{y}_3 = iz,$$

где v — константа с размерностью скорости, так что t имеет размерность времени. Тогда получим

$$ds^2 = a dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \tag{9}$$

где

$$a = v^2 [1 + \mathbf{C}\cdot(M - P)]^2. \tag{10}$$

С этого момента для пространства x, y, z мы будем применять обычную векторную символику. В этом обычном смысле можно понимать и скалярное произведение в соотношении (10), если под $\mathbf{C}$ подразумевать вектор, имеющий в качестве компонент ковариантные компоненты геодезической кривизны линии $x = y = z = 0$, а под $M - P$ — вектор с компонентами x, y, z. Ниже x, y, z называются пространственными координатами, а t — временно́й координатой. Для удобства иногда будем писать x_0, x_1, x_2, x_3 вместо t, x, y, z и обозначать через g_{ik} коэффициенты квадратичной формы (9).

5. Пусть[3] F_{ik} — электромагнитное поле и $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ — тензор первого ранга — «потенциал» F_{ik}, так что $F_{ik} = \varphi_{ik} - \varphi_{ki}$. Положим $\varphi_0 = \varphi$ и обозначим через $\mathbf{u}$ вектор с компонентами $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Имеем

$$\left.\begin{matrix} F_{01} \\ F_{02} \\ F_{03} \end{matrix}\right\} = \operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \qquad \left.\begin{matrix} F_{23} \\ F_{31} \\ F_{12} \end{matrix}\right\} = -\operatorname{rot}\mathbf{u}, \qquad F_{ii} = 0, \qquad F_{ik} = -F_{ki}$$

и аналогично

$$\left.\begin{matrix} F^{(01)} \\ F^{(02)} \\ F^{(03)} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{a}\left(-\operatorname{grad}\varphi + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right), \qquad \left.\begin{matrix} F^{(23)} \\ F^{(31)} \\ F^{(12)} \end{matrix}\right\} = -\operatorname{rot}\mathbf{u}, \quad F^{(ii)} = 0, \quad F^{(ik)} = -F^{(ki)}.$$

---

[3] Обозначения и вывод законов физики по Гамильтону читатель может найти в книге Вейля (цит. соч., стр. 186 и 208).

Поэтому

$$-\frac{1}{4}\sum_{ik} F_{ik}F^{(ik)} = \frac{1}{a}\left\{\mathrm{rot}^2\,\mathbf{u} - \frac{1}{a}\left(\mathrm{grad}\,\varphi - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right)^2\right\}.$$

Пусть $d\omega$ — элемент гиперобъема в V_4. Находим

$$d\omega = \sqrt{-\|g_{ik}\|}\,dx_0dx_1dx_2dx_3 = \sqrt{a}\,dt\,d\tau,$$

где $d\tau = dxdydz$ — элемент пространственного объема. Имеем также

$$\sum \varphi_i dx_i = \varphi dt + \mathbf{u}\cdot d\mathbf{M}, \qquad d\mathbf{M} = (dx,\ dy,\ dz).$$

Не рассматривая здесь действие метрического поля, изменение которого равно нулю [поскольку поле предполагается заданным априори соотношением (9)], можно видеть, что действие принимает следующий вид:

$$W = -\frac{1}{4}\int_{\omega}\sum_{ik} F_{ik}F^{(ik)}d\omega + \int_{e} de\int\sum_{i}\varphi_i dx_i + \int_{m} dm\int ds,$$

(de = элемент электрического заряда, dm = элемент массы).

Вводя указанные обозначения, находим

$$W = \frac{1}{2}\iint\left\{\mathrm{rot}^2\,\mathbf{u} - \frac{1}{2}\left(\mathrm{grad}\,\varphi - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right)^2\right\}\sqrt{a}\,dt\,d\tau +$$
$$+ \iint(\varphi + \mathbf{u}\cdot\mathbf{V}_L)\,\rho\,d\tau\,dt + \iint\sqrt{a - V_M^2}\,k\,d\tau\,dt, \qquad (11)$$

где ρ, k — соответственно плотности электрического заряда и материи, так что $de = \rho d\tau$, $dm = kd\tau$, $\mathbf{V}_L$ — скорость электрических зарядов, $\mathbf{V}_m$ — скорость масс. Здесь интегралы могут быть распространены на произвольную область τ между двумя какими-либо моментами времени t_1 и t_2. Далее, имеется связь, требующая обращения в нуль всех вариаций на границах области τ и для двух моментов времени t_1 и t_2.

Кроме этих условий, вариации величин φ и $\mathbf{u}$ полностью произвольны. Напротив, на вариации x, y, z, рассматриваемых как координаты элемента заряда или массы, наложены дальнейшие условия, отражающие связи частной, изучаемой в данный момент проблемы. Записав, что $dW = 0$ для произвольной вариации $\delta\varphi$, найдем

$$0 = -\iint\left(\mathrm{grad}\,\varphi - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right)\delta\,\mathrm{grad}\,\varphi\,\frac{dt\,d\tau}{\sqrt{a}} + \iint\delta\varphi\rho\,dt\,d\tau.$$

Преобразуя первый интеграл с помощью теоремы Гаусса и учитывая, что $\delta\varphi$ обращается в нуль на границах, находим

$$0 = \iint\delta\varphi\left\{\rho + \mathrm{div}\left[\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\mathrm{grad}\,\varphi - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right)\right]\right\}dt\,d\tau.$$

И поскольку вариация $\delta\varphi$ произвольна, сразу имеем уравнение

$$\rho + \operatorname{div}\left[\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right)\right] = 0. \tag{12}$$

Аналогичным образом при варьировании $\mathbf{u}$ находим

$$\rho \mathbf{V}_L + \operatorname{rot}(\sqrt{a}\operatorname{rot}\mathbf{u}) - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right)\right] = 0. \tag{13}$$

Последние два уравнения позволяют определить электромагнитное поле, если заданы заряды и их движение.

Можно найти и другую группу уравнений варьированием траекторий зарядов и масс в выражении для W. Пусть δP_M — вариация траекторий масс, δP_L — вариация траекторий зарядов. Далее, обозначим через $(\partial \mathbf{u}/\partial P)\mathbf{V}$ вектор с компонентами

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} V_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} V_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} V_z$$

и т. д., где $\mathbf{u}$ — вектор функции точки и $\mathbf{V}$ — некоторый вектор. Приравнивая нулю вариацию W, обычными методами находим

$$\iiint\left\{\delta P_L \operatorname{grad}\varphi - \delta P_L + \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial P}\mathbf{V}_L\right] + \mathbf{V}_L \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial P}(\delta P_L)\right\}\rho\, dt d\tau +$$

$$+ \iint \delta P_M \left\{\frac{dt}{ds}\frac{\operatorname{grad} a}{2} + \frac{d}{dt}\left(\frac{dt}{ds}\mathbf{V}_M\right)\right\} k dt d\tau = 0. \tag{14}$$

Если вариации δP в данный момент времени не зависят от их значений для других моментов времени, то коэффициент при dt в (14) будет равен нулю. Таким образом, найдем уравнение

$$\int\left\{\delta P_L \cdot \operatorname{grad}\varphi - \delta P_L\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial P}\mathbf{V}_L\right] + \mathbf{V}_L \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial P}\,\delta P_L\right\}\rho\, d\tau +$$

$$+ \int \delta P_M \cdot \left\{\frac{1}{2}\frac{dt}{ds}\operatorname{grad} a + \frac{d}{dt}\left(\frac{dt}{ds}\mathbf{V}_M\right)\right\} k d\tau = 0, \tag{15}$$

которое должно быть справедливо для всех систем вариаций δP, удовлетворяющих связям.

К статьям 4 и 9

Результаты статей 1 и 2 озадачили Ферми, так как они противоречили друг другу если принять (как это требует общая теория относительности), что гравитационная и, инертная массы равны. Более того, найденное и Лоренцом, и Ферми значение ($^4/_3$) U/c^2 для инертной массы жесткой, сферически симметричной системы электрических зарядов не согласовалось с эйнштейновским принципом эквивалентности массы и энергии. Как теперь хорошо известно, множитель $^4/_3$ можно объяснить вкладом в тензор энергии, связанным с внутренними неэлектромагнитными натяжениями, существование которых надо принять для обеспечения равновесия зарядов. Однако это противоречие не объяснялось в книгах, известных Ферми (очевидно, он проглядел такое объяснение в книге М. Лауэ Die Relativitätstheorie, I, 3 ed., 1919, p. 218), и он нашел собственное объяснение, по существу эквивалентное упомянутому, но полученное с помощью вариационного метода Вейля.

Как вспоминает проф. Полвани, этот вопрос обсуждался одним зимним вечером 1922 г. в Пизе, когда Ферми, Пуччанти, Полвани и другие шли по улице Сан-Фредиано от университета к Высшей нормальной школе. Там компания рассталась, не придя ни к какому удовлетворительному заключению. Последующие два дня Ферми не появлялся в Институте физики, а на третий день пришел с готовой для публикации статьей, озаглавленной «Исправление серьезного разногласия...».

Этот результат, которым Ферми особенно гордился, был опубликован им с незначительными изменениями в трех различных журналах. В дальнейшем Ферми в сотрудничестве с Понтремоли (молодым физиком, тогда ассистентом в Римском университете, впоследствии трагически погибшим в полярной экспедиции Нобиле 1928 г.) применил этот метод к вычислению массы излучения, содержащегося в полости с отражающими стенками; для этой массы Абрагам и другие нашли выражение, содержащее тот же самый множитель $^4/_3$ (см. статью 9).

Э. Персико

4

РАЗРЕШЕНИЕ СУЩЕСТВУЮЩЕГО ПРОТИВОРЕЧИЯ МЕЖДУ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ И РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИЯМИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ МАССЫ*[1]

§ 1. Теория электромагнитной массы впервые была развита М. Абрагамом [2] еще до открытия теории относительности. Поэтому Абрагам в своих расчетах, естественно, рассматривал массу системы электрических зарядов, жестко связанных между собой в смысле классической механики. Он нашел, что при сферической симметрии системы ее масса зависит от скорости, причем для нулевых или очень малых скоростей она равна [3] $(^4/_3)\ u/c^2$ (где u — электростатическая энергия системы и c — скорость света). Для скоростей же v, сравнимых с c, появляются довольно сложные поправочные члены порядка v^2/c^2. Еще до теории относительности Фицджеральд ввел гипотезу о том, что твердые тела испытывают сокращение в направлении их движения в отношении

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}:1,$$

и Лоренц переработал теорию электромагнитной массы Абрагама, рассмотрев теперь системы, испытывающие это сокращение, а не системы электрических зарядов, жестко связанных в смысле классической механики. Лоренц нашел, что масса покоя (т. е. предел массы для нулевых скоростей) по-прежнему равна $(^4/_3)\ u/c^2$, а поправочные члены, зависящие от v^2/c^2, изменились. Опыты Кауфмана, Бухерера и других, исследовавших массу частиц α-радиоактивных тел и катодных частиц большой скорости, определенно говорили в пользу так называемой теории «деформируемого» электрона Лоренца и против теории «твердого» электрона Абрагама. Вначале это интерпретировалось как доказательство исключительно электромагнитной природы массы электрона, так как считалось, что иначе их масса

---

* *Correzione di una contraddizione tra la teoria elettrodinamica e quella relativistica delle masse elettromagnetiche.* Nuovo Cimento, 1923, **25**, 159—170.

[1] Относительно этого вопроса см. две работы: E. Fermi. Rend. Lincei (5), 1922, 31, 184, 306. [Статья Б5б].

[2] Abraham. Theorie der Elektricität; Richardson. Electron Theory of Matter, Chap. XI; Lorentz. The Theory of Electrons, p. 37.

[3] Обычно говорят, что электромагнитная масса равномерно заряженного сферического слоя с общим зарядом e и радиусом r равна $\frac{2}{3}\frac{e^2}{rc^2}$; если же заметить, что электростатическая энергия $u=\frac{1}{2}\frac{e^2}{r}$, то для массы находим как раз $(^4/_3)\ u/c^2$.

должна была бы быть постоянна. Впоследствии появление теории относительности привело к тому взгляду, что все массы как электромагнитной, так и другой природы должны зависеть от скорости, равно как и масса деформируемого электрона Лоренца. Таким образом, указанные опыты оставляли открытым вопрос о том, полностью ли электромагнитна масса электрона, и представляли собой лишь подтверждение теории относительности. С другой стороны, специальная теория относительности, не говоря уже об общей теории относительности, привела к необходимости приписать системе с энергией u массу u/c^2; итак, возникло серьезное разногласие между электродинамической теорией Лоренца, которая приписывает сферическому распределению электрического заряда массу покоя $(^4/_3)\ u/c^2$, и теорией относительности, согласно которой соответствующая масса равна u/c^2. Такое разногласие [4] представляется особенно серьезным, если учесть большую важность понятия электромагнитной массы как основы электронной теории материи.

Это разногласие показалось мне особенно острым в двух недавних работах [5], в одной из которых, рассматривая электромагнитные массы систем с произвольной симметрией на основании обычных электромагнитных теорий, я нашел, что вообще массы представляются не скалярами, а тензорами, естественно переходящими в $(^4/_3)\ u/c^2$ при сферической симметрии. Исходя из общей теории относительности, в другой работе я рассмотрел вес тех же самых систем и нашел его во всех случаях равным $(u/c^2)G$ (где G — гравитационное ускорение).

В настоящей работе мы покажем, что различие значений массы, полученных двумя способами, обусловлено противоречащим принципу относительности понятием жесткости, которое используется в электродинамической теории (даже в теории деформируемого электрона). Эта концепция приводит к массе $(^4/_3)\ u/c^2$, в то время как более обоснованное, согласующееся с теорией относительности понятие абсолютно твердого тела приводит к значению u/c^2.

Заметим еще, что релятивистская динамика электрона была развита М. Борном [6], который, однако, воспользовавшись точкой зрения, по существу не отличающейся от обычной, естественно, нашел для массы покоя $(^4/_3)\ u/c^2$.

В наших рассуждениях мы берем за основу принцип Гамильтона как наиболее удобный для решения задачи, в которой связи довольно сложны. Действительно, наша система электрических зарядов должна иметь связи совсем иного типа, чем связи, рассматриваемые в обычной механике (вследствие принципа относительности система, в зависимости от своей

---

[4] Опыты Кауфмана и других, естественно, не помогают решению вопроса о том, какой из двух результатов является правильным. На самом деле они позволяют определить только зависящие от скорости поправочные члены, которые одинаковы в обеих теориях (отличие же существует в значениях масс покоя).

[5] E. Fermi. Nuovo Cimento, 1921, VI, **22**, 176, 199. (Статьи 2 и 1.)

[6] M. Born. Ann. d. Phys., 1909, **30**, 1.

скорости, будет испытывать лоренцово сокращение). Однако, во избежание недоразумений, сразу заметим, что хотя сокращение Лоренца имеет порядок v^2/c^2, его влияние на электромагнитную массу касается ее основных членов (т. е. массы покоя). Поэтому оно ощутимо даже при очень низких скоростях.

§ 2. Итак, рассмотрим систему электрических зарядов, находящихся в абсолютно твердом диэлектрике. Предположим, что под действием электромагнитного поля, обусловленного частично самой системой, частично же внешними причинами, система находится в состоянии поступательного движения, описывая в пространстве-времени [7] мировую трубку.

Сформулируем точно, что именно следует понимать под поступательным движением абсолютно твердого тела. Для этого рассмотрим некоторую систему отсчета Лоренца — Эйнштейна и предположим, что в данный момент времени для нее одна точка системы зарядов имеет скорость, равную нулю; мы будем называть движение поступательным, если для этого момента времени в той же самой системе отсчета все точки нашей системы зарядов имеют скорость, равную нулю. Это равносильно утверждению, что мировые линии точек нашей системы суть траектории, ортогональные семейству линейных пространств. И действительно, в системе отсчета Лоренца — Эйнштейна, в которой пространство является одним из пространств семейства и временнáя ось, естественно, перпендикулярна ему, вся система находится в покое в нулевой момент времени, поскольку пространство ортогонально пересекает мировые линии всех точек системы. При таком определении поступательного движения, по существу принятом М. Борном, жесткость системы выражается тем фактом, что ее форма в этих пространствах, перпендикулярных трубке, остается неизменной, т. е. все нормальные сечения трубки равны друг другу.

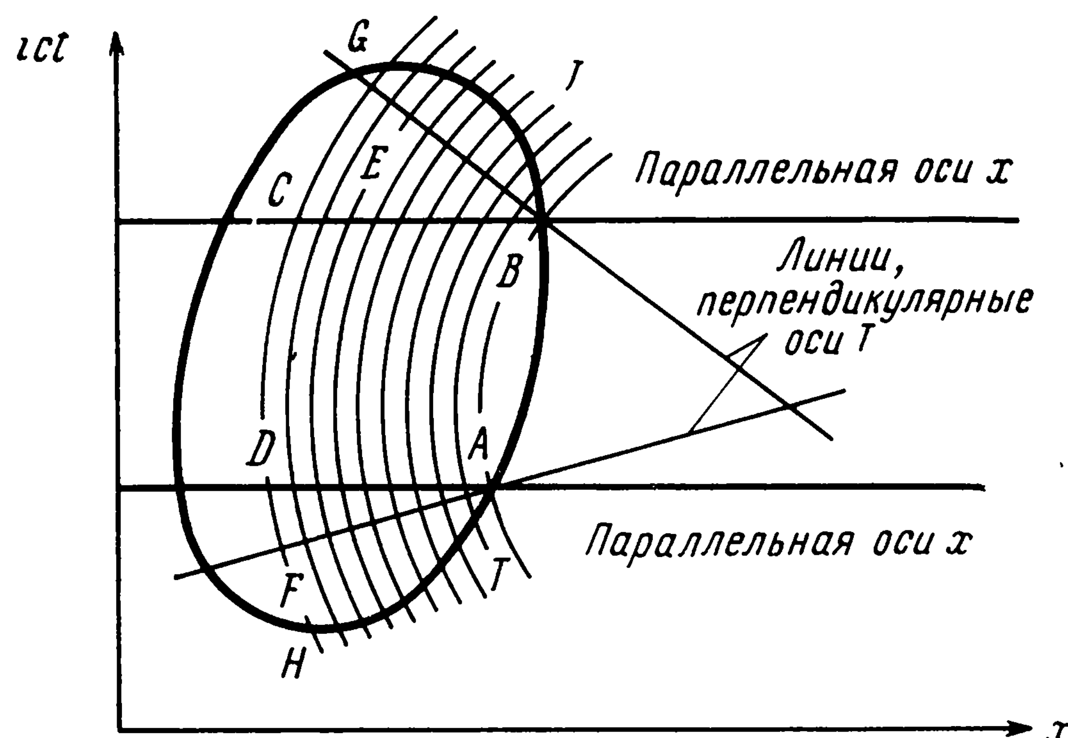
Чтобы применить к нашему случаю принцип Гамильтона, необходимо знать вариацию движения нашей системы, удовлетворяющую связям данной задачи, т. е. правильно интерпретируемой жесткости. Далее мы покажем, что для электромагнитной массы получается значение $(^4/_3)\ u/c^2$ или u/c^2, в зависимости от того, какая из двух ниже иллюстрируемых (и обозначенных буквами А и В) вариаций принимается. Сразу же будет видно, что вариацию А не следует принимать во внимание, поскольку она противоречит принципу относительности. Пусть Т — мировая трубка, описанная системой. На рисунке пространство (x, y, z) представлено только одним измерением — осью x, и вместо времени t используется ict, чтобы иметь определенную метрику.

Вариация А. В качестве вариации, удовлетворяющей жесткой связи, рассматривается бесконечно малое смещение, жесткое в обычном кинема-

---

[7] Далее пространство — время считается эвклидовым, поскольку подразумевается, что рассматриваемые электромагнитные поля недостаточно сильны для того, чтобы заметно изменить его метрическую структуру.

тическом смысле; это смещение каждого сечения трубки, параллельного пространству (x, y, z), является параллельным этому пространству. Такую вариацию получим, смещая параллельно оси x (см. рисунок) каждое сечение t = const трубки на произвольный бесконечно малый отрезок. Если мы ограничимся трансляционными смещениями, то δx, δy, δz — произвольные функции только времени, а $\delta t = 0$.



Вариация B. В качестве вариации, удовлетворяющей жесткой связи рассматривается бесконечно малое и жесткое в обычном кинематическом смысле смещение каждого нормального сечения трубки, перпендикулярное самой трубке. На рисунке такую вариацию получим, смещая каждое нормальное сечение трубки параллельно самому себе на произвольный отрезок.

Из этих двух вариаций A *явно противоречит принципу относительности*; ее можно не принимать во внимание, поскольку она даже неинвариантна относительно преобразований Лоренца и на самом деле определяется самой выбранной системой отсчета (x, y, z); она никак не может быть выражением физических понятий, таких, как понятие абсолютно твердого тела. Напротив, вариация B явно удовлетворяет указанному условию инвариантности; кроме того, поскольку она зависит только от элементов трубки T, полностью независимых от положения осей системы отсчета, только она и будет естественной. Действительно, она основывается на соответствующем понятию абсолютно твердого тела виртуальном смещении в такой системе отсчета, по отношению к которой в рассматриваемый момент времени скорость системы зарядов равна нулю. Поверхностно рассуждая, можно было бы думать, что вариации A и B приводят к существенно различным следствиям только при больших скоростях, т. е. когда трубка T составляет значительный угол с временнóй осью. Но расчеты, которые мы будем развивать, сразу покажут, что разница сущест-

венна уже для нулевых скоростей и что А дает для электромагнитной массы $(^4/_3)\ u/c^2$, в то время как В дает u/c^2.

§ 3. Обозначим через (t, x, y, z), или (x_0, x_1, x_2, x_3), координаты времени и пространства; при этом выбор обозначений определяется только соображениями удобства. Пусть φ_i — четырехмерный потенциал и

$$F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$$

— электромагнитное поле, а **E** и **H** — напряженности электрического и магнитного полей, соответствующие ему.

Принцип Гамильтона, суммирующий законы Максвелла — Лоренца и законы механики, гласит [8], что суммарное действие, т. е. сумма действий электромагнитного поля и «материальных» и электрических масс не меняется в результате произвольной вариации φ_i и координат точек мировых линий электрических зарядов, которая соответствует связям и равна нулю на границе области интегрирования. В нашем случае «материальных» масс нет, и единственные величины, которые подвергаются варьированию, суть координаты точек мировых линий зарядов; поэтому достаточно рассмотреть только действие электрических зарядов, т. е.

$$W = \sum_i \int de \int \varphi_i dx_i.$$

Здесь de — элемент электрического заряда, и второй интеграл должен быть взят по такому отрезку описанной de мировой линии, который находится внутри четырехмерной области G интегрирования. Поэтому для каждой системы вариаций δx_i, соответствующих связям и *обращающихся в нуль на границе* G, должно быть $\delta W = 0$, т. е.

$$\sum_{ik} \iint de F_{ik} \delta x_i dx_{ik} = 0. \qquad (1)$$

Теперь необходимо рассмотреть по отдельности результаты, которые получаются при подстановке значений δx_i, следующих из вариаций типа А или В.

§ 4. **Следствия вариаций типа А.** В этом случае область интегрирования сводится просто к ABCD. И действительно, области BCG, ADH не дают никакого вклада, поскольку все δx_i в них равны нулю; это происходит оттого, что на контуре G, и поэтому на пути BG, AH величины δx_i должны быть равны нулю, а для постоянного t, т. е. на линиях, параллель-

[8] W e y l. Raum, Zeit, Materie. Berlin, Springer, 1921, p. 194—196.

ных оси x, они должны иметь постоянное значение. Если через t_1 и t_2 обозначить моменты времени, соответствующие A и B, то выражение (1) можно записать следующим образом:

$$\sum_{ik}\int_{t_1}^{t_2} dt\delta x_i \int deF_{ik}\frac{dx_k}{dt} \qquad (i=1, 2, 3), \qquad (k=0, 1, 2, 3)$$

($\delta t = 0$, а δx, δy, δz — функции только времени).

Поскольку δx_i — произвольные функции t, получим три уравнения

$$\int de \sum_k F_{ik}\frac{dx_k}{dt} = 0,$$

т. е.

$$\int de \left[E_x + \frac{dy}{dt}H_z - \frac{dz}{dt}H_y\right] = 0$$

и два аналогичных соотношения.

Если в рассматриваемый момент времени скорость нашей системы в системе отсчета (t, x, y, z) равна нулю, то три соотношения сводятся к единственному векторному соотношению

$$\int \mathbf{E}\, de = 0. \qquad (2)$$

К этому равенству мы пришли бы и без расчетов, если, как это делается при обычном подходе, а также по существу и в цитированной работе М. Борна, предположить априори, что полная сила, действующая на систему, равна нулю. Нам же хотелось получить равенство (2) из принципа Гамильтона, чтобы вскрыть его «врожденный» порок, обусловленный тем, что оно следует из вариаций типа A, которые противоречат принципу относительности. Из соотношения (2) сразу следует величина $(^4/_3)\ u/c^2$ для электромагнитной массы. Действительно, предположим, что $\mathbf{E}$ суть сумма поля $\mathbf{E}^{(i)}$, обусловленного самой системой, и однородного поля $\mathbf{E}^{(e)}$, обусловленного внешними причинами. Соотношение (2) дает

$$\int \mathbf{E}^{(i)} de + \mathbf{E}^{(e)}\int de = 0.$$

Здесь $\int de = e$ — заряд, поэтому $\mathbf{E}^{(e)}\int de = \mathbf{F}$ — внешняя сила. С другой стороны, в случае сферической симметрии как прямые расчеты, так и хорошо известные рассуждения об электромагнитном импульсе [9] показывают, что

$$\int \mathbf{E}^{(i)} de = -\frac{4}{3}\frac{u}{c^2}\mathbf{\Gamma},$$

где $\mathbf{\Gamma}$ — ускорение.

---

[9] Richardson. Цит. соч.

Предыдущее уравнение сводится тогда к

$$\mathbf{F} = \frac{4}{3}\frac{u}{c^2}\,\mathbf{\Gamma};$$

если сравнить это уравнение с основным законом динамики точки $\mathbf{F} = m\mathbf{\Gamma}$, получим

$$m = \frac{4}{3}\frac{u}{c^2}.$$

§ 5. **Следствия вариаций типа В.** В этом случае рассуждения предыдущего параграфа показывают, что область интегрирования сводится к ABEF, т. е. к области, заключенной между двумя нормальными сечениями трубки Т. Разложим эту область на бесконечное число слоев бесконечно малой толщины; чтобы рассчитать вклад одного из этих слоев в интеграл (1), воспользуемся его покоящейся системой отсчета, принимая пространство (x, y, z) параллельным слою. Тогда для него $\delta t = 0$, в то время как δx, δy, δz будут произвольными константами. Кроме того, $dx = dy = dz = 0$, поскольку скорость всех точек равна нулю, а dt, равное высоте слоя, будет изменяться от точки к точке, так как слой имеет в качестве оснований два нормальных, в общем случае не параллельных, сечения. Если О — произвольная, но определенная точка слоя, например начало координат, где dt принимает значение dt_0, а $\mathbf{K}$ — вектор, направленный по главной нормали к мировой линии, проходящей через О, и с модулем, равным ее кривизне, то ясно, что

$$dt = dt_0\,[1 - \mathbf{K}\cdot(\mathrm{P} - \mathrm{O})],$$

где dt — толщина слоя в точке Р.

Поскольку скорость равна нулю, имеем просто

$$\mathbf{K} = -\mathbf{\Gamma}/c^2,$$

и поэтому

$$dt = dt_0\left(1 + \frac{\mathbf{\Gamma}\cdot(\mathrm{P} - \mathrm{O})}{c^2}\right).$$

Подставляя эти значения, находим, что вклад такого слоя в интеграл (1) равен

$$-dt_0\left\{\delta x\int\left(1 + \frac{\mathbf{\Gamma}\cdot(\mathrm{P} - \mathrm{O})}{c^2}\right)E_x de + \delta y\int\left(1 + \frac{\mathbf{\Gamma}\cdot(\mathrm{P} - \mathrm{O})}{c^2}\right)E_y de + \right.$$
$$\left. + \delta z\int\left(1 + \frac{\mathbf{\Gamma}\cdot(\mathrm{P} - \mathrm{O})}{c^2}\right)E_z de\right\}.$$

Это выражение должно обращаться в нуль для всех значений δx, δy, δz, и поэтому из него получаются три соотношения, которые сводятся к

единственному векторному

$$\int \left(1 + \frac{\mathbf{\Gamma}\cdot(\mathrm{P} - \mathrm{O})}{c^2}\right) \mathbf{E}\, de = 0. \tag{3}$$

Итак, правильное применение принципа Гамильтона привело нас к соотношению (3) вместо соотношения (2). Теперь очень легко проанализировать следствия. Полагая

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(i)} + \mathbf{E}^{(e)},$$

находим

$$\int \mathbf{E}^{(i)} de + \int E^{(i)} \frac{\mathbf{\Gamma}\cdot(\mathrm{P} - \mathrm{O})}{c^2} de + e\mathbf{E}^{(e)} + \mathbf{E}^{(e)} \int \frac{\mathbf{\Gamma}\cdot(\mathrm{P} - \mathrm{O})}{c^2} de = 0.$$

В случае сферической симметрии по-прежнему имеем

$$\int \mathbf{E}^{(i)} de = -\frac{4}{3} \frac{u}{c^2} \mathbf{\Gamma};$$

подставляя это выражение в предыдущее, находим, что $\mathbf{E}^{(e)}$ выражается только через члены, содержащие $\mathbf{\Gamma}$. Поэтому, если пренебрегать членами [10], содержащими $\mathbf{\Gamma}^2$, то последним интегралом также можно пренебречь; так что получим

$$-\frac{4}{3} \frac{u}{c^2} \mathbf{\Gamma} + \int \mathbf{E}^{(i)} \frac{\mathbf{\Gamma}\cdot(\mathrm{P} - \mathrm{O})}{c^2} de + \mathbf{F} = 0. \tag{4}$$

Чтобы вычислить интеграл в соотношении (4), заметим, что $\mathbf{E}^{(i)}$ суть сумма силы Кулона

$$\int \frac{\mathrm{P} - \mathrm{P}'}{r^3} de'$$

P' — точка с зарядом de' и $r = \mathrm{PP}'$) и члена, содержащего $\mathbf{\Gamma}$, которым можно пренебречь (поскольку он дал бы вклад порядка $\mathbf{\Gamma}^2$). Тогда наш интеграл становится:

$$\iint \frac{\mathrm{P} - \mathrm{P}'}{r^3} \frac{\mathbf{\Gamma}\cdot(\mathrm{P} - \mathrm{O})}{c^2} de de'.$$

или, заменив P на P' (что ничего не изменяет) и взяв полусумму двух полученных таким образом значений,

$$\frac{1}{2} \iint \frac{\mathrm{P} - \mathrm{P}'}{c^2 r^3} [\mathbf{\Gamma}\cdot(\mathrm{P} - \mathrm{P}')]\, de de'.$$

---

[10] Точнее, число, квадратом которого пренебрегается, равно $\mathbf{\Gamma}\, l/c^2$, где l — максимальная длина, существенная для данной задачи. Очевидно, что такое приближение в обычных случаях более чем оправданно.

Заметим, что для всех точек в нашем приближении Γ — константа и поэтому ее можно вынести из-под знака интеграла. Следовательно, x-компонента предыдущего интеграла есть

$$\frac{1}{2c^2}\left\{\Gamma_x \iint \frac{(x-x')^2}{r^3}\,dede' + \Gamma_y \iint \frac{(y-y')(x-x')}{r^3}\,dede' + \right.$$
$$\left. + \Gamma_z \iint \frac{(z-z')(x-x')}{r^3}\,dede'.\right.$$

Далее, поскольку система обладает сферической симметрией, каждому отрезку PP' соответствует бесконечное число других отрезков, отличающихся только ориентацией. Тогда в трех интегралах мы можем заменить

$$(x-x')^2, \qquad (x-x')(y-y'), \qquad (x-x')(z-z')$$

их средними значениями для всех возможных ориентаций PP':

$$\frac{1}{3}r^2, \quad 0, \quad 0.$$

При этом x-компонента становится равной

$$\frac{\Gamma_x}{3c^2}\,\frac{1}{2}\iint \frac{dede'}{r}.$$

Теперь заметим, что выражение

$$\frac{1}{2}\iint \frac{dede'}{r}$$

есть не что иное, как электростатическая энергия u; возвращаясь к векторным обозначениям, найдем, что интеграл, входящий в соотношение (4), равен $(u/3\,c^2)\,\mathbf{\Gamma}$. Итак, соотношение (4) принимает вид

$$\frac{u}{c^2}\,\mathbf{\Gamma} = \mathbf{F}. \qquad (5)$$

Отсюда сразу видно, что электромагнитная масса равна u/c^2.

К статье 5

Статья 5 представляет собой комментарий, написанный Ферми для книги по теории относительности.

Эта маленькая статья Ферми была выбрана редакцией потому, что в ней можно найти много элементов его подхода к научным проблемам.

Во-первых, я хотел бы упомянуть характерную для Ферми осторожность, с которой он относится даже к довольно общепринятым понятиям. Я имею в виду, например его фразу: «Есть основания предполагать, что ядро атома гелия состоит из четырех ядер атома водорода». Эта осторожность, как мы сегодня знаем, оказалась вполне обоснованной. Во-вторых, уже из этой статьи явно виден особый интерес Ферми к той физике, «которая находится рядом с нами в лаборатории». Действительно, почти все работы Ферми, даже самые абстрактные, были вызваны вполне конкретными соображениями, и пока область науки не была тесно связана с экспериментом, Ферми не испытывал к ней особой симпатии. В-третьих, в этой статье есть ряд замечательных высказываний Ферми по поводу будущего развития применений соотношения Эйнштейна между массой и энергией, которые потрясают своим пророческим духом.

Б. Понтекорво

5

МАССА В ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ *

Громадное значение теории относительности, давшей более глубокое понимание связи между пространством и временем, а также живые и часто бурные дискуссии, порожденные ею даже вне чисто научных кругов, быть может, отвлекли внимание от другого результата, который является, правда, менее шумным и менее парадоксальным, но имеет для физики не менее замечательные следствия. Весьма правдоподобно, что значимость этого результата будет возрастать с развитием науки.

Результат, о котором идет речь, состоит в открытии соотношения, связывающего массу тела с его энергией. Масса тела, утверждает теория относительности, равна его полной энергии, деленной на квадрат скорости света. Уже поверхностное рассмотрение показывает нам, что важность этого соотношения между массой и энергией, по крайней мере для той физики, которая находится рядом с нами в лаборатории, такова, что она в значительной степени затмевает значение других следствий, с количественной точки зрения несущественных, но осмысливание которых происходит с бо́льшим трудом. Пример: тело метровой длины, движущееся с довольно приличной скоростью 30 *км/сек* (это приблизительно скорость движения Земли), представлялось бы такой же метровой длины наблюда-

---

* *Le masse nella teoria della relatività.* Из приложений к книге A. K o p f f. I fondamenti della relatività Einsteiniana. Hoepli, Milano, 1923, p. 342—344.

телю, движущемуся вместе с ним, в то время как наблюдателю, находящемуся в покое, оно казалось бы на 5 миллионных долей миллиметра короче; как видно, этот результат, хотя он и странен и парадоксален, все-таки довольно мал по величине, и нет опасности, что эти наблюдатели устроят драку из-за таких пустяков. Но соотношение между массой и энергией ведет нас прямо к грандиозным числам. Например, если бы удалось освободить энергию, содержащуюся в грамме материи, то выделенная энергия была бы больше энергии, необходимой для непрерывной работы в течение трех лет мотора мощностью 1000 лошадиных сил (комментарии излишни!). Можно справедливо возразить, что найти способ освобождения таких чудовищных количеств энергии вряд ли удастся, по крайней мере в ближайшем будущем. Кстати, можно только надеяться, что этого не произойдет, так как мгновенное выделение такого ужасного количества энергии привело бы в качестве первого результата к разрыву на мелкие кусочки того несчастного физика, который нашел бы этот способ.

Но даже если такой полный «взрыв» материи пока не представляется возможным, все-таки в течение нескольких лет уже выполняются опыты, целью которых является превращение одного химического элемента в другой. Такое превращение, происходящее в природных условиях с радиоактивными телами, недавно было получено также искусственно Резерфордом, которому удалось вызвать расщепление атомов, бомбардируя их альфа-частицами, т. е. частицами, испускаемыми с огромной скоростью радиоактивными веществами. И вот оказывается, что с этими превращениями элементов друг в друга связан обмен энергией, который нам теперь очень просто изучать с помощью соотношения между массой и энергией. Для иллюстрации приведем численный пример. Есть основания предполагать, что ядро атома гелия состоит из четырех ядер атома водорода. Далее, атомный вес гелия равен 4,002, в то время как водорода — 1,0077. Поэтому разница между учетверенной массой водорода и массой гелия обусловлена энергией связи между четырьмя ядрами водорода в ядре гелия. Эта разница равна 0,029, и, согласно релятивистскому соотношению между массой и энергией, соответствует энергии порядка 6 миллиардов калорий на грамматом гелия. Эти числа показывают, что энергии связи ядер в миллионы раз больше, чем энергии самых сильных химических связей; они объясняют также, почему в течение многих столетий были бесплодными попытки лучших умов осуществить мечту алхимиков — превращение вещества и почему только сейчас человеку удалось осуществить это превращение, используя самые энергичные средства, находящиеся в нашем распоряжении. Кстати, количество превращаемого вещества здесь настолько мало, что самый деликатный анализ может его не обнаружить.

Эти краткие замечания в достаточной мере показывают, что теория относительности, уже давшая ясную интерпретацию связи между пространством и временем, быть может, в ближайшем будущем послужит также ключом для решения проблемы строения вещества — последней и самой трудной проблемы физики.

К статье 6

Эта статья содержит результаты первой экспериментальной работы Ферми, которую он представил как дипломную работу при окончании [Пизанского университета летом 1922 г. Нижеследующие заметки описывают его деятельность на физическом факультете этого университета.

Для незнакомых с постановкой преподавания в итальянских университетах следует пояснить, что студент-физик к концу второго года обучения приобретает достаточно знаний по общей физике, чтобы его статус на факультете стал похож на статус аспиранта в американском университете. Затем он слушает курсы повышенного типа и занимается исследовательской работой, часто в той области, в которой он позже будет готовить дипломную работу.

Итак, осенью 1920 г. три студента — Энрико Ферми, Нелло Каррара и Франко Разетти — были допущены на физический факультет Пизанского университета. Из-за недавно окончившейся первой мировой войны студентов постарше с таким статусом не было, так что три 19-летних студента представляли тогда всю группу «аспирантов». Проф. Луиджи Пуччанти, директор физической лаборатории, предоставил им свободу действий до такой степени, которая редко выпадает на долю студентов в Италии или где-нибудь еще. Им было разрешено в любое время использовать исследовательские лаборатории; им были выданы ключи от библиотеки и лабораторных комнат, было дано разрешение ставить любой пришедший им в голову эксперимент на имеющемся оборудовании. Каррара и Разетти, которые за предшествующий год признали огромное превосходство Ферми в знании математики и физики, считали его с этого времени своим естественным руководителем и обращались к нему, а не к профессорам, за инструкциями и советами.

Мы провели несколько счастливых недель, открывая все комнаты, строя предположения о возможном назначении оборудования и иногда пытаясь ставить простые эксперименты. Выяснилось, что лаборатория лучше всего оборудована для исследований по спектроскопии — области, в которой проф. Пуччанти сделал много важных работ. Имелось также некоторое рентгеновское оборудование, предназначенное, впрочем, для лекционных демонстраций, а не для исследований.

Ферми, перечитав литературу по этому предмету, пришел к выводу, что наилучшие возможности для оригинальных исследований открываются в области рентгеновских лучей, и предложил, чтобы все мы познакомились с методикой. В нашем распоряжении имелись рентгеновские трубки газонаполненного типа, которые работали с большой индукционной катушкой и разрядным промежутком в качестве выпрямителя. Первой задачей, поставленной Ферми перед группой, было получение лауэграмм; после нескольких попыток и неудач цель была достигнута. Хотя из-за плохой коллимации пучка и неточного ориентирования кристалла лауэграмма вышла довольно-таки скверной, три студента восторгались этим результатом.

Вскоре выяснилось, что имевшиеся трубки не годились для исследований, и экспериментаторы решили построить свои собственные трубки. Стеклянные части были изготовлены стеклодувом, а физики должны были запаивать окошки и электроды. Диффузионных насосов не было, так что трубки приходилось откачивать с помощью насосов типа Геде. Ушло много времени, пока эти трубки заработали удовлетворитель-

но, но в конце концов K-линии нескольких элементов были-таки наблюдены с помощью брэгговского отражения.

В начале 1922 г. Ферми решил выполнить самостоятельную работу с помощью рентгеновской методики, чтобы подготовить диплом. К этому времени он опубликовал, или во всяком случае закончил, несколько важных теоретических статей, так что можно спросить, почему же он не представил теоретическую работу. Следует пояснить, что в то время в Италии теоретическая физика не признавалась за дисциплину, достойную преподавания в университетах, и поэтому диплом в этой области шокировал бы по крайней мере более пожилых профессоров. Физики были, по существу, экспериментаторами, и только эксперимент мог сойти за физику. Ближайший к теоретической физике предмет — механика преподавалась математиками как раздел прикладной математики с полным пренебрежением ее физическими следствиями. Все это объясняет, почему такие разделы, как квантовая механика, не завоевали прочного плацдарма в Италии: они лежали на «ничейной земле» — между физиками и математиками. Ферми первым в Италии вступил на эту землю.

Однако у меня нет ни малейшего сомнения в том, что экспериментаторская деятельность Ферми на третьем и четвертом курсах университета не вызывалась удобством представления приемлемой дипломной работы. Он самым очевидным образом наслаждался работой экспериментатора, равно как и теоретическими абстракциями, а больше всего — сменой этих видов деятельности. С самого начала он был законченным физиком, для которого и теория, и эксперимент были одинаково притягательны, хотя в течение многих лет его известность основывалась главным образом на теоретических работах. Но он никогда не был таким теоретиком, который (пользуясь шутливым выражением, широко употреблявшимся позже в римской группе) «не может отличить сталь от алюминия».

В нижеследующей статье описывается экспериментальное осуществление предложенного Гуи метода получения изображений в монохроматических рентгеновских лучах с помощью изогнутого кристалла. Изогнутые кристаллы использовались на заре рентгеновской спектроскопии в качестве замены метода вращающегося кристалла, но эксперименты Ферми и независимые опыты Дадора (M. R. D a d o r d. Journ. Phys. et Rad. 1922,3, 218) были первыми, в которых было достигнуто фокусирование. В последующие десятилетия спектрометры с фокусировкой на изогнутом кристалле приобрели большое значение.

Ф. Разетти

Дипломная работа Ферми помимо экспериментальной части (статья 6) содержала также обзор по рентгеновским лучам, который послужил основой статьи в «Nuovo Cimento» (см. работу [Б4]). Заметим, что поиски оригинала дипломной работы не увенчались успехом.

Б. Понтекорво

6

ОБРАЗОВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ РЕНТГЕНОВСКИХ ЛУЧЕЙ *

Рентгеновские лучи не испытывают ни преломления, ни отражения, по крайней мере, в обычном смысле этих слов, поскольку дифракционное отражение происходит только под определенными углами падения. Поэтому проблему получения изображения в оптике рентгеновских лучей нельзя решить при помощи линз или сферических зеркал, как в обычной оптике.

Гуи [1] указал на теоретическую возможность метода получения монохроматических рентгеновских изображений при помощи слюдяного цилиндра. Несколько слов об этом методе. Рассмотрим круглый слюдяной цилиндр и предположим, что в некой точке его оси находится источник S монохроматических рентгеновских лучей. Они будут отражаться от слюды в тех точках, для которых имеет место соотношение Брэгга; эти точки, очевидно, находятся на круговых сечениях цилиндра. Лучи, отраженные от некоторой окружности, очевидно, будут сходиться в одной точке I оси (симметричной точке S по отношению к плоскости отражающего круга), где появится реальное монохроматическое изображение точки S.

Если бы точка S находилась вблизи оси, то ее изображение появилось бы также вблизи оси [2]. Предположим теперь, что вблизи оси находится плоская фигура, из точек которой испускаются монохроматические рентгеновские лучи; пусть фотографическая пластинка находится в положении, где образуется изображение фигуры.

Пусть r — расстояние от зеркала до предмета, R — радиус слюдяного цилиндра, θ — брэггов угол падения, r' — расстояние от изображения до зеркала. При проектировании на плоскость, перпендикулярную оси слюдяного цилиндра, проекции r и r' будут равны $r\cos\theta$ и $r'\cos\theta$, и обычные формулы сферических зеркал дадут

$$\frac{1}{r\cos\theta}+\frac{1}{r'\cos\theta}=\frac{2}{R},$$

откуда

$$r'=\frac{Rr}{2r\cos\theta-R}.$$

---

* *Formazione di immagini coi raggi Röntgen*. Nuovo Cimento, 1923, 25, 63—68.

[1] C. R. Gouy. C. R., 1915, 161, 176.

[2] Конечно, при условии, что рассматривается достаточно малая область цилиндра, заключенная между его образующими.

Линейный коэффициент увеличения отрезков, перпендикулярных r и оси цилиндра, будет

$$\mu_1 = \frac{r'}{r} = \frac{R}{2r\cos\theta - R}. \qquad (1)$$

Если предмет находится вблизи оси, то μ_1 приблизительно равен единице.

Для расчета увеличения отрезков, параллельных плоскости, определенной осью и r, обозначим через φ и φ' соответственно те углы, которые образуют с r, r' перпендикуляры к плоскости предмета и плоскости фотопластинки соответственно.

Тогда сразу видно, что искомое увеличение будет

$$\mu_2 = \frac{\cos\varphi'}{\cos\varphi}. \qquad (2)$$

Представим теперь, что щель, расположенная перпендикулярно плоскости, определенной r и осью, фотографируется при помощи плоской слюдяной пластинки длины l. Если h — длина щели, то длина ее изображения будет $2l + h$. Если же мы изогнем слюду так, что изображение образуется в фокусе, то его длина становится равной h. Грубо говоря, интенсивности двух изображений будут обратно пропорциональны их длинам. Поэтому их отношение будет

$$\frac{2l + h}{h}.$$

Если, например, $h = 1$ *см*, $l = 4$ *см*, то это отношение равно 9, так что интенсивность увеличивается на порядок. Теперь я опишу метод, при помощи которого в действительности мне удалось получить эти изображения.

Источник рентгеновских лучей состоял из трубки, форма и размеры которой грубо показаны на рис. 1.

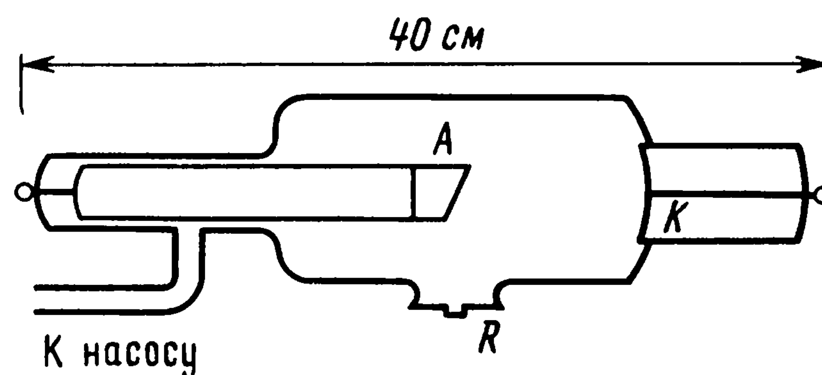


Рис. 1

Трубка откачивалась с помощью вращающегося насоса Качари (типа Геде). Катод K, радиусом 6—7 *см*, был вогнутым в том случае, когда я хотел по возможности больше сконцентрировать катодные лучи на антикатоде; если же мне хотелось, чтобы лучи попадали на всю поверхность антикатода, то делался катод меньшего радиуса. Антикатод, как правило,

был железным; иногда он разрезался почти перпендикулярно катодным лучам, так что в щели не было необходимости. В других же опытах антикатод был выбран в форме клюва флейты, так что для наблюдательных инструментов он представлял широкий источник. Поскольку характеристическое излучение железа значительно поглощается стенками, я нашел целесообразным снабдить трубку маленьким алюминиевым окошком R. Во время работы трубка откачивалась насосом, так что через некоторое время после начала откачки она работала в достаточно стационарном режиме. Трубка снабжалась довольно большой индукционной бобиной с прерывателем Венельта; в обычных условиях длина искры составляла 10—12 *см*.

Трубка была заключена в деревянный ящик, облицованный свинцом толщиной 6 *мм* с той стороны, где были расположены инструменты, и 3 *мм* — с других сторон.

Для получения приемлемой четкости изображений было необходимо, чтобы слюдяная отражающая пластинка по возможности была однородной. Поэтому она тщательно отбиралась из многочисленных образцов; и все-таки мне никогда не удавалось найти такую, которая при отражении света показалась бы более однородной, чем обычное оконное стекло. Этим обусловлены неоднородности и «усы», наблюдаемые в изображениях, о которых идет речь. Слюда изгибалась вокруг латунного цилиндра и плотно привязывалась к нему. Над выпуклой частью помещался слой сургуча толщиной около полусантиметра. Когда сургуч остывал, можно было отвязать слюду и освободить зеркало от цилиндра. Таким образом, мне удалось получить относительно точные цилиндрические зеркала (в пределах, обусловленных естественной неоднородностью пластинок). Большая часть их имела размеры 4×6 *см*^{2}, но обычно апертура ограничивалась до 4×2 *см*^{2} для того, чтобы использовать менее неоднородные части цилиндра, которые удалось найти, испытывая зеркала на отражение обычного света. Зеркало монтировалось на отградуированной вращающейся подставке. (Угол вращения был 16°50′ в случае наблюдения K_α-линии железа в третьем порядке.) Регистрация лучей производилась фотографически.

Вначале я выполнил некоторые предварительные опыты на плоских кристаллах, чтобы исследовать природу антикатода, а также интенсивность отражений разных порядков. Была найдена двойная линия $K_\alpha K_{\alpha'}$ (λ=1 932; 1 928), плохо разрешаемая в моих экспериментальных условиях, и линия K_β (λ = 1748). Линия K_γ была плохо видна из-за малой интенсивности. Самыми интенсивными порядками были первый и третий. Я предпочел работать с третьим, чтобы не использовать углы падения, слишком близкие к 90°.

Затем я испытал указанный метод получения изображений вначале на антикатоде, служащем также в качестве щели.

Расстояния от антикатода до кристалла и от кристалла до изображения менялись в пределах 18—22 *см*. Время экспозиции составляло около 10 минут.

Сразу же я констатировал очень сильное увеличение интенсивности. Общее впечатление об этом эффекте дают рис. 2, *1* и 2, *2*, представляющие собой две фотографии третьего порядка линии K_α железа, сделанные в приблизительно одинаковых условиях экспозиции и режима работы трубки; первая — с плоской слюдой, вторая — с искривленной. В том случае, когда использовались зеркала с апертурой 6 *см*, увеличение интенсивности становилось таким, что можно было ясно видеть изображение на экране из платиносинеродистого бария после того, как глаза привыкали к темноте. Из рис. 2, *2* явно видно, что интенсивность испускания центральной

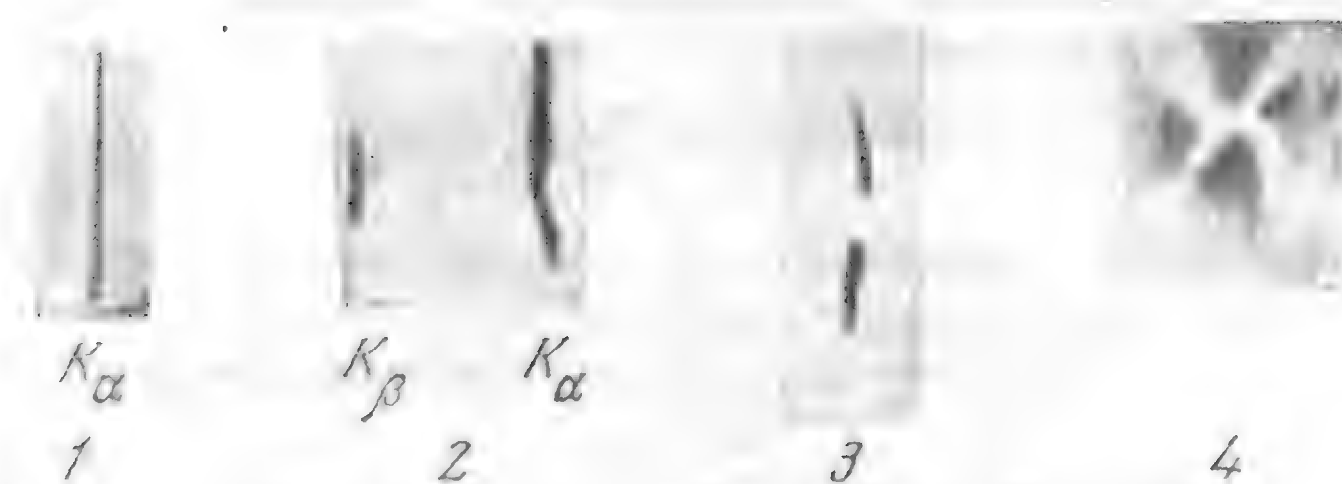


Рис. 2

части антикатода, где концентрировались катодные лучи, заметно выше, чем интенсивность краевых частей. Этот эффект ощущается, поскольку метод получения изображений позволяет наблюдать щель «а ля Локьер», т. е. наблюдать, что происходит в каждой точке щели. Чтобы яснее показать это, я сделал следующий опыт. Перед алюминиевым окошком трубки я поместил свинцовую нить диаметром около 1 *мм* и поставил фотографическую пластинку на место, где образовалось изображение алюминиевого окошка.

На рис. 2, *3* представлен результат этого опыта; ясно виден разрыв в изображении, образованный свинцовой нитью.

Наконец, была предпринята попытка получить изображение плоского предмета (рис. 2, *4*). Для этого железный антикатод изготовлялся в форме клюва флейты, на который наносились две бороздки в виде креста, в которые помещались две медные нити, так чтобы получалось нечто вроде *X*. На этом же рисунке видно изображение этого *X*, естественно, с многочисленными нерегулярностями, обусловленными неоднородностью зеркала.

Работа выполнена в Физическом институте Королевского университета в Пизе зимой 1922 г.

К статье 7

Отзыв

члена-корреспондента **Дж. Дж. Армеллини** (докладчик) и академика **Т. Леви-Чивиты** о работе доктора Энрико Ферми «О весе упругих тел»
(Заседание 7 января 1923 г.)

Автор рассматривает расположенное в эвклидовом пространстве упругое тело, находящееся в покое, причем все его внутренние напряжения равны нулю.

Затем он предполагает, что тело удаляется из эвклидова пространства и помещается в статическое эйнштейновское пространство, метрика которого определяется формулой, полученной проф. Леви-Чивитой

$$ds^2 = g_{00}dt^2 - \sum g_{ik}dx_i dx_k,$$

где g — функции только x. Автор вычисляет изменение удельной энергии вблизи любой точки упругого тела при переносе его из эвклидова в эйнштейновское пространство и показывает, что этому изменению соответствует изменение веса тела, не совпадающее по направлению с тяготением.

Однако поскольку использованные методы более подходят для того, чтобы показать существование этого изменения, чем для количественной оценки ее величины, то автор посвящает последнюю часть работы изучению двух особенно простых случаев, когда упругое тело является сферой или круговым цилиндром.

Построение работы обнаруживает высокое мастерство автора во владении аналитическим аппаратом. Несмотря на то, что общие формулы, представленные в первой части работы, уже были найдены Риччи, который, однако, только привел их в своей лекции в Падуанском университете и никогда не публиковал, рецензенты считают, что работа доктора Ферми вносит подлинный и существенный вклад в исследуемый предмет, и поэтому предлагают опубликовать ее полностью в Трудах Академии Линчей.

7

О ВЕСЕ УПРУГИХ ТЕЛ *

1. Общие формулы

В настоящей работе будут рассматриваться только статические явления, и поэтому предполагается, что справедлива соответствующая этому случаю [1] метрика пространства — времени

$$ds^2 = g_{00}dt - \sum_{ik=1}^{3} \gamma_{ik} dx_i dx_k, \tag{1}$$

где g_{00} и γ_{ik} — функции только пространственных координат x_1, x_2, x_3. Рассмотрим упругое тело, которое может покоиться в эвклидовом пространстве так, что все упругие напряжения между его частями равны нулю. Если бы пространство S с метрикой

$$d\sigma^2 = \sum_{ik} \gamma_{ik} dx_i dx_k \qquad (i, k = 1, 2, 3) \tag{2}$$

было эвклидовым, мы могли бы ∞^6 способами расположить в нем наше тело в положении покоя. Однако, поскольку в обычных случаях это не так, будет происходить следующее: в нашем теле, расположенном в пространстве S, будут существовать упругие напряжения; при этом энергия этих напряжений будет изменяться при смещении тела. Следовательно, вес нашего тела будет обусловлен не только весом его возможной материальной массы и весом его упругой энергии, но и только что упомянутыми изменениями упругой энергии. Цель настоящей работы и состоит в нахождении этого дополнительного веса. Предположим, что пространство квазиэвклидово; эта гипотеза содержит лишь обычное в теории упругости ограничение, согласно которому деформации упругого тела очень малы.

Представим вначале, что наше упругое тело находится в эвклидовом пространстве, и обозначим через u_1, u_2, u_3 декартовы ортогональные координаты в этом пространстве. Когда тело находится в пространстве S, то x_1, x_2, x_3 будут функциями u_1, u_2, u_3, так что метрический элемент пространства S будет выражаться через u следующим образом:

$$d\sigma^2 = \sum_{ik} a_{ik} du_i du_k, \tag{3}$$

---

* *Sul peso dei corpi elastici.* Mem. Lincei, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, 1923, 14, 114—124.

[1] T. Levi-Civita. Rend. Lincei, ser. 5ª, 1917, v. XXVI.

где, естественно,

$$a_{ik} = \sum_{rs} \gamma_{rs} \frac{\partial x_r}{\partial u_i} \frac{\partial x_s}{\partial u_k}. \tag{4}$$

Обозначим через α_1, α_2, α_3 три основных растяжения относительно некоторой частицы тела. Удельная упругая энергия вблизи частицы, как известно, будет равна

$$W_0 = 4A(\mathrm{S}\alpha_1)^2 - 4B\mathrm{S}\alpha_2\alpha_3, \tag{5}$$

где S обозначает суммирование при циклической перестановке индексов (1, 2, 3), а A и B — упругие константы, которые выражаются через модуль упругости E и коэффициент Пуассона σ формулами

$$A = \frac{E(1-\sigma)}{8(1+\sigma)(1-2\sigma)}, \quad B = \frac{E}{4(1+\sigma)}. \tag{6}$$

Рассуждая, как обычно в кинематике сплошных сред, получаем, что α_1, α_2, α_3 являются корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-(1+x)^2 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-(1+x)^2 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-(1+x)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Вследствие известных соотношений между коэффициентами и корнями имеем

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{S}(1+\alpha_1)^2 = \mathrm{S}a_{11}, \\ &\mathrm{S}(1+\alpha_2)^2(1+\alpha_3)^2 = \mathrm{S}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Вводя обычные обозначения ε_{ik} для величин 1 или 0 в зависимости от того, $i = k$ или $i \neq k$, вследствие сделанных гипотез можем записать $a_{ik} = \varepsilon_{ik} + \beta_{ik}$, где β_{ik} очень малы.

Тогда из уравнений (7) получим

$$2\mathrm{S}\alpha_1 + \mathrm{S}\alpha_1^2 = \mathrm{S}\beta_{11},$$

$$\mathrm{S}(1+\alpha_2)^2(1+\alpha_3)^2 = 3 + 2\mathrm{S}\beta_{11} + \mathrm{S}\begin{vmatrix} \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix}$$

Вследствие того, что величины α, согласно сделанным предположениям, крайне малы, получаем приближенные формулы

$$\mathrm{S}\alpha_1 = \frac{1}{2}\mathrm{S}\beta_{11}, \quad \mathrm{S}\alpha_2\alpha_3 = \frac{1}{4}\mathrm{S}\begin{vmatrix} \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Поэтому соотношение (5) принимает вид

$$W_0 = A\,(S\beta_{11})^2 - BS\begin{vmatrix}\beta_{22} & \beta_{23}\\ \beta_{32} & \beta_{33}\end{vmatrix}. \qquad (9)$$

Поскольку в наших расчетах мы будем использовать принцип Гамильтона, мы должны найти вариацию величины W_0 при варьировании x_i, рассматриваемых как функции u_i; из соотношения (9) имеем

$$\delta W_0 = 2A\,(S\beta_{11})\,S\delta\beta_{11} - BS\,(\beta_{22}\delta\beta_{33} + \beta_{33}\delta\beta_{22} - 2\beta_{23}\delta\beta_{23}) =$$
$$= S\,[\delta\beta_{11}\{2A\beta_{11} + (2A - B)\,(\beta_{22} + \beta_{33})\} + 2B\beta_{23}\delta\beta_{23}]. \qquad (10)$$

Далее, из (4) следует

$$\delta\beta_{ik} = \delta a_{ik} = \sum_{r,s,t}\frac{\partial\gamma_{rs}}{\partial x_t}\,\delta x_t\,\frac{\partial x_r}{\partial u_i}\,\frac{\partial x_s}{\partial u_k} + 2\sum_{r,s}\gamma_{rs}\,\frac{\partial x_r}{\partial u_i}\,\frac{\partial\delta x_s}{\partial u_k}\,.$$

Чтобы получить более простые формулы, примем, что координаты x совпадают с u; при этом предыдущая формула будет иметь вид

$$\delta\beta_{ik} = \sum_t\frac{\partial\gamma_{ik}}{\partial x_t}\,\delta x_t + 2\sum_s\gamma_{is}\,\frac{\partial\delta x_s}{\partial u_k}\,. \qquad (11)$$

В качестве выражения для действия примем

$$W = \iint W_0\sqrt{g_{00}}\,d\tau dt + \iint k\sqrt{g_{00}}\,d\tau dt + \iint\sum_i F_i x_i\,dt d\tau, \qquad (12)$$

где первый член представляет упругое действие, второй — действие «материальных» масс с плотностью k, $d\tau$ — элемент пространственного объема; наконец, последний член представляет действие внешней силы с компонентами F_1, F_2, F_3, необходимой для удержания тела (чтобы оно не упало): поэтому она равна по величине и противоположна по направлению весу тела. Теперь сразу можно найти вариацию величины W. Поскольку принцип Гамильтона требует, чтобы $\delta W = 0$, получим уравнение

$$\iint\sum_i F_i\delta x_i\,d\tau dt + \iint k\sum_i\frac{\partial\sqrt{g_{00}}}{\partial x_i}\,\delta x_i\,d\tau dt +$$
$$+ \iint\Big(W_0\sum_i\frac{\partial\sqrt{g_{00}}}{\partial x_i}\,\delta x_i + \delta W_0\sqrt{g_{00}}\Big)\,dt d\tau = 0.$$

В δW_0, как это следует из соотношений (10) и (11), содержатся, кроме δx_i, также и их производные, от которых, однако, можно сразу избавиться интегрированием по частям. Затем мы можем, например, предположить, что F_i — постоянны, обратить в нуль коэффициенты при δx_i и найти уравнения, удобные для определения положения тела, т. е. для определения

β_{ik}. После этого остается определить F_i, т. е. компоненты веса тела. Но это теперь сделать легко, предположив δx постоянными. И действительно, из соотношений (10) и (11) имеем

$$\delta\beta_{ik} = \sum_t \frac{\partial\beta_{ik}}{\partial u_t}\,\delta x_t$$

и поэтому

$$\delta W_0 = \sum_t K_t \delta x_t, \tag{13}$$

где для краткости положено

$$K_t = \mathrm{S}\left[\frac{\partial\beta_{11}}{\partial u_t}\{2A\beta_{11} + (2A - B)(\beta_{22} + \beta_{33})\} + 2B\beta_{23}\frac{\partial\beta_{23}}{\partial u_t}\right]. \tag{14}$$

Поэтому принцип Гамильтона при обращении в нуль коэффициентов при δx_i дает

$$\int F_t d\tau + \int (k + W_0)\frac{\partial\sqrt{g_{00}}}{\partial x_t}\,d\tau + \int K_t\sqrt{g_{00}}\,d\tau = 0. \tag{15}$$

Отсюда следует, что вес равен

$$\int (k + W_0)\frac{\partial\sqrt{g_{00}}}{\partial x_t}\,d\tau + \int K_t\sqrt{g_{00}}\,d\tau.$$

Это выражение состоит из двух частей: первая, имеющая направление гравитационного поля, есть не что иное, как вес материальных масс и упругой энергии; вторая, с компонентами $\int K_t\sqrt{g_{00}}\,d\tau$, в общем случае имеет иное направление и обусловлена причиной, о которой шла речь в начале этой работы. Она, в частности, может отличаться от нуля также при постоянном g_{00}, т. е. в отсутствие гравитационного поля (в обычном смысле).

2. Случай цилиндра с образующими, параллельными оси z

Изложенный только что метод расчета этого дополнительного веса, однако, неприменим в большинстве случаев, поскольку он требует решения сложной задачи теории упругости. С помощью двух особенно простых примеров я намерен показать, как в некоторых случаях можно фактически рассчитать этот дополнительный вес упругих тел. В первом примере предположим, что пространственно-временно́й интервал ds^2 есть

$$ds^2 = g_{00}dt^2 - dz^2 - Edx^2 - 2Fdxdy - Gdy^2, \tag{16}$$

где g_{00} и E, F, G — функции только x и y. Далее предположим, что наше упругое тело является цилиндром с образующими, параллельными оси z, и что он, будучи расположенным в эвклидовом пространстве, имеет круговое сечение, радиус которого значительно меньше радиуса кривизны квадратичной формы $Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2$. Что же касается упругих свойств нашего тела, то для нас более или менее безразлично, считать ли, что оно изотропно, но имеет такую удлиненную форму, что влияние концов пренебрежимо мало, или что оно имеет любую длину, но состоит как бы из абсолютно твердых параллельных оси волокон. Поскольку этому второму предположению соответствуют несколько более простые расчеты, мы будем исходить из него.

Пусть H — кривизна квадратичной формы $Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2$. Будем предполагать, что H и g_{00} не изменяются существенно внутри нашего тела, так что оно будет продолжать иметь форму кругового цилиндра. Обозначим через r расстояние данной произвольной частицы цилиндра от оси, когда цилиндр находится в состоянии покоя в эвклидовом пространстве, и через $r + \varepsilon$ — ее расстояние от оси, когда цилиндр находится в нашем неэвклидовом пространстве. Длина окружности (с центром на оси), проходящей через нашу частицу, была равна $2\pi r$; после переноса цилиндра в эвклидово же пространство длина стала бы равна $2\pi(r + \varepsilon)$. Но, поскольку это не так, длина этой окружности в нашем приближении оказывается равной $2\pi(r + \varepsilon)\left(1 - \frac{Hr^2}{6}\right)$, так что растяжения нашей частицы в радиальном и поперечном направлениях соответственно равны

$$\frac{d\varepsilon}{dr}, \qquad \frac{\varepsilon}{r} - \frac{Hr^2}{6},$$

если пренебречь произведением εH, что допустимо в нашем приближении.

Удельная упругая энергия вблизи нашей частицы поэтому будет

$$W_0 = 4A\left\{\left(\frac{d\varepsilon}{dr}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{r} - \frac{Hr^2}{6}\right)^2\right\} + 4B\frac{d\varepsilon}{dr}\left(\frac{\varepsilon}{r} - \frac{Hr^2}{6}\right), \tag{17}$$

где A и B — упругие константы, связанные с модулем упругости E и коэффициентом сжатия σ (естественно, рассматриваемыми в плоскости, перпендикулярной волокнам) соотношениями

$$A = \frac{E}{8(1 - \sigma^2)}, \qquad B = \frac{\sigma E}{4(1 - \sigma^2)}. \tag{18}$$

Предположим, что высота нашего цилиндра равна 1; тогда энергия, соответствующая слою, заключенному между двумя коаксиальными цилиндрами радиусами r и $r + dr$, будет $2\pi r W_0 dr$. Пусть R — радиус цилиндра; тогда полная энергия будет

$$2\pi \int_0^R r W_0 dr,$$

т. е.

$$8\pi \int\limits_0^R r dr \left[A \left\{ \left(\frac{d\varepsilon}{dr} \right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{r} - \frac{Hr^2}{6} \right)^2 \right\} + B \frac{d\varepsilon}{dr} \left(\frac{\varepsilon}{r} - \frac{Hr^2}{6} \right) \right].$$

Для упругого равновесия мы должны найти такое ε, как функцию r, чтобы предыдущее выражение было минимальным.

Поэтому, согласно обычным правилам вариационного исчисления, мы имеем дифференциальное уравнение

$$2A \left(\frac{\varepsilon}{r} - \frac{Hr^2}{6} \right) + B \frac{d\varepsilon}{dr} = \frac{d}{dr} \left\{ 2A \frac{d\varepsilon}{dr} r + B \left(\frac{\varepsilon}{r} - \frac{Hr^2}{6} \right) r \right\}$$

с граничными условиями

$$\varepsilon = 0 \quad \text{при} \quad r = 0,$$

$$2A \frac{d\varepsilon}{dr} + B \left(\frac{\varepsilon}{r} - \frac{Hr^2}{6} \right) = 0 \quad \text{при} \quad r = R.$$

Эти условия достаточны, чтобы определить ε как функцию r, а именно

$$\varepsilon = \frac{(2A - B) HR^2}{32A} r - \frac{(2A - 3B) H}{32A} r^3. \qquad (19)$$

Теперь следует подставить это выражение для ε в выражение полной энергии. С помощью несколько громоздких, но несложных вычислений находим для полной энергии следующее выражение:

$$\frac{\pi H^2 R^6}{3456 A^2} [224A^3 - 108A^2 B + 72AB^2 + 27B^3],$$

или, полагая

$$M = \frac{\pi}{3456 A^2} [224A^3 - 108A^2 B + 72AB^2 + 27B^3], \qquad (20)$$

наконец, получаем для полной энергии

$$MH^2R^6.$$

При этом M — постоянная, зависящая только от упругих констант нашего тела.

Обозначим далее через m полную массу нашего цилиндра и через F_x, F_y, F_z — три компоненты силы, уравновешивающей вес. Согласно принципу Гамильтона, как и ранее, должна обращаться в нуль вариация выражения

$$\sqrt{g_{00}} (m + MH^2R^6) + F_x x + F_y y + F_z z.$$

Но такая вариация суть

$$\left(\delta x \frac{\partial \sqrt{g_{00}}}{\partial x} + \delta y \frac{\partial \sqrt{g_{00}}}{\partial y}\right)(m + MH^2R^6) +$$
$$+ 2\sqrt{g_{00}}\, MHR^6 \left(\frac{\partial H}{\partial x}\delta x + \frac{\partial H}{\partial y}\delta y\right) + F_x\delta_x + F_y\delta y + F_z\delta z,$$

поскольку g_{00} и H функции только x и y.

Тогда, приравнивая нулю коэффициенты при δx, δy, δz, находим

$$\left.\begin{aligned} F_x + \frac{\partial \sqrt{g_{00}}}{\partial x}(m + MH^2R^6) + 2\sqrt{g_{00}}\, MHR^6 \frac{\partial H}{\partial x} &= 0, \\ F_y + \frac{\partial \sqrt{g_{00}}}{\partial y}(m + MH^2R^6) + 2\sqrt{g_{00}}\, MHR^6 \frac{\partial H}{\partial y} &= 0, \\ F_z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Предположим для удобства, что вблизи нашего тела скорость света равна единице, т. е. $g_{00} = 1$.

Тогда $\frac{\partial \sqrt{g_{00}}}{\partial x}$, $\frac{\partial \sqrt{g_{00}}}{\partial y}$ есть не что иное, как компоненты G_x и G_y гравитационного ускорения. Отсюда следует, что компоненты веса нашего тела будут

$$G_x(m + MH^2R^6) + MR^6 \frac{\partial H^2}{\partial x},$$
$$G_y(m + MH^2R^6) + MR^6 \frac{\partial H^2}{\partial y},$$

или, в векторной записи, его вес будет равен

$$\mathbf{P} = \mathbf{G}\,(m + MH^2R^6) + MR^3 \operatorname{grad}(H^2). \tag{22}$$

Итак, вес состоит из двух совершенно различных частей. Первая есть не что иное, как обычный вес массы и упругой энергии и имеет направление гравитационного ускорения G. Вторая же, обусловленная отклонениями самого пространства от эвклидова, в общем случае имеет направление, отличающееся от направления первой и определенное только кривизной H. Поэтому вторая часть может существовать также и в отсутствие первой, т. е. упругое тело может иметь вес даже в поле, где отсутствует гравитационное ускорение (в прямом смысле этого слова).

3. Случай изотропной сферы

Второй пример. Рассчитаем вес упругой изотропной сферы, размеры которой очень малы по сравнению с радиусами кривизны пространства. Естественно, что и теперь удобно вначале найти полную упругую энергию нашей сферы.

Для этого рассмотрим наряду с пространством S с метрикой (2) также эвклидово пространство S' и предположим, что наша сфера последовательно располагается в положении покоя в S', а потом помещается в S.

Примем для пространства S' ортогональные декартовы координаты (ξ, η, ζ) с началом в центре сферы. Поскольку между точками S и S' имеется однозначное соответствие (в соответствии находятся те пары точек, в которых находится одна и та же частица упругой сферы), мы можем отнести координаты ξ, η, ζ и к пространству S. Далее заметим, что вследствие введенного нами приближения трем главным ортогональным направлениям кривизны пространства S, относящимся к центру сферы, будут соответствовать в S' три также ортогональных направления, которые мы примем за направления осей координат. Пусть метрический элемент S, отнесенный к новой системе, есть

$$ds^2 = (1 + \beta_{11})\,d\xi^2 + (1 + \beta_{22})\,d\eta^2 + (1 + \beta_{33})\,d\zeta^2 + \\ + 2\beta_{23}d\eta d\zeta + 2\beta_{31}d\zeta d\xi + 2\beta_{12}d\xi d\eta, \tag{23}$$

где β очень малы. Мы можем разложить их в ряд по ξ, η, ζ, ограничиваясь квадратичными членами. Далее заметим, что вследствие сделанных предположений в этом разложении будут отсутствовать линейные члены (действительно, если бы они присутствовали, то можно было бы различить взаимно противоположные направления) и что в квадратичных членах будут отсутствовать «прямоугольные» члены (если бы они действительно присутствовали, то квадратичная форма, полученная приравниванием этого квадратичного члена константе, имела бы основной трехгранник, не совпадающий с основным трехгранником кривизны, что противоречит симметрии). Кроме того, в β_{23}, β_{31}, β_{12} будет отсутствовать и постоянный член, поскольку при $\xi = \eta = \zeta = 0$ должно быть $\beta_{23} = \beta_{31} = \beta_{12} = 0$. Итак, наше разложение будет иметь вид

$$\beta_{11} = \gamma + p_{11}\xi^2 + q_{11}\eta^2 + r_{11}\zeta^2, \\ \beta_{23} = p_{23}\xi^2 + q_{23}\eta^2 + r_{23}\zeta^2, \tag{24}$$

вместе с аналогичными выражениями, полученными путем циклической перестановки индексов. При этом γ, p, q, r — константы.

Формулы (9) позволяют нам вычислить удельную энергию W_0; найдем

$$W_0 = G + SL_1\xi^2 + SP_1\xi^4 + S\pi_1\eta^2\zeta^2,$$

где G, L, P, π — константы, выражающиеся через γ, p, q, r. Полная энергия будет

$$W = \int\limits_{\tau} W_0 d\tau,$$

где интеграл распространен по всему объему сферы. Но

$$\int\limits_{\tau} d\tau = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad \int\limits_{\tau} \xi^2 d\tau = \frac{4}{15}\pi R^5,$$

$$\int\limits_{\tau} \xi^4 d\tau = \frac{4}{35}\pi R^7, \quad \int\limits_{\tau} \eta^2\zeta^2 d\tau = \frac{4}{105}\pi R^7,$$

так что полная энергия оказывается равной

$$W = \frac{4}{3}\pi R^3 G + \frac{4}{15}\pi R^5 SL_1 + \frac{4}{35}\pi R^7 SP_1 + \frac{4}{105}\pi R^7 S\pi_1. \tag{25}$$

Затем из соотношений (9) и (24), произведя вычисления, получаем

$$G = A\mathrm{S}\gamma_{11}^2 + (2A - B)\,\mathrm{S}\gamma_{22}\gamma_{33},$$

$$\mathrm{S}L_1 = 2A\mathrm{S}\gamma_{11}(p_{11}+q_{11}+r_{11}) + (2A-B)\mathrm{S}\{\gamma_{22}(p_{33}+q_{33}+r_{33}) + \gamma_{33}(p_{22}+q_{22}+r_{22})\},$$

$$\mathrm{S}P_1 = A\mathrm{S}\,(p_{11}^2 + q_{11}^2 + r_{11}^2) + (2A - B)\,\mathrm{S}\,(p_{22}p_{33} + q_{22}q_{33} + r_{22}r_{33}) + \\ + B\,(p_{23}^2 + q_{23}^2 + r_{23}^2),$$

$$\mathrm{S}\pi_1 = 2A\mathrm{S}\,(q_{11}r_{11} + r_{11}p_{11} + p_{11}q_{11}) + (2AB)\,\mathrm{S}\,(q_{22}r_{33} + q_{33}r_{22} + r_{22}p_{33} + \\ + r_{33}p_{22} + p_{22}q_{33} + p_{33}q_{22}) + 2B\mathrm{S}\,(q_{23}r_{23} + r_{23}p_{23} + p_{23}q_{23}).$$

Подставляя эти выражения в (25), находим выражение для W через γ, p, q, r. Далее, для состояния равновесия величины γ, p, q, r следует определить так, чтобы W было минимальным. Но величины γ, p, q, r должны быть подчинены также условию, что кривизны пространства должны принимать положенные им значения. Из соотношений (23) и (24) сразу следует

$$(23,23) = -r_{22} - q_{33}, \quad (31,31) = -p_{33} - r_{11}, \quad (12,12) = -q_{11} - p_{22}. \tag{26}$$

Определить γ, p, q, r теперь можно с помощью метода неопределенных коэффициентов a_1, a_2, a_2, так как вследствие того, что β_{ik} крайне малы, величины (23,23), (31,31) (12,12) могут быть приняты в качестве трех главных кривизн. Несколько громоздкий, но нетрудный расчет дает:

$$\delta\left(\frac{W}{4\pi R^3} - \mathrm{S}\,a_1\,[(23,23) + r_{22} + q_{33}]\right) = \mathrm{S}\delta\gamma_{11}\left[\frac{2A}{3}\gamma_{11} + \frac{2A-B}{3}(\gamma_{22} + \gamma_{33}) + \right. \\ \left. + \frac{2AR^2}{15}(p_{11} + q_{11} + r_{11}) + \frac{2(A-B)R^2}{15}(p_{33} + q_{33} + r_{33} + p_{22} + q_{22} + r_{22})\right] +$$

$$+ S\delta p_{11}\left[\frac{2AR^2}{15}\gamma_{11} + \frac{(2A-R)R^2}{15}(\gamma_{22}+\gamma_{33}) + \frac{2AR^4}{105}(3p_{11}+r_{11}+q_{11}) + \right.$$
$$\left. + \frac{(2A-B)R^4}{105}(3p_{33}+r_{33}+q_{33}+3p_{22}+r_{22}+q_{22})\right] +$$
$$+ S\delta q_{11}\left[\frac{2AR^2}{15}\gamma_{11} + \frac{(2A-B)R^2}{15}(\gamma_{22}+\gamma_{33}) + \frac{2AR^4}{105}(3q_{11}+p_{11}+r_{11}) + \right.$$
$$\left. + \frac{(2A-B)R^4}{105}(3q_{33}+r_{33}+p_{33}+3q_{22}+r_{22}+p_{22}) - a_3\right] +$$
$$+ S\delta r_{11}\left[\frac{2AR^2}{15}\gamma_{11} + \frac{(2A-B)R^2}{15}(\gamma_{22}+\gamma_{33}) + \frac{2AR^4}{105}(3r_{11}+p_{11}+q_{11}) + \right.$$
$$\left. + \frac{(2A-B)R^4}{105}(3r_{33}+p_{33}+q_{33}+3r_{22}+q_{22}) - a_2\right] +$$
$$+ \frac{2BR^4}{105} S\,[\delta p_{23}(3p_{23}+q_{23}+r_{23}) + \delta q_{23}(3q_{23}+r_{23}+p_{23}) +$$
$$+ \delta r_{23}(3r_{23}+p_{23}+q_{23})] = 0. \qquad (27)$$

Все коэффициенты при $\delta\gamma$, δp, δq, δr следует приравнять нулю, и полученные таким образом уравнения добавить к соотношениям (26). В итоге получим 24 однородных линейных уравнения с 24 неизвестными γ, p, q, r, a.

Из трех уравнений, полученных приравниванием нулю коэффициентов при δp_{23}, δq_{23}, δr_{23}, сразу следует, что $p_{23} = q_{23} = r_{23} = 0$, откуда $\beta_{23} = 0$ и аналогично $\beta_{31} = \beta_{12} = 0$. Для того чтобы определить остальные 15 неизвестных, положим

$$\left.\begin{aligned} &\frac{5}{R^2}S_1 = p_{11}+q_{11}+r_{11},\\ &2A\gamma_{11} + (2A-B)(\gamma_{22}+\gamma_{33}) = C_1,\\ &3p_{11}+r_{11}+q_{11} = P_1\frac{7}{R^2},\\ &\alpha_1 = a_1\frac{15}{R^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Уравнения, полученные приравниванием нулю остальных вариаций, имеют вид

$$\left.\begin{aligned} C_1 + 2AS_1 + (2A-B)(S_2+S_3) &= 0,\\ C_1 + 2AP_1 + (2A-B)(P_2+P_3) &= 0,\\ C_1 + 2AQ_1 + (2A-B)(Q_2+Q_3) &= \alpha_3,\\ C_1 + 2AR_1 + (2A-B)(R_2+R_3) &= \alpha_2, \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

и аналогичный им. Для определения из них S, P, Q, R, как функций C, α, всегда можно воспользоваться системой типа

$$\begin{gathered}2Ax + (2A - B)(y + z) = X,\\ 2Ay + (2A - B)(z + x) = Y,\\ 2Az + (2A - B)(x + y) = Z,\end{gathered}$$

решение которой имеет вид

$$\begin{gathered}x = MX + N(Y + Z),\\ y = MY + N(Z + X),\\ z = MZ + N(X + Y),\end{gathered}$$

где было положено

$$M = \frac{4A - B}{6AB - 2B^2}, \qquad N = \frac{-2A + B}{6AB - 2B^2}. \tag{30}$$

Таким образом, получим

$$\left.\begin{aligned}-S_1 &= MC_1 + N(C_2 + C_3),\\ -P_1 &= MC_1 + N(C_2 + C_3 - \alpha_2 - \alpha_3),\\ -Q_1 &= M(C_1 - \alpha_3) + N(C_2 + C_3 - \alpha_1),\\ -R_1 &= M(C_1 - \alpha_2) + N(C_2 + C_3 - \alpha_1)\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

и аналогичные выражения.

С другой стороны, из соотношений (28) сразу следует, что $5S_1 = 7(P_1 + Q_1 + R_1)$, и поэтому

$$MC_1 + N(C_2 + C_3) = \frac{7}{8} N\alpha_1 + \frac{7}{16}(M + N)(\alpha_2 + \alpha_3); \tag{32}$$

подставляя эти выражения в уравнение (31), получаем S, P, Q, R, выраженные через α. Но из соотношений (28) имеем

$$r_{22} = \frac{1}{2R^2}(7R_2 - 5S_2)$$

и восемь аналогичных выражений. Затем, подставляя вместо α_i выражение $\frac{15}{R^2} a_i$, наконец, находим

$$\left.\begin{aligned}p_{11} &= \frac{105}{16R^4}[-2Na_1 + (7N - M)(a_2 + a_3)],\\ q_{11} &= \frac{105}{16R^4}[6Na_1 - (M + N)a_2 + (7M - N)a_3],\\ r_{11} &= \frac{105}{16R^4}[6Na_1 + (7M - N)a_2 - (M + N)a_3]\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

и аналогичные выражения.

Подставляя эти выражения в соотношение (26), получаем

$$\left.\begin{aligned} -\frac{16R^4}{105}(23,23) &= 2(7M-N)a_1+(5N-M)(a_2+a_3),\\ -\frac{16R^4}{105}(31,31) &= 2(7M-N)a_2+(5N-M)(a_3+a_1),\\ -\frac{16R^4}{105}(12,12) &= 2(7M-N)a_3+(5N-M)(a_1+a_2). \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Из этих трех уравнений можно найти a_1, a_2, a_3; подстановка полученных таким образом значений в (33) дала бы возможность получить искомые величины. Затем последние должны были бы быть подставлены в выражение (25) для W, чтобы была получена искомая упругая энергия. Но мы можем упростить этот расчет, заметив, что W — однородная функция второй степени γ, p, q, r, и поэтому, согласно теореме Эйлера,

$$2W=\sum\gamma\frac{\partial W}{\partial\gamma}+\sum p\frac{\partial W}{\partial p}+\sum q\frac{\partial W}{\partial q}+\sum r\frac{\partial W}{\partial r}.$$

Но из соотношения (27) следует, что все частные производные W равны нулю, кроме производных по q_{11}, r_{11}, r_{22}, p_{22}, p_{33}, q_{33}, которые с точностью до множителя $4\pi R^3$ равны a_3, a_2, a_1, a_3, a_2, a_1; поэтому имеем

$$W=2\pi R^3(a_3q_{11}+a_2r_{11}+a_1r_{22}+a_3p_{22}+a_2p_{33}+a_1q_{33}),$$

или, подставляя выражения (33),

$$W=\frac{105\pi}{4R}[(5N-M)\,\mathrm{S}\,a_2a_3+(7M-N)\,\mathrm{S}\,a_1^2].$$

Теперь достаточно найти значения a из уравнений (34) и подставить их сюда, чтобы последовательно получить

$$a_1=\frac{4R^4}{105(15M-7N)(3M+2N)}[-(13M+3N)(23,23)+$$
$$+(5N-M)\{(31,31)+(12,12)\}],$$

$$\mathrm{S}a_1^2=\frac{16R^8}{105^2(15M-7N)^2(3M+2N)^2}[(171M^2+58MN+59N^2)\,\mathrm{S}\,(23,23)^2+$$
$$+2(27M^2-134MN+31N^2)\,\mathrm{S}\,(31,31)(12,12)],$$

$$\mathrm{S}a_2a_3=\frac{16R^8}{105^2(15M-7N)^2(3M+2N)^2}[(27M^2-134MN+31N^2)\,\mathrm{S}\,(23,23)^2+$$
$$+(198M^2-76MN+54N^2)\,\mathrm{S}\,(31,31)(12,12)],$$

$$W = \frac{4\pi R^7}{105\,(15M - 7N)^2\,(3M + 2N)^2}\,[(1170M^3 + 504M^2N - 346MN^2 + $$
$$+ 96N^3)\,\mathrm{S}\,(23,23)^2 + (180M^3 - 864M^2N + 268MN^2 +$$
$$+ 269N^3)\,\mathrm{S}\,(31,31)\,(12,12)].$$

Удобно еще преобразовать это выражение так, чтобы в нем фигурировали инвариантные элементы.

Для этого вместо символов Римана введем контравариантный тензор α^{ik} Риччи; поскольку β_{ik} в формуле (23) крайне малы, как нетрудно видеть, практически будем иметь

$$\mathrm{S}\,(23,23)^2 = \sum_{ik} \alpha^{ik}\alpha_{ik},$$

$$\mathrm{S}\,(31,31)\,(12,12) = \frac{1}{2}\left[\left(\sum_i \alpha_i^i\right)^2 - \mathrm{S}\,\alpha^{ik}\alpha_{ik}\right].$$

Итак, окончательно получим

$$W = R^7\left[\mu \sum_{ik} \alpha^{ik}\alpha_{ik} + \nu\left(\sum \alpha_i^i\right)^2\right], \qquad (35)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \frac{2\pi\,(2160M^3 + 1872M^2N - 960MN^2 - 77N^3)}{105\,(15M - 7N)^2\,(3M + 2N)^2}, \\ \nu &= \frac{2\pi\,(180M^3 - 864M^2N + 268MN^2 + 269N^3)}{105\,(15M - 7N)^2\,(3M + 2N)^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

Если $\sigma = {}^1/_3$, как это наблюдается для ряда металлов, то мы нашли бы

$$\mu = \pi E\,\frac{38669}{9274720}, \qquad \nu = \pi E\,\frac{13171}{9274720}.$$

Чтобы рассчитать вес, мы можем поступить совершенно так же, как в предыдущем примере. Тогда в прежних обозначениях мы найдем для векторного выражения веса:

$$\mathbf{G}\,(m + W) + R^7\left[\mu\,\mathrm{grad}\left(\sum_{ik}\alpha^{ik}\alpha_{ik}\right) + \nu\,\mathrm{grad}\left\{\left(\sum_i \alpha_i^i\right)^2\right\}\right].$$

Второй член представляет ту часть веса, направление которой не совпадает с направлением гравитационного поля.

К статье 8

Неизвестно, что привело Ферми к рассмотрению этой задачи. Много лет спустя (около 1950 г.) он предложил ее на кандидатском экзамене в Чикагском университете, где было разрешено пользоваться литературой. Как рассказывают, некий аспирант сообразил, что это может быть задачей, которую некогда рассматривал Ферми; он разыскал эту работу в библиотеке и оказался единственным, давшим верный ответ.

Э. Сегре

8
К УВЛЕЧЕНИЮ ПЛОСКОСТИ ПОЛЯРИЗАЦИИ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СРЕДОЙ *

1. Опыты Физо и многочисленные релятивистские и нерелятивистские теории этого явления показали, что распространяющийся в движущейся среде свет увлекается в направлении ее движения не полностью, а с коэффициентом увлечения, равным $(n^2 - 1)/n^2$, где n — показатель преломления среды. Здесь я намерен рассмотреть аналогичную проблему. Предположим, что прозрачная среда вращается вокруг оси и что линейно поляризованный свет распространяется сквозь нее по направлению, параллельному оси; если бы плоскость поляризации увлекалась вращением среды, то последняя обнаруживала бы нечто вроде вращательной способности величиной $\omega n/c$, где ω — угловая скорость и c — скорость света (в самом деле, для прохождения светом единичной длины необходимо время n/c, а за это время среда повернется как раз на угол $\omega n/c$).

Но мы увидим[1], что в действительности положение иное и что в этом

---

* *Sul transcinamento del piano di polarizzazione da parte di un mezzo rotante.* Rend. Lincei, 1923, **32** (1), 115—118. Представлена чл.-корр. Л. Пуччанти на заседании 4 февраля 1923 г.

[1] Дж. Дж. Томсон изучал ту же самую проблему (J. J. Thomson. Proc. Camb. Phil. Soc., 1885) и нашел коэффициент увлечения, равным 1; но его вывод ошибочен, поскольку он считал электрическое и магнитное поля света поперечными даже в движущейся среде, что явно противоречит формуле (4) его работы. Еще одна ошибка в работе Томсона состоит в том, что он положил $f = \frac{K}{4\pi} P$, где P, Q, R, согласно соотношениям (4), (5), (6), рассчитываются как сумма электрической силы P' и электромагнитной силы P'', действующей на тело, поскольку оно движется (она действует только на электрическое смещение тела, но не на смещение эфира). Правильная формула должна иметь вид

$$f = \frac{KP'}{4\pi} + \frac{K-1}{4\pi} P''.$$

Его результат, кстати, противоречит интуитивному ощущению, что для тел с показателем преломления, равным 1, коэффициент увлечения должен равняться нулю.

случае также необходимо учитывать некий коэффициент увлечения, который оказывается равным как раз коэффициенту увлечения Физо, так что вращательная способность равна не $\omega n/c$, а

$$\frac{n^2-1}{n^2}\,\frac{\omega n}{c}.$$

2. Рассмотрим изотропный диэлектрик с электрической поляризуемостью k, так что

$$n^2 = 1 + 4\pi k, \tag{1}$$

где n — показатель преломления.

Далее предположим, что диэлектрик вращается вокруг оси x с угловой скоростью ω. Если $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ обозначают электрическую и магнитную силы, то уравнения Максвелла[2] для него могут быть написаны в виде

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\,; \qquad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi\mathbf{j}\right), \tag{2}$$

где $\mathbf{j}$ — плотность тока (в единицах СГСЭ). Если через S обозначить поляризацию, то сразу видно, что $\mathbf{j}$ есть сумма тока, обусловленного изменением S во времени ($d\mathrm{S}/dt$), и тока, обусловленного переносом свободных электрических зарядов и равного $-\mathbf{V}\operatorname{div}\mathrm{S}$, где $\mathbf{V}$ — скорость произвольной точки диэлектрика. Поэтому

$$\mathbf{j} = \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial t} - \mathbf{V}\operatorname{div}\mathrm{S}. \tag{3}$$

С другой стороны, S будет выражаться [3] следующим образом:

$$\mathrm{S} = k\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{V}\times\mathbf{H}\right). \tag{4}$$

3. Итак, собраны все элементы для построения теории; для некоторого упрощения мы ограничимся рассмотрением точек вблизи оси вращения (оси x) и будем пренебрегать квадратами ω [4].

Попытаемся удовлетворить уравнениям (2), полагая

$$\begin{aligned} &E_x = E_x(x, y, z, t), && E_y = E_y(x, t), && E_z = E_z(x, t),\\ &H_x = 0, && H_y = H_y(x, t), && H_z = H_z(x, t), \end{aligned}$$

т. е. вводя, наряду с обычными поперечными компонентами электрическо-

---

[2] Здесь в уравнениях Максвелла не появляется в явном виде диэлектрическая постоянная, поскольку она учитывается в члене $4\pi\mathbf{j}$.

[3] Это явно соответствует пренебрежению дисперсией, т. е. приравниванию показателя преломления для всех длин волн к корню квадратному из диэлектрической постоянной.

[4] Точнее, пренебрегается квадратами числа $\omega r/c$, где r — максимальное расстояние рассматриваемых точек от оси.

го и магнитного векторов, также продольную компоненту электрического вектора. Учитывая, что компоненты $\mathbf{V}$ равны 0, $-\omega z$, ωy, из равенства (4) имеем

$$S_x = k\left\{E_x - \frac{\omega}{c}(yH_y + zH_z)\right\}, \qquad S_y = kE_y,$$

$$S_z = kE_z, \qquad \operatorname{div}\mathbf{S} = k\left\{\frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\omega}{c}\left(y\frac{\partial H_y}{\partial x} + z\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\right\},$$

и затем [см. (3)], в пренебрежении членами с ω^2,

$$j_x = k\left\{\frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\omega}{c}\left(y\frac{\partial H_y}{\partial t} + z\frac{\partial H_z}{\partial t}\right)\right\}, \qquad j_y = k\left\{\frac{\partial E_y}{\partial t} + \omega z\frac{\partial E_x}{\partial x}\right\},$$

$$j_z = k\left\{\frac{\partial E_z}{\partial t} - \omega y\frac{\partial E_z}{\partial x}\right\}.$$

Уравнения (2) в обычном приближении теперь могут быть записаны в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t},\\
&\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t},
\end{aligned}\right\}
\qquad
\left.\begin{aligned}
&n^2\frac{\partial E_x}{\partial t} = (n^2-1)\frac{\omega}{c}\left(y\frac{\partial H_y}{\partial t} + z\frac{\partial H_z}{\partial t}\right),\\
&-\frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{4\pi k}{c}\left\{\frac{\partial H_y}{\partial t} + \right.\\
&\qquad\left. + \omega z\frac{\partial E_x}{\partial x}\right\},\\
&\frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{4\pi k}{c}\left\{\frac{\partial E_z}{\partial t} - \right.\\
&\qquad\left. - \omega y\frac{\partial E_x}{\partial x}\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Из первого уравнения второй группы видно, что E_x содержит ω, и поэтому два последних уравнения можно упростить, пренебрегая членами с ω^2.

С учетом равенства (1) уравнения (5) можно тогда записать в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t},\\
&\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t},
\end{aligned}\right\}
\qquad
\left.\begin{aligned}
&n^2\frac{\partial E_x}{\partial t} = (n^2-1)\frac{\omega}{c}\left(y\frac{\partial E_y}{\partial t} + \right.\\
&\qquad\left. + z\frac{\partial H_z}{\partial t}\right),\\
&-\frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{n^2}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t},\\
&\frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{n^2}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t}.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Из этих уравнений, пренебрегая членами с ω^2, легко получить

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} &= \frac{(n^2-1)\,\omega}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} &= -\frac{(n^2-1)\,\omega}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Попытаемся удовлетворить их, полагая

$$E_y = \mathcal{E}_y e^{2\pi i\nu\left(t-\frac{n'x}{c}\right)}, \qquad E_z = \mathcal{E}_z e^{2\pi i\nu\left(t-\frac{n'x}{c}\right)},$$

где $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$ — комплексные константы; тогда из уравнений (7) получим

$$2\pi\nu\mathcal{E}_y(n^2-n'^2) = (n^2-1)\,\omega i\mathcal{E}_z, \qquad 2\pi\nu\mathcal{E}_z(n^2-n'^2) = -(n^2-1)\,\omega i\mathcal{E}_y. \qquad (7')$$

Для того, чтобы решения не были тождественно равны нулю, должно быть

$$4\pi^2\nu^2(n^2-n'^2)^2 = (n^2-1)^2\omega^2,$$

откуда следует

$$n'^2 = n^2 \pm \frac{(n^2-1)\,\omega}{2\pi\nu},$$

т. е. в нашем приближении

$$n' = n\left[1 \pm \frac{(n^2-1)\,\omega}{4\pi\nu n^2}\right]. \qquad (8)$$

Как сразу видно из уравнений (7′), два значения, n_1' и n_2', определяемые формулой (8) для n', суть два показателя преломления для циркулярно поляризованных (в противоположных направлениях) волн. Эти два значения, как известно, связаны с вращательной способностью R соотношением $R = 2\pi(n_1' - n_2')\,\nu/c$. Поэтому, учитывая значения (8), наконец, находим

$$R = \frac{n^2-1}{n^2}\frac{\omega n}{c}.$$

Поэтому коэффициент увлечения плоскости поляризации, как и утверждалось ранее, равняется коэффициенту увлечения Физо, т. е.

$$\frac{n^2-1}{n^2}.$$

См. вводные замечания к статье 4

9

О МАССЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В ПУСТОМ ПРОСТРАНСТВЕ *

(Совместно с А. Понтремоли)

Недавно одному из нас [1] (при помощи введения точного понятия жесткости) удалось показать, что согласно обычной электродинамике масса покоя электрона имеет ту же величину, что и приписываемая ему теорией относительности. Это значение, как известно, можно получить путем деления энергии системы на квадрат скорости света.

Мы обратили внимание на то, что различие между значениями, определенными из обычной электродинамики и из теории относительности, появляется и в расчете массы излучения в пустом пространстве [2]; здесь нам хочется показать, что это расхождение также можно устранить при помощи аналогичных рассуждений. Использовавшийся до сих пор в электродинамике способ определения массы излучения в полости состоял прежде всего в расчете электромагнитного импульса $\mathbf{G}_0$ для медленных и квазистационарных движений. При пренебрежении членами, содержащими v^2/c^2, этот импульс определяется [3] соотношением

$$\mathbf{G}_0 = \frac{4}{3}\frac{W_0}{c^2}\mathbf{v},$$

где W_0 — энергия излучения полости в состоянии покоя, $\mathbf{v}$ — скорость движения полости, c — скорость света. Из этого делался вывод о том, что сила инерции

$$-\frac{d\mathbf{G}_0}{dt} = -\frac{4}{3}\frac{W_0}{c^2}\mathbf{\Gamma},$$

где $\mathbf{\Gamma}$ — ускорение; отсюда масса излучения получалась равной $(4/3)\, W_0/c^2$, в то время как согласно теории относительности она должна быть равна просто W_0/c^2.

---

* *Sulla massa della radiazione in uno spazio vuoto.* (Con A. Pontremoli). Rend. Lincei, 1923, **32** (1), 162—164. Представлено академиком О. Корбино на заседании 18 февраля 1923 г.

[1] E. Fermi. Rend. Lincei, 1922, **31**, 184, 306; Phys. Zeit., 1922, **23**, 340. (Работы [Б5а, б]; см. статью 4.— *Ред.*)

[2] F. Hasenöhrl. Ann. d. Physik, 1904, **15**, 344; 1905, **16**, 589; K. von Mosengeil. Ann. d. Physik., 1907, **22**, 867; M. Plank. Berlin Sitzberg., 1907, 542; M. Abraham. Theorie der Elektrizität, 1920, v. II, p. 341.

[3] M. Abraham. Цит. соч., стр. 345.

В этой трактовке скрыто содержится утверждение о том, что внешняя сила $\mathbf{F}$ равна временно́й производной импульса электромагнитного поля, т. е. векторной сумме электромагнитных сил $d\varphi$, действующих на отдельные части системы; итак, подразумевается, что

$$\mathbf{F} = \int d\varphi. \tag{1}$$

Но это неправильно, поскольку, учитывая обсуждавшееся одним из нас в цитированной работе понятие абсолютно твердого тела, можно видеть, что внешняя сила задается соотношением

$$\mathbf{F} = \int d\varphi \left[1 + \frac{\mathbf{\Gamma}\cdot(\mathrm{P}-\mathrm{O})}{c^2}\right]. \tag{2}$$

Здесь (P—O) — вектор, конец которого находится в точке P, где действует сила $d\varphi$, а начало — в неподвижной точке O внутри системы, которую мы можем принять за начало координат.

Далее, $d\varphi$ есть результирующая двух сил: $d\varphi_1$, обусловленной давлением излучения, которое имело бы место, если бы полость была неподвижной, и $d\varphi_2$, обусловленной возмущениями этого давления, связанными с движением полости. Поскольку $\int d\varphi_1 = 0$ ($d\varphi_1$ — сила, обусловленная равномерным давлением на замкнутую поверхность), то, применяя формулу (1), можно найти, что внешняя сила

$$\mathbf{F} = \int d\varphi_2. \tag{3}$$

Эта сила и есть рассчитанная цитированными авторами сила инерции, так что

$$\int d\varphi_2 = -\frac{4}{3}\frac{W_0}{c^2}\mathbf{\Gamma}. \tag{4}$$

Из формулы же (2), а также имея в виду, что $\int d\varphi_1 = 0$, находим

$$\mathbf{F} = \int (d\varphi_1 + d\varphi_2)\left[1 + \frac{\mathbf{\Gamma}\cdot(\mathrm{P}-\mathrm{O})}{c^2}\right] = \int d\varphi_1 \frac{\mathbf{\Gamma}\cdot(\mathrm{P}-\mathrm{O})}{c^2} + \int d\varphi_2 + \int d\varphi_2 \frac{\mathbf{\Gamma}\cdot(\mathrm{P}-\mathrm{O})}{c^2}.$$

Пренебрегая членами, содержащими Γ^2, и замечая, что $d\varphi_2$ пропорционально $\mathbf{\Gamma}$, можно просто записать

$$\mathbf{F} = \int d\varphi_1 \frac{\mathbf{\Gamma}\cdot(\mathrm{P}-\mathrm{O})}{c^2} + \int d\varphi_2. \tag{5}$$

Различием между правыми частями (3) и (5) в этом случае априори нельзя пренебречь, несмотря на наличие c^2 в знаменателе, поскольку

$d\varphi_1/d\varphi_2$ может стать очень большим (как отношение между силой и ее возмущением)[4]. Действительно, $d\varphi_1 = p\mathbf{n}d\sigma$, где p — давление излучения, равное, как известно, $(1/3)\ W_0/V$, V — объем полости, $\mathbf{n}$ — единичный вектор, направленный по внешней нормали к элементу $d\sigma$ поверхности полости, имеющему координаты $(x,\ y,\ z)$.

Поэтому x-компонента первого интеграла в формуле (5) есть

$$\left[\int d\varphi_1 \frac{\Gamma\cdot(\mathrm{P}-\mathrm{O})}{c^2}\right]_x = \frac{W_0}{3c^2V}\int (\Gamma_x x + \Gamma_y y + \Gamma_z z)\cos\widehat{nx}d\sigma =$$
$$= \frac{W_0}{3c^2V}\left[\Gamma_x \int x\cos\widehat{nx}d\sigma + \Gamma_y\int y\cos\widehat{nx}d\sigma + \Gamma_z\int z\cos\widehat{nx}d\sigma\right];$$

но, применяя теорему Гаусса, сразу находим, что

$$\int x\cos\widehat{nx}d\sigma = V, \qquad \int y\cos\widehat{nx}d\sigma = \int z\cos\widehat{nx}d\sigma = 0.$$

Наша компонента поэтому равна $W_0\Gamma_x/3c^2$, и отсюда

$$\int d\varphi_1 \frac{\Gamma\cdot(\mathrm{P}-\mathrm{O})}{c^2} = \frac{W_0}{3c^2}\,\Gamma.$$

Учитывая это соотношение, а также соотношение (4), можно видеть, что отношение интегралов в правой части формулы (5) равно $-1/4$, так что действительно им нельзя пренебречь.

Подставляя эти значения в формулу (5), находим

$$\mathbf{F} = -\frac{W_0}{c^2}\,\Gamma,$$

откуда искомая масса покоя получается равной W_0/c^2, что согласуется с принципом относительности.

---

[4] В случае электромагнитных масс $d\varphi$ равно сумме кулоновских сил (главная часть) и сил, обусловленных ускорением. Для первых, очевидно, и в этом случае справедливо соотношение $\int d\varphi_1 = 0$; поэтому они существенны только в том случае, когда применяется формула (5), а не формула (3).

К статьям 10 и 12

Адиабатический принцип Эренфеста, игравший значительную роль в старой квантовой теории Бора — Зоммерфельда, несомненно оказал большое влияние на становление научного мышления Ферми и был одним из краеугольных принципов в системе его взглядов, по крайней мере до установления квантовой механики в ее современной форме. Круг вопросов, связанных с принципом Эренфеста и вообще с применением классической механики к квантовым системам, нашел отражение не только в статьях 10 и 12, но и в ряде других работ, лекций и книг.

Одно замечание относительно терминологии: условия квантования в теории Бора легче всего получались при введении канонических переменных действие — угол, которые назывались также угловыми координатами, как писал Ферми.

Б. Понтекорво

10

АДИАБАТИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП И СИСТЕМЫ, НЕ ДОПУСКАЮЩИЕ ВВЕДЕНИЯ УГЛОВЫХ КООРДИНАТ *

§ 1. Хорошо известна важность адиабатического принципа Эренфеста [1] для нахождения правил выбора стационарных орбит системы в теории Бора. Как известно, такой принцип можно сформулировать следующим образом: предположим, что силы или связи в механической системе изменяются со временем непрерывно, но очень медленно по сравнению с характерными периодами системы, т. е., по выражению Эренфеста, изменяются адиабатично; адиабатический принцип утверждает, что если система в начале находилась на привилегированной (с квантовой точки зрения) орбите, то она будет находиться на ней и в конце процесса такого изменения.

Рассмотрим, например, маятник и будем укорачивать нить, очень медленно по сравнению с периодом колебаний самого маятника. Тогда частота ν маятника будет очень медленно увеличиваться, но легко видеть, что и энергия u будет увеличиваться, причем таким образом, чтобы отношение u/ν оставалось постоянным. Итак, если вначале это отношение было целым кратным постоянной Планка h, то оно всегда таким и останется, т. е. состояние системы в течение всего процесса изменения будет оста-

---

* *Il principio delle adiabatische ed i sistemi che non ammettono coordinate angolari.* Nuovo Cimento, 1923, 25, 171—175.

[1] P. Ehrenfest. Ann. d. Phys., 1916, 51, 327.

ваться привилегированным. За другими многочисленными примерами отсылаем к работе Эренфеста.

Формальную основу адиабатического принципа составляет теорема Бюргерса [2]. Рассмотрим систему, допускающую разделение переменных [3] при использовании некоторых обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_f$. Затем положим

$$I_K = \oint p_K dq_K \qquad (K = 1, 2, \ldots, f), \tag{1}$$

где p_K — импульсы, канонически сопряженные с q_K, а интеграл, согласно правилам теории квантов, берется по полному циклу колебания координаты q_K. При этом условия того, чтобы рассматриваемая орбита системы была привилегированной с квантовой точки зрения, таковы:

$$I_1 = n_1 h, \qquad I_2 = n_2 h, \qquad \ldots, \qquad I_f = n_f h, \tag{2}$$

где $n_1, n_2, \ldots, n_f$ — целые числа. Пусть теперь наша система испытывает адиабатическое изменение, причем такое, что в каждый момент времени она продолжает допускать разделение переменных. Теорема Бюргерса утверждает, что интегралы $I_1, I_2, \ldots, I_f$ остаются постоянными во время такого изменения, т. е. что они являются адиабатическими инвариантами. И поэтому, если условия (2) удовлетворяются в начале изменения, то они будут удовлетворяться и в конце, так что адиабатический принцип имеет место.

В этой заметке на простом примере я собираюсь показать, что при таком адиабатическом изменении системы, при котором начальное и конечное состояния допускают разделение переменных, а промежуточные состояния — нет, интегралы I_K уже больше не являются адиабатическими инвариантами, и поэтому в этом случае адиабатический принцип лишается обоснования.

§ 2. Рассмотрим материальную точку, движущуюся на плоскости внутри прямоугольника; предположим, что на находящуюся внутри прямоугольника точку не действует никакая сила, но что при столкновении со стенками она упруго отскакивает от них. Возьмем стороны AB и AC прямоугольника в качестве осей x, y. Тогда очевидно, что эта система при таких координатах допускает разделение переменных. Действительно,

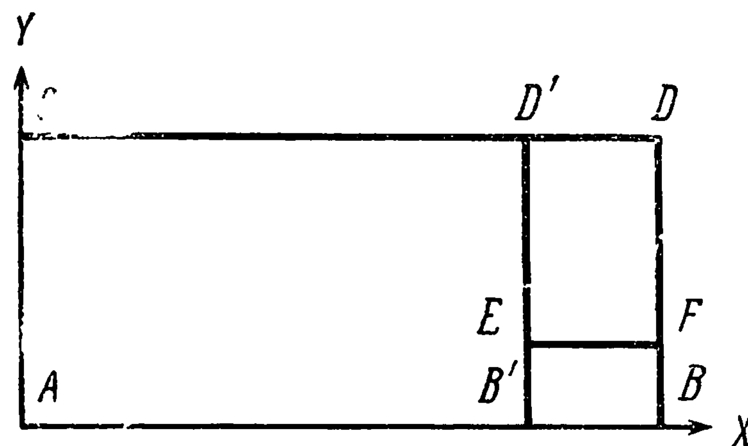
---

[2] Burgers. Versl. Akad. van Wetensch. Amsterdam, 1916, 1917; Ann. d. Phys., 1917, 52, 195.

[3] Для справедливости рассуждений Бюргерса достаточно того, чтобы система допускала введение угловых координат, т. е. чтобы вместо q_K, p_K можно было ввести новые переменные w_K, j_K, такие, что величины q_K, выраженные через (w_K, j_K), будут периодическими по w_K, с периодом 1, а энергия в новых координатах будет зависеть только от j. Тогда, вследствие уравнений Гамильтона, j оказываются постоянными, w — линейными функциями времени, а q как функции времени могут разлагаться в ряд Фурье с f индексами.

если обозначить через a, b длины сторон AB, AC, то координата x колеблется между значениями 0, a, а координата y — между значениями 0, b.

Далее, если в заданный момент времени компоненты скоростей равны u, v, то в любой последующий момент времени они будут $\pm u$, $\pm v$; при этом знак «+» или «—» зависит от того, увеличивается или уменьшается в рассматриваемый момент времени соответствующая координата.



Импульсы, сопряженные с x и y, будут равны $\pm mu$, $\pm mv$, где m — масса материальной точки; поэтому

$$I_x = \oint (\pm mu)\,dx = \int_0^a mu\,dx + \int_a^0 (-mu)\,dx = 2mua, \tag{3}$$

и аналогично

$$I_y = 2mvb. \tag{3′}$$

Исследуем, как меняются I_x и I_y при адиабатическом изменении нашей системы. Именно, мы собираемся модифицировать прямоугольник ABCD в прямоугольник AB′CD′; заметим, что такая модификация может быть выполнена тремя способами.

Во-первых, смещением отрезка BD параллельно самому себе, так чтобы конечное положение было B′D′.

Во-вторых, смещением отрезка BB′ параллельно самому себе, так чтобы конечное положение было DD′ (в промежуточный момент времени наша материальная точка может двигаться внутри многоугольника AB′EFDC).

В третьих, путем любой деформации ломаной линии B′BDD′, так чтобы ее конечное положение совпадало с отрезком прямой B′D′. Не будем рассматривать здесь довольно сложный последний случай и ограничимся обсуждением первых двух.

Что касается первого способа, заметим, что здесь в каждый момент времени материальная точка всегда движется внутри прямоугольника, и поэтому разделение переменных всегда возможно и в промежуточные моменты времени; при этом по теореме Бюргерса мы ожидаем, что I_x и I_y остаются неизменными. Для I_y это очевидно, поскольку ни b, ни v не меняются в процессе модификации, так что, согласно соотношению (3′), не меняется и I_y. Что же касается I_x, то a уменьшается в процессе модификации от a = AB до a' = AB′; однако одновременно, в результате отскаки-

вания от движущейся стенки, увеличивается u, причем, как это следует из простых рассуждений, произведение au остается неизменным [4]. Поэтому I_x также остается неизменным, конечно, при условии, что модификация выполнялась достаточно медленно.

Легко видеть, что во втором случае дело обстоит иначе. Сразу видно, что x-компонента скорости остается неизменной с точностью до знака, поскольку ее абсолютное значение могло бы измениться только вследствие соударения со стенкой, движущейся параллельно оси x, в то время как единственная движущаяся стенка EF движется параллельно y. Напротив, a уменьшается от AB до AB′. Итак, I_x уменьшается как a'/a, и поэтому не остается постоянным. Аналогично, не остается постоянным и I_y; действительно, b не меняется, в то время как v увеличивается вследствие соударений с движущейся стенкой EF. Количественная оценка показывает, что v, а значит, и I_y, растет как a/a'.

Итак, эти рассуждения приводят нас к выводу о том, что интегралы I_K являются адиабатическими инвариантами только в том случае, если в промежуточных состояниях система *всегда* допускает разделение переменных или, по крайней мере (согласно теоремам Бюргерса), всегда допускает введение угловых координат. Это утверждение в общем случае не является справедливым, если в промежуточных состояниях система не обладает многократно-периодическим движением.

С точки зрения теории квантов, кстати, нетрудно понять причину этого. Известно, что, согласно Бору, определенное квантование возможно только в том случае, когда движение системы имеет многократно периодический характер. Итак, если в промежуточных состояниях осуществляемой модификации наша система не может быть строго квантована, то эта неточность передается также и конечному состоянию.

Геттинген, февраль 1923 г.

---

[4] Действительно, число соударений с движущейся стенкой BD за интервал времени dt, очевидно, равно $\frac{u}{2a}dt$; с другой стороны, если V — скорость стенки BD, то увеличение скорости точки при каждом соударении будет $2V$; поэтому прирост u в течение времени dt будет

$$du = 2V\frac{u}{2a}dt = \frac{u}{a}Vdt = -\frac{u}{a}da,$$

поскольку, очевидно,— $da = Vdt$. Интегрируя предыдущее уравнение, находим $ua = \text{const}$, что как раз и утверждается в тексте.

К статье 11

Эта статья относится к группе работ по аналитической механике, которые Ферми выполнил за время своего пребывания в Геттингене. Д-р Дж. Уленбек любезно сообщил следующее: эта работа произвела впечатление на проф. П. Эренфеста, которому принадлежат глубокие исследования основ статистической механики. Он передал Уленбеку, уезжавшему на некоторое время в Рим, письмо для Ферми с целым рядом вопросов; вот таким путем в конце 1924 г. Уленбек впервые встретился с Ферми. Они остались друзьями на всю жизнь, и визиты Ферми в Анн Арбор учащались отчасти благодаря тому, что его друзья Уленбек и Гаудсмит были профессорами Мичиганского университета. Вероятно, этот контакт с Эренфестом побудил Ферми провести около трех месяцев в Лейдене.

Данное Ферми доказательство эргодической теоремы математически не является строгим, да и трудно сделать его строгим. Ряд недавних комментариев по этому вопросу и библиографические сведения приводятся, например, в книге C. L. Siegel. Vorlesungen über Himmelsmechanik. Springer, Berlin, 1956, p. 201.

Э. Сегре

11

I. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТОГО, ЧТО НОРМАЛЬНАЯ МЕХАНИЧЕСКАЯ СИСТЕМА В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ ЯВЛЯЕТСЯ КВАЗИЭРГОДИЧЕСКОЙ *

§ 1. Дана некая механическая система; Г — ее фазовое пространство, в котором координаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и соответствующие импульсы p_1, $p_2, \ldots, p_n$ изображаются некоторой точкой. Исходящая из точки P_0 пространства Г траектория таких изображающих точек будет полностью находиться на энергетической поверхности, которая проходит через P_0. Мы хотим доказать, что в общем случае эта траектория бесконечно близко подходит к любой точке такой энергетической поверхности, т. е. что наша система является квазиэргодической [1]. Точнее говоря, мы хотим доказать следующее.

---

* *Beweis, dass ein Mechanisches Normalsystem in Allgemeinen Quasi-ergodisch ist.* Phys. Zs., 1923, 24, 261—265.

[1] Как известно, система считается эргодической, если траектория проходит через все точки энергетической поверхности. Здесь стóит упомянуть, что Розенталь (Ann. d. Phys., 1913, 42, 179) и Планшерель (Ann. d. Phys., 1913, 42, 1061) доказывали невозможность каких-либо эргодических систем.

Пусть на энергетической поверхности E заданы две любые малые области; если эта поверхность состоит из нескольких частей, то эти области должны лежать на одной и той же части, так что оказывается возможным связать их линией, целиком лежащей на поверхности E. Я утверждаю, что вообще существуют траектории, которые проходят через обе области.

Для доказательства обобщим сначала теорему Пуанкаре.

§ 2. Именно Пуанкаре[2] доказал, что у канонической нормальной системы, вообще говоря, не может быть никаких других аналитических, однозначных, не зависящих от времени интегралов, кроме интеграла энергии $F = \text{const}$. Геометрически это означает, что в фазовом пространстве Γ помимо энергетической поверхности $F = \text{const}$, нет никакого другого семейства поверхностей, обладающих следующим свойством: траектория изображающих точек всегда проходит по той же поверхности, на которой лежит ее начальная точка. Мы хотим обобщить это положение, доказав, что кроме $F = \text{const}$ не существует не только никакого другого семейства поверхностей, но и вообще никакой другой поверхности, которой было бы свойственно следующее: все исходящие из некоторой ее точки траектории всегда остаются на этой поверхности. Таким образом, будет доказано, что в том случае, когда аналитическая однозначная поверхность обладает такими свойствами, она может совпадать, вообще говоря, лишь с поверхностью $F = \text{const}$ и только при $n > 2$.

§ 3. Поскольку наша механическая система является нормальной, вместо $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ можно ввести новые координаты $y_1, y_2, \ldots, y_n, x_1, x_2, \ldots, x_n$, для которых справедливо следующее:

1) энергия F не зависит от времени;

2) помимо координат x и y, энергия F содержит также и некий параметр μ, по степеням которого (при достаточно малых значениях μ) ее можно разложить в ряд, так что

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots, \tag{1}$$

где F_i — функции y и x;

3) положение системы, а следовательно, F и F_i, зависит от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ лишь периодически (с периодом 2π);

4) F_0 от x не зависит.

Предположим также, что поверхность S, описываемая уравнением $\Phi(x, y, \mu) = 0$, обладает упомянутым в конце § 2 свойством, и что Φ аналитична, однозначна и периодична по x. Положение поверхности S зависит от μ, и это обстоятельство будет отражено в обозначении — S_μ. Функцию Φ можно разложить по степеням μ и написать

$$\Phi = \Phi_0 + \mu\Phi_1 + \mu^2\Phi_2 + \ldots, \tag{2}$$

где Φ_i — функции x и y.

[2] H. Poincaré. Méth. nouv. de la méchanique céleste, vol. 1, C. 5.

Заметим, однако, что функции Φ_i определены не полностью, когда положение S_μ известно при всех μ. Действительно, если мы знаем S_μ при всех μ, то можно, например, представить y_1 следующим образом:

$$y_1 = f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \ldots,$$

где f_i — известные функции $y_2, \ldots, y_n, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Подставим в Φ это выражение для y_1; при этом Φ должно тождественно обращаться в нуль. Но Φ можно разложить по степеням μ; в результате находим

$$\Phi_{y_1 = f_0 + \mu f_1 + \ldots} = [\Phi_0] + \mu \left[f_1 \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_1} + \Phi_1 \right] +$$

$$+ \mu^2 \left[\frac{f_1^2}{2} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y_1^2} + f_2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_1} + f_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} + \Phi_2 \right] + \ldots = 0,$$

где выражения в квадратных скобках следует вычислять при $y_1 = f_0$, т. е. на поверхности S_0. Все коэффициенты при степенях μ должны обращаться в нуль, так что для функций Φ_i находим следующие условия:

$$[\Phi_0] = 0,$$

$$[\Phi_1] = -f_1 \left[\frac{\partial \Phi_0}{\partial y_1} \right],$$

$$[\Phi_2] = -\frac{f_1^2}{2} \left[\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y_1^2} \right] - f_2 \left[\frac{\partial \Phi_0}{\partial y_1} \right] - f_1 \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} \right],$$

. . . .

. . . .

В силу первого из этих условий функция Φ_0 должна обращаться в нуль на поверхности S_0. За пределами этой поверхности функцию Φ_0 можно выбрать совершенно произвольным образом; благодаря этому на поверхности S_0 функция Φ_1 будет определяться из условия 2 и оставаться совершенно произвольной вне S_0. После того, как за пределами S_0 функция Φ_1 выбрана произвольной, функция Φ_2 на поверхности S_0 будет определяться условием 3 и т. д.

Теперь я утверждаю, что функцию Φ_0 можно всегда считать не зависящей от x. Для этого достаточно доказать, что все точки, имеющие общую координату y с одной из точек поверхности S_0, тоже принадлежат S_0.

Так как P_0 является точкой поверхности S_0, последняя должна содержать всю траекторию системы (исходящую из точки P_0) при $\mu = 0$. Поскольку же F_0 не содержит координат x, все точки этой траектории имеют те же самые значения y, что и P_0, тогда как координаты x представляют собой линейные функции времени. В n-мерном пространстве координаты x являются, следовательно, прямыми линиями. Однако, пользуясь предполагаемым свойством периодичности x, можно все точки этих прямых

поместить внутри куба со стороной 2π. Этот куб, как известно, будет плотно заполнен точками, если между

$$\frac{\partial F_0}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial F_0}{\partial y_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F_0}{\partial y_n}$$

не существует никакого линейного соотношения с целочисленными коэффициентами. Далее можно будет всегда предполагать, что любое соотношение типа

$$m_1 \frac{\partial F_0}{\partial y_1} + m_2 \frac{\partial F_0}{\partial y_2} + \ldots + m_n \frac{\partial F_0}{\partial y_n} = 0 \tag{3}$$

не выполняется тождественно, т. е. невозмущенная система является невырожденной. Если же на поверхности S_0 уравнение (3) оставалось бы справедливым тождественно, то оно оказалось бы следствием равенства $\Phi_0 = 0$, и, таким образом, можно было бы в силу произвольности Φ_0 всегда положить

$$\Phi_0 = \sum_i m_i \frac{\partial F_0}{\partial y_i};$$

отсюда следовало бы, что Φ_0 не содержит x.

Когда же ни одно соотношение типа (3) на S_0 тождественно не выполняется, упомянутый куб, вообще говоря, плотно заполняется принадлежащими S_0 точками и должен, поэтому, содержаться в S_0; таким путем проводится доказательство в этом случае.

§ 4. Свойство S_μ можно выразить аналитически благодаря тому, что уравнение [3]

$$[F, \Phi] = 0 \tag{4}$$

является следствием другого уравнения

$$\Phi = 0. \tag{5}$$

Таким образом, с помощью уравнения (5) можно найти, например, y_1 как функцию $y_2, \ldots, y_n, x_1, x_2, \ldots, x_n, \mu$, а найденное значение подставить в (4) и разложить по степеням μ. Далее, коэффициенты при всех степенях μ должны тождественно равняться нулю. Теперь же, однако, тождественно имеет место соотношение $[F_0, \Phi_0] = 0$, поскольку F_0, как и Φ_0, не содержит x. Поэтому первым членом в разложении (4), вычисленным на по-

---

[3] Относительно свойств используемых здесь символов $[F, \Phi]$ см. H. Poincaré. Цит. соч.; $[F, \Phi]$ представляет собой сокращенную форму записи выражения

$$\sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \right).$$

верхности S_0, будет $\mu([F_0, \Phi_1] + [F_1, \Phi_0])$. Следовательно, на S_0 должно выполняться равенство

$$[F_0, \Phi_1] + [F_1, \Phi_0] = 0. \tag{6}$$

Из периодичности F_1 и Φ_1 следует, что можно положить

$$\Phi_1 = \sum_m A_m e^{\Theta_m}, \qquad F_1 = \sum_m B_m e^{\Theta_m},$$

где A_m и B_m — функции y, Θ_m обозначает выражение

$$i\,(m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n),$$

а m записывается вместо n индексов $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$. После простых вычислений уравнение (6) принимает вид:

$$\sum_m e^{\Theta_m}\left(A_m \sum_i m_i \frac{\partial F_0}{\partial y_i} - B_m \sum_i m_i \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_i}\right) = 0.$$

Это соотношение должно выполняться, если, например, подставить вместо y_1 его значение, определяемое уравнением

$$\Phi_0(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0.$$

Таким образом, все коэффициенты при $e^{\Theta m}$ должны равняться нулю, т. е.

$$A_m \sum_i m_i \frac{\partial F_0}{\partial y_i} = B_m \sum_i m_i \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_i}\,; \tag{7}$$

отсюда следует, что если в какой-либо точке поверхности $S_0 \sum m_i \frac{\partial F_0}{\partial y_i} = 0$, то должно выполняться и равенство $\sum m_i \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_i} = 0$, поскольку, вообще говоря [4], $B_m \neq 0$.

Теперь нам нужно выяснить, равно ли число степеней свободы 2 или оно больше 2. Когда $n = 2$, вполне может оказаться, что уравнение поверхности S_0 имеет вид $(\omega_2/\omega_1) - \alpha = 0$, где мы положили $\omega_i = \partial F_0/\partial x_i'$, а α есть любое иррациональное число. В этом случае невозможно найти два целых числа m_1 и m_2, таких, чтобы в какой-либо точке S_0 выполнялось соотношение $m_1\omega_1 + m_2\omega_2 = 0$; тогда можно положить, что на поверхности S_0

$$A_m = \frac{B_m}{m_1\omega_1 + m_2\omega_2} \sum_i m_i \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_i}\,,$$

---

[4] Вполне могло бы случиться, что один из коэффициентов B_m на поверхности S_0 равен 0. Но это, как легко видеть, не повлияло бы на последующие результаты. По этому вопросу также см.: H. Poincaré. Цит. соч.

поскольку знаменатель всегда отличен от нуля. Выберем A_m за пределами S_0 произвольным образом, так что функция Φ_1 оказывается определенной. Легко видеть, что подобный метод, по крайней мере формально, мог бы привести к определению функций Φ_2, Φ_3, ... Остается еще вопрос сходимости полученных подобным путем рядов. Однако не исключено, что при достаточно быстром убывании B_m по мере роста m и при некоторых особых значениях α эти ряды действительно сходятся. Как явствует из этого, в случае $n = 2$ не исключено, вообще говоря, что помимо энергетических поверхностей имеется еще больше — возможно, бесконечно много — поверхностей, обладающих упомянутым в конце § 2 свойством.

§ 5. Совсем иначе обстоит дело в случае $n > 2$. Допустим, например, что $n = 3$; конечный результат справедлив, однако, и для $n = 4$, 5....

Вообще говоря, из трех отношений ω_2/ω_1, ω_3/ω_1, ω_3/ω_2 постоянным на поверхности S_0 может быть, по крайней мере, одно, и поэтому мы всегда сможем предположить, что ω_2/ω_1 и ω_3/ω_1, например, не являются константами на S_0. При этом S_0 оказывается плотно заполненной точками, для которых, например ω_2/ω_1, принимает рациональные значения; в какой-то другой такой же точке можно найти два целых числа, для которых $m_1\omega_1 + m_2\omega_2 = 0$. Это значит, что в той же точке $m_1 \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_1} + m_2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_2} = 0$, откуда

$$\omega_2 : \omega_1 = \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_2} : \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_1}.$$

Поскольку же это уравнение справедливо в бесконечном множестве точек, плотно заполняющих S_0, оно, очевидно, удовлетворяется на S_0. Подобным же образом доказывается, что на поверхности S_0 тождественно справедливо и уравнение

$$\omega_3 : \omega_1 = \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_3} : \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_1}.$$

Следовательно, на поверхности S_0 частные производные Φ_0 по y_i пропорциональны производным F_0. Но это может иметь место лишь тогда, когда при $\Phi_0 = 0$ $F_0 = \text{const}$, скажем, $F_0 = -c_0$. Поэтому можно положить — в силу произвольности Φ_0 вне S_0 — во всем пространстве $\Phi_0 = F_0 + c_0$. Далее, вследствие такого определения S_0 ни одно выражение типа $\Sigma m_i\ (\partial F_0/\partial x_i)$ не может, вообще говоря, тождественно обращаться в нуль на S_0, если только не имеет места условие $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = 0$. Поэтому на поверхности S_0 можно поделить равенство (7) на $\Sigma m_i\ (\partial F_0/\partial y_i) = \Sigma m_i\ (\partial \Phi_0/\partial y_i)$ и найти, что $A_m = B_m$, когда не все $m_i = 0$. Отсюда следует, что на поверхности S_0 разность $\Phi_1 - F_1$ не может зависеть от x_1, x_2, ..., x_n; поскольку же мы можем выбрать Φ_1 за пределами S_0 произвольным образом, для всего пространства можно положить

$$\Phi_1(x, y) = F_1(x, y) + f_1(y_1, \ldots, y_n), \qquad \Phi_0(y) = F_0(y) + c_0. \tag{8}$$

§ 6. Предположим теперь, что для некоторого r доказано, что во всем пространстве

$$\left.\begin{aligned} \Phi_r &= F_r + f_r(y_1, \ldots, y_n), \\ \Phi_{r-1} &= F_{r-1} + c_{r-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_1 &= F_1 + c_1, \\ \Phi_0 &= F_0 + c_0; \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

я утверждаю, что в этом случае аналогичные уравнения справедливы и для $r+1$. Так как при $r = 1$ уравнения (9) переходят в уравнения (8), нужно будет доказать, тем самым, что при других r всегда $\Phi_r - F_r = \text{const}$. По этой причине при каких-то других μ S_μ может совпадать лишь с энергетической поверхностью.

Из уравнений (9) следует, что первые $r+1$ членов разложения (4) тождественно равны нулю, а коэффициент при μ^{r+1} есть просто

$$[F_0, \Phi_{r+1}] + [F_1, f_r] + [F_{r+1}, F_0] = [F_0, \Phi_{r+1} - F_{r+1}] - [f_r, F_1]. \tag{10}$$

На поверхности S_0 это выражение должно обращаться в нуль. Мы поступим с ним совершенно так же, как и с уравнением (6), после чего найдем, что на поверхности S_0 частные производные f_r пропорциональны частным производным F_0; так как на S_0 функция F_0 является константой, то и f_r должна быть константой. Поскольку же, однако, f_r произвольна вне S_0, можно положить ее равной некоторой константе c_r во всем пространстве.

Равенство (10) приобретает теперь простой вид: $[F_0, \Phi_{r+1} - F_{r+1}] = 0$. Положим, что

$$\Phi_{r+1} - F_{r+1} = \sum_m C_m e^{\Theta_m};$$

тогда на поверхности S_0

$$\sum_m e^{\Theta_m} C_m \sum_i m_i \frac{\partial F_0}{\partial y_i} = 0,$$

т. е. все коэффициенты при e^{Θ_m} должны равняться нулю. Выражение $\sum_i m_i (\partial F_0/\partial y_i)$ может, вообще говоря, тождественно обращаться в нуль на S_0 лишь в том случае, если $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = 0$, так что отличным от нуля может быть только $C_{0,0,\ldots,0}$. Допустим теперь, что

$$C_{0,0,\ldots,0} = f_{r+1}(y_1, \ldots, y_n)$$

и на S_0 будет иметь место равенство

$$\Phi_{r+1} = F_{r+1} + f_{r+1}(y_1, \ldots, y_n).$$

Благодаря произвольности Φ_{r+1} за пределами S_0, это равенство можно обобщить на все пространство, и тем самым доказательство полностью завершено.

§ 7. Теперь мы в состоянии доказать — с помощью простых геометрических рассуждений,— что механическая нормальная система является в общем случае квазиэргодической. Но прежде чем идти дальше, сопоставим условия [5], при которых справедлива обобщенная теорема Пуанкаре:

1. Число степеней свободы должно быть больше 2.
2. Невозмущенная система не может быть вырожденной.
3. Ни из одного равенства типа, например, $\omega_2/\omega_1 = \text{const}$, не может тождественно следовать аналогичное равенство, например, $\omega_4/\omega_3 = \text{const}$.
4. Выражение $\sum\limits_i m_i\omega_i$ не может тождественно равняться нулю ни на какой поверхности $F_0 = \text{const}$, если не выполняется условие

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_n = 0.$$

5. Ни на одной из поверхностей $F_0 = \text{const}$ из условия $\sum\limits_i m_i\omega_i = 0$, вообще говоря, не может следовать также и равенство $B_m = 0$.

§ 8. Определим теперь нашу систему снова через q и p. Пусть σ — произвольная область на энергетической поверхности E, а σ' — область поверхности E, заполненная траекториями, которые проходят через σ. Я утверждаю, что σ' полностью покрывает часть поверхности E, связанную с σ. Если это не так, то обозначим через σ'' оставшуюся область той части поверхности E, которая связана с σ, а через S — поверхность раздела σ' и σ''. Далее, ни одна из траекторий системы, включающая в себя точку P' области σ', не может содержать также и точку P'' области σ''. В противном же случае изображающая точка, которая в момент времени $t = 0$ находится в P', в момент времени t оказалась бы, например, в точке P''; но при этом в силу непрерывности решений уравнений механики можно найти достаточно малую область η' вокруг точки P', целиком содержащуюся в σ'; область η' такова, что в момент времени t все ее точки находятся в лежащей вокруг точки P'' области η'', которая полностью входит в σ''. Но через η' проходят, конечно, также и траектории, идущие через σ, и если они проходят также и через η'', то тогда η'' может не полностью лежать в σ''.

Пусть теперь точка P лежит на поверхности S, а P' и P'' — на поверхностях σ' и σ'' соответственно. По прошествии времени t точки P, P', P'' приходят соответственно в P_1, P_1', P_1''; точки P_1', P_1'' будут лежать соответ-

---

[5] В сущности эти условия справедливости доказательства являются достаточными, но не необходимыми. Из доказательства можно было бы легко найти также и действительно необходимые условия его законности.

ственно на σ' и σ''. Допустим, что P' и P'' бесконечно близко подходят к P. В силу непрерывности P_1' и P_1'' также будут стремиться к P_1, но они всегда должны оставаться на σ' и σ'' соответственно, а это может происходить лишь тогда, когда P_1 лежит на поверхности раздела S. Отсюда следует, что всякая траектория, которая проходит через любую точку P поверхности S, полностью лежит на S. Однако мы знаем, что кроме энергетических поверхностей, других таких поверхностей [6], вообще говоря, нет. Поэтому σ' должна покрывать часть поверхности E, полностью связанную с σ.

§ 9. Допустим, что имеются две любые малые области σ и σ^*, лежащие на одной и той же части поверхности E. Траектории, которые проходят через σ, будут, как мы доказали, покрывать всю эту часть E, а следовательно, и σ^*. Ясно, что существуют также и траектории, которые проходят через обе области, т. е. система является квазиэргодической.

Геттинген, апрель 1923 г.

II. О СУЩЕСТВОВАНИИ КВАЗИЭРГОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ *

В этом томе «Physikalische Zeitschrift» [1924, 25, 47] г-н В. Урбанский опубликовал критические замечания о моем доказательстве существования квазиэргодических систем [7]. Он критикует два пункта.

1. То, что в моем доказательстве предполагаются свойства регулярности S-поверхности, которые не могут быть выполнены.

2. То, что из моего доказательства можно сделать заключение о существовании квазиэргодической траектории, но не о существовании многих траекторий.

Относительно первого пункта я бы хотел заметить, что в принципе критика г-на Урбанского является безусловно правильной. В примечании на стр. 265 своего доказательства [8] я сам отметил ту трудность, что S-поверхность может быть нерегулярна; я бы хотел только заметить, что эта

* *Über die Existenz Quasi-ergodischer Systeme.* Phys. Zeits., 1924, 25, 166—167.
[6] Разумеется, для этих поверхностей нужно принять использовавшиеся ранее свойства регулярности.— *Прим. при корректуре.*
[7] E. Fermi. Phys. Zeit., 1923, 24, 261. (Часть I этой статьи. — *Ред.*).
[8] Примечание 6 на стр. 123.— *Ред.*

трудность, пожалуй, не столь уж велика, как это представляется г-ну Урбанскому. В самом деле, как легко видеть из моего доказательства, функция $\Phi(x, y, \mu)$ должна быть аналитической только по переменной μ; поэтому свойства S-поверхности ограничены гораздо меньше, чем в том случае, когда Φ была бы аналитической функцией по всем переменным.

В связи со вторым пунктом я хотел бы заметить, что собирался доказать лишь следующее: если σ и σ^* суть две произвольные малые области, лежащие на односвязной части поверхности E, то всегда существует, по крайней мере, одна траектория системы, которая проходит через обе области. При этом необходимо, чтобы обе области были конечны. Если же в действительности одна из двух областей, например σ^*, была бы точечной, то вполне могло бы оказаться, что она лежит на какой-то периодической траектории. И в этом случае через эту точку проходила бы только эта замкнутая траектория.

Таким образом, в моем доказательстве под квазиэргодической системой понимается система, для которой существуют траектории, сколь угодно близко приближающиеся к двум любым точкам односвязной энергетической поверхности; г-н Урбанский же считает, если я его правильно понял, что это такая система, все траектории которой плотно заполняют энергетическую поверхность.

Я подозреваю даже, что вообще не существует никаких систем, которые были бы квазиэргодическими в этом последнем смысле. И действительно, по самому определению, такие системы не могли бы включать, например, никаких периодических траекторий.

Рим, 3 марта 1924 г.

См. вводные замечания к статье 10

12

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ, ВАЖНЫЕ ДЛЯ ТЕОРИИ КВАНТОВ *

§ 1. Как известно, адиабатический принцип Эренфеста [1] утверждает, что если механическая система находится на квантовой орбите и ее «механизм», т. е. силы или связи, изменяется бесконечно медленно, то система в процессе всего перехода удерживается на привилегированной с квантовой точки зрения орбите.

Чтобы этот принцип имел определенный смысл, очевидно, конечная орбита системы должна зависеть только от конечного механизма, а не от того, через какую последовательность промежуточных механизмов она проходила во время перехода. Что это действительно так, показано Бюргерсом [2], во всяком случае, для почти единственного типа систем, рассмотренного до сих пор в квантовой теории, а именно, для тех систем, которые допускают разделение переменных или, по крайней мере, введение угловых координат [3]; движение последних систем всегда можно рассматривать как результат периодических движений с числом периодов, в общем случае равным количеству степеней свободы, а в случае вырождения — меньшим его. Но как раз в настоящее время, когда изучение относительно более простых атомных структур, принадлежащих к этому типу [4], заканчивается, возникает все больше и больше проблем, в которых системы не допускают введения угловых координат; это прежде всего проблема трех тел (она встречается при изучении атома гелия) и упрощенная проблема четырех тел (она встречается при изучении молекул водорода). Как известно, попытки свести (с помощью различных способов) исследования этих систем к изучению систем, допу кающих введение угловых координат, пока не увенчались успехом. Поэтому желательно выяснить, возможно ли и в

---

* *Alcuni teoremi di meccanica analitica importanti per la teoria dei quanti.* Nuovo Cimento, 1923, 25, 271—285.

[1] P. Ehrenfest. Ann. d. Phys., 1916, 51, 237.

[2] Burgers. Versl. Akad. Wetensch., Amsterdam, 1916, 25 nov.; Ann. d. Phys. 1917, 52, 195; Phil. Mag., 1917, 33, 54.

[3] См., например: A. Sommerfeld. Atombau und Spektrallinien. III ed. Zusatz 7. (См. перевод с изд. 1951 г.: А. Зоммерфельд. Строение атома и спектры. М., 1956, т. I. Приложение 7.— *Ред.*).

[4] К таким структурам относится атом водорода и различные его возмущения (эффекты Зеемана и Штарка, тонкая структура), а также ион молекулы водорода H_2^+ в отсутствие вращения ядер.

каких пределах расширение адиабатического принципа на случай общих систем с надеждой, что оно может дать сведения, помогающие в поисках правил нахождения привилегированных орбит этих более общих систем.

§ 2. Прежде всего следует классифицировать системы, которые мы намерены изучить. Для этого будем использовать обычное геометрическое представление состояния системы через изображающую точку в $2f$-мерном пространстве Г. Координаты точки в этом пространстве — f обобщенных координат системы $q_1, q_2, \ldots, q_f$ и f соответствующих сопряженных импульсов $p_1, p_2, \ldots, p_f$. Через каждую точку этого пространства проходит определенная траектория, соответствующая движению системы, положение и начальные скорости которой определены этой точкой. Предположим, что силы и связи системы не зависят от времени и что силы имеют потенциал, так что энергия есть интеграл движения. Назовем гиперповерхностями E гиперповерхности постоянной энергии; через каждую точку пространства Г проходит одна из гиперповерхностей E, на которой (вследствие сохранения энергии) находится исходящая из точки траектория.

Так называемые квазиэргодические [5] механические системы обладают тем свойством, что траектория в общем случае проходит в бесконечной близости к каждой точке гиперповерхности E, так что она плотно заполняет многообразие $2f - 1$ измерений.

Но может оказаться, что наша система, кроме интеграла энергии, допускает некий другой однородный первый интеграл, не зависящий от времени; тогда многообразие, заполненное траекторией, естественно, будет обладать меньшим числом измерений. Итак, предположим, что наша система имеет всего m однородных первых интегралов, не зависящих от времени:

$$\Phi_1(p, q) = c_1, \ \Phi_2 = c_2, \ \ldots, \ \Phi_m = c_m,$$

где c_i — произвольные постоянные. Тогда через каждую точку пространства Г будет проходить многообразие $2f - m$ измерений G, являющееся пересечением m гиперповерхностей $\Phi_i = c_i$; траектория, проходящая через эту точку, будет целиком содержаться в G.

В многообразии G, вообще говоря, уже невозможно найти подмногообразие, содержащее всю траекторию; более того, по аналогии с квазиэргодическими системами, мы допустим, что для систем, изучаемых нами, все многообразие G будет плотно заполнено траекторией, т. е. что последняя проходит бесконечно близко ко всем точкам G. Таким образом, траектория будет характеризоваться, по крайней мере, статистически, только соответствующими ей значениями $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m$.

Поэтому назовем эти значения *характеристиками траектории*.

---

[5] Автор недавно доказал, что нормальные механические системы в общем случае являются квазиэргодическими, так что здесь речь идет о самом распространенном случае.

Итак, квазиэргодическая система обладает только одной характеристикой — энергией.

Система с не зависящей от времени энергией, допускающая разделение переменных, в общем случае имеет столько характеристик, сколько степеней свободы, соответствующих f константам полного интеграла Якоби; большее число характеристик может существовать только в случаях вырождения, в которых между фундаментальными частотами имеются линейные соотношения с целыми коэффициентами. Рассмотрим, например, движение на плоскости точки, которая притягивается к двум ортогональным прямым с силой, пропорциональной расстоянию от них. Если два коэффициента притяжения несоизмеримы, то точка описывает на плоскости незамкнутую кривую Лиссажу.

И в четырехмерном пространстве Г изображающая точка плотно исчерчивает двумерную поверхность G. При этом система имеет две характеристики. В качестве их можно принять, например, энергии проекций точки на две перпендикулярные прямые. Если же коэффициенты притяжения соизмеримы, то кривая Лиссажу вырождается в замкнутую кривую, и поэтому многообразие G становится одномерным, что соответствует трем характеристикам.

§ 3. Предположим далее, что по своему желанию мы можем варьировать силы или связи системы, иными словами, то, что П. Герц [6] удачно назвал *механизмом* системы. Если изменять механизм бесконечно медленным способом, то мы получим так называемый адиабатический переход. В § 5 без труда будет найдена система дифференциальных уравнений, показывающая, каким образом меняются характеристики системы при адиабатическом изменении некоторого параметра μ, функцией которого и является механизм. Но, как уже упоминалось, для того чтобы можно было говорить о применении принципа Эренфеста к данной системе, значения, которые принимают ее характеристики в конце адиабатического перехода, должны зависеть только от конечного механизма, а не от промежуточных механизмов, через которые она проходила. Чтобы изучить этот вопрос, далее мы предположим, что механизм зависит от двух параметров λ и μ, а не от одного. Зависимость характеристик от λ и μ тогда, естественно, будет выражена системой уравнений в полных дифференциалах, а не системой обыкновенных дифференциальных уравнений; и условия для того, чтобы конечные значения характеристик не зависели от пройденного во время перехода пути в плоскости λ, μ, совпадают поэтому с условиями полной интегрируемости этой системы. Мы докажем, что эти условия фактически выполняются для квазиэргодических систем, а не для систем, имеющих более одной характеристики, хотя есть важные исключения.

---

[6] P. Herz. Ann. d. Phys., 1910, 33, 225, 537; Weber, Gans. Repertorium der Physik, 1916, 1, 2. В этих работах можно найти некоторое пояснение к статистической части нашей статьи.

§ 4. Изучению адиабатических изменений предпошлем некоторые формулы, позволяющие вычислить вероятность того, что в любой момент времени изображающая точка находится в принадлежащем многообразию G элементе. Для единообразия обозначим координаты в Г через $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_{2f}$ вместо $q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_f$. Наша задача тогда может быть сформулирована следующим образом: необходимо найти вероятность того, что в некоторый момент времени координаты $x_1, x_2, \ldots, x_{2f-m}$ принимают значения соответственно между x_1 и $x_1 + dx_1$, x_2 и $x_2 + dx_2, \ldots, x_{2f-m}$ и $x_{2f-m} + dx_{2f-m}$, в то время как m остальных координат x, естественно, принимают значения, соответствующие принадлежности изображающей точки многообразию G.

Далее, как известно из статистической механики, чтобы распределение точек в пространстве Г было стационарным, согласно теореме Лиувилля, требуется постоянство их плотности на каждой из G.

Элемент объема Г можно выразить через $dx_1, dx_2, \ldots, dx_{2f}$; выбирая в качестве новых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{2f-m}, \Phi_1, \ldots, \Phi_m$, его можно записать в виде

$$\frac{1}{D} dx_1 \ldots dx_{2f-m}\, d\Phi_1 \ldots d\Phi_m,$$

где через D обозначен функциональный детерминант $\dfrac{\partial(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)}{\partial(x_{2f-m+1}, \ldots, x_{2f})}$. Поскольку во время движения $d\Phi_1, d\Phi_2, \ldots, d\Phi_m$, конечно, остаются постоянными, то упомянутый элемент объема будет пропорционален $\frac{1}{D} dx_1\, dx_2 \ldots dx_{2f-m}$.

Искомая вероятность поэтому также пропорциональна этому выражению; и, поскольку полная вероятность, конечно, равна единице, найдем, наконец, что интересующая нас вероятность равна

$$\frac{d\sigma}{D} : \int \frac{d\sigma}{D}. \tag{1}$$

Здесь для краткости мы положили $d\sigma = dx_1 dx_2 \ldots dx_{2f-m}$; интеграл распространяется на все те значения $x_1, x_2, \ldots, x_{2f-m}$, которые соответствуют точкам G.

Прежде чем обратиться к другим аргументам, хотелось бы еще получить формулу, которая будет полезна нам для случая квазиэргодических систем. В этом случае G — гиперповерхность, и мы будем предполагать для простоты, что она замкнута, причем только в одной точке пересекается радиусами-векторами, исходящими из внутреннего по отношению к ней полюса (общее рассмотрение хотя и не отличается по существу от нашего, но приводит к значительно более сложным расчетам). Отнесем пространство Г к системе полярных координат, характеризуя каждую его точку с помощью радиуса-вектора и его следа на гиперсфере единичного радиуса, описанной вокруг полюса. Обозначим через H единственную характеристику, т. е. энергию. Согласно вышесказанному, вероятность того, что

в некоторый момент времени изображающая точка находится внутри элемента телесного угла $d\omega$, пропорциональна гиперобъему, заключенному между двумя гиперповерхностями $H(x_1, \ldots, x_{2f}) = H$ и $H(x_1, \ldots, x_{2f}) = H + dH$, и телесному углу $d\omega$. Этот объем с точностью до постоянного множителя dH, очевидно, равен $\frac{r^{2f-1}\,d\omega}{H_r}$, где $H_r = \partial H/\partial r$; поскольку полная вероятность должна равняться 1, искомая вероятность есть

$$\frac{r^{2f-1}\,\frac{d\omega}{H_r}}{\int r^{2f-1}\,\frac{d\omega}{H_r}}, \tag{2}$$

где интеграл распространяется на всю единичную сферу.

§ 5. В этом параграфе будем предполагать, что механизм нашей системы является функцией некоторого параметра μ; мы намерены изучить, как меняются характеристики при адиабатическом изменении этого параметра. Поскольку механизм зависит от μ, в общем случае и характеристики $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m$, кроме того, что они зависят от p и q, будут зависеть также и от μ. Итак, если в заданный момент времени параметр μ изменяется на $d\mu$, то характеристика Φ_i будет соответственно испытывать изменение $\frac{\partial \Phi_i}{\partial \mu}\,d\mu$. А так как изменение адиабатическое, то, чтобы получить эффективное изменение Φ_i, следует принять среднее значение этого выражения, которое в соответствии с результатами предыдущего параграфа оказывается равным

$$d\mu\,\frac{\int \frac{\partial \Phi_i}{\partial \mu}\,\frac{d\sigma}{D}}{\int \frac{d\sigma}{D}} \tag{3}$$

и уже зависит только от μ и $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$. Поэтому зависимость характеристик от μ при некотором адиабатическом изменении выражается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\Phi_1}{d\mu} = \frac{\int \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mu}\,\frac{d\sigma}{D}}{\int \frac{d\sigma}{D}}, \qquad \frac{d\Phi_2}{d\mu} = \frac{\int \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mu}\,\frac{d\sigma}{D}}{\int \frac{d\sigma}{D}}, \ldots, \qquad \frac{d\Phi_m}{d\mu} = \frac{\int \frac{\partial \Phi_m}{\partial \mu}\,\frac{d\sigma}{D}}{\int \frac{d\sigma}{D}}. \tag{4}$$

Если известны значения величин Φ, например при $\mu = 0$, то интегрирование этой системы даст нам их значения для произвольного μ. В частном случае квазиэргодических систем система уравнений (4) сводится

к единственному уравнению

$$\frac{dH}{d\mu} = \frac{\int \frac{H_\mu}{H_r} r^{2f-1}\, d\omega}{\int \frac{d\omega}{H_r} r^{2f-1}}, \tag{5}$$

где положено $H_\mu = \partial H/\partial\mu$.

§ 6. Далее мы хотим исследовать, в каких случаях конечные значения характеристик не зависят от пути, пройденного при адиабатическом переходе от начального механизма к конечному. С этой целью представим механизм системы как функцию двух параметров λ и μ. Если адиабатически изменить эти два параметра соответственно на $d\lambda$ и $d\mu$, то рассуждения такие же, как в предыдущем параграфе, показывают, что соответствующее изменение характеристик есть:

$$d\Phi_i = \frac{\int \frac{\partial\Phi_i}{\partial\lambda} \frac{d\sigma}{D}}{\int \frac{d\sigma}{D}} d\lambda + \frac{\int \frac{\partial\Phi_i}{\partial\mu} \frac{d\sigma}{D}}{\int \frac{d\sigma}{D}} d\mu \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{6}$$

Здесь коэффициенты при $d\lambda$ и $d\mu$, очевидно, зависят только от λ, μ, $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$, и поэтому m уравнений (6) представляют собой систему уравнений в полных дифференциалах; если она вполне интегрируема, то конечные значения величины Φ фактически не будут зависеть от пути, проходимого во время перехода; в противном случае это несправедливо.

Докажем, что для квазиэргодических систем условие полной интегрируемости удовлетворяется. Для них система (6) действительно сводится к единственному уравнению в полных дифференциалах, аналогичному (5):

$$dH = L\, d\lambda + M\, d\mu, \tag{7}$$

где

$$L = \frac{\int \frac{r^{2f-1} H_\lambda\, d\omega}{H_r}}{\int \frac{r^{2f-1}\, d\omega}{H_r}}, \qquad M = \frac{\int \frac{r^{2f-1} H_\mu\, d\omega}{H_r}}{\int \frac{r^{2f-1}\, d\omega}{H_r}}, \tag{8}$$

так что L и M суть функции λ, μ и H. Для полной интегрируемости уравнения (7), как известно, необходимо и достаточно, чтобы полные производные L по μ и M по λ были равны между собой. Итак, должно быть

$$\frac{\partial L}{\partial\mu} + M \frac{\partial L}{\partial H} = \frac{\partial M}{\partial\lambda} + L \frac{\partial M}{\partial H}. \tag{9}$$

Доказательство справедливости этого равенства начнем с вычисления первого члена. Для этого предположим, что H и μ испытывают независи-

мые вариации δH, $\delta\mu$, а λ не варьируется; тогда

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial H}\,\delta H + \frac{\partial L}{\partial \mu}\,\delta\mu. \tag{10}$$

С другой стороны, первое из равенств (8) дает:

$$\delta L = \frac{1}{\left(\int \frac{r^{2f-1}\,d\omega}{H_r}\right)^2}\left\{\left(\int \frac{r^{2f-1}\,d\omega}{H_r}\right)\delta\int \frac{r^{2f-1}H_\lambda\,d\omega}{H_r} - \left(\int \frac{r^{2f-1}H_\lambda\,d\omega}{H_r}\right)\delta\int \frac{r^{2f-1}\,d\omega}{H_r}\right\}. \tag{11}$$

При вычислении двух вариаций интегралов, содержащихся в фигурных скобках, можно поменять местами знаки δ и $\int$ ввиду постоянства пределов интегрирования, так как интеграл должен быть распространен на всю единичную гиперсферу. Поэтому

$$\delta\int \frac{r^{2f-1}\,d\omega}{H_r} = (2f-1)\int \frac{r^{2f-2}\delta r\,d\omega}{H_r} - \int \frac{r^{2f-1}\delta H_r\,d\omega}{H_r^2}. \tag{12}$$

С другой стороны, поскольку след на единичной сфере остается неизменным, имеем

$$\delta H = H_r\delta r + H_\mu\delta\mu,$$

откуда

$$\delta r = \frac{\delta H}{H_r} - \frac{H_\mu}{H_r}\,\delta\mu,$$

а также

$$\delta H_r = H_{rr}\delta r + H_{r\mu}\delta\mu = \frac{H_{rr}}{H_r}\,\delta H + \left(H_{r\mu} - \frac{H_{rr}H_\mu}{H_r}\right)\delta\mu.$$

Подставляя эти выражения для δr, δH_r в соотношение (12), находим

$$\delta\int \frac{r^{2f-1}\,d\omega}{H_r} = \delta H\left\{(2f-1)\int \frac{r^{2f-2}\,d\omega}{H_r^2} - \int \frac{r^{2f-1}H_{rr}\,d\omega}{H_r^3}\right\} -$$
$$- \delta\mu\left\{(2f-1)\int \frac{r^{2f-2}H_\mu\,d\omega}{H_r^2} + \int \frac{r^{2f-1}\,d\omega}{H_r^2}\left(H_{\mu r} - \frac{H_\mu H_{rr}}{H_r}\right)\right\}.$$

Совершенно аналогично находим

$$\delta\int \frac{r^{2f-1}H_\lambda\,d\omega}{H_r} = \delta H\left\{(2f-1)\int \frac{r^{2f-2}H_\lambda\,d\omega}{H_r^2} + \int \frac{r^{2f-1}H_{\lambda r}\,d\omega}{H_r^2} -\right.$$
$$\left. - \int \frac{r^{2f-1}H_\lambda H_{rr}}{H_r^3}\,d\omega\right\} + \delta\mu\left\{-(2f-1)\int \frac{r^{2f-2}H_\lambda H_\mu\,d\omega}{H_r^2} + \right.$$
$$\left. + \int \frac{r^{2f-1}\,d\omega}{H_r}\left(H_{\lambda\mu} - \frac{H_{\lambda r}H_\mu}{H_r}\right) - \int \frac{r^{2f-1}H_\lambda\,d\omega}{H_r^2}\left(H_{\mu r} - \frac{H_\mu H_{rr}}{H_r}\right)\right\}.$$

Подставляя эти два последних выражения в соотношение (11) и сравнивая затем с (10), наконец, получаем

$$\frac{\partial L}{\partial H} = \frac{1}{\left(\int \frac{r^{2f-1}\,d\omega}{H_r}\right)^2}\left[\left(\int \frac{r^{2f-1}\,d\omega}{H_r}\right)\left\{(2f-1)\int \frac{r^{2f-2}H_\lambda\,d\omega}{H_r^2} + \int \frac{r^{2f-1}H_{\lambda r}\,d\omega}{H_r^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int \frac{r^{2f-1}H_\lambda H_{rr}}{H_r^3}\,d\omega\right\} - \left(\int \frac{r^{2f-1}H_\lambda\,d\omega}{H_r}\right)\left\{(2f-1)\int \frac{r^{2f-2}\,d\omega}{H_r^2} - \int \frac{r^{2f-1}H_{rr}\,d\omega}{H_r^3}\right\}\right],$$

$$\frac{\partial L}{d\mu} = \frac{1}{\left(\int \frac{r^{2f-1}\,d\omega}{H_r}\right)^2}\left[\left(\int \frac{r^{2f-1}\,d\omega}{H_r}\right)\left\{-(2f-1)\int \frac{r^{2f-2}H_\lambda H_\mu\,d\omega}{H_r^2} + \right.\right.$$

$$\left. + \int \frac{r^{2f-1}\,d\omega}{H_r}\left(H_{\lambda\mu} - \frac{H_{\lambda r}H_\mu}{H_r}\right) - \int \frac{r^{2f-1}H_\lambda\,d\omega}{H_r}\left(H_{\mu r} - \frac{H_\mu H_{rr}}{H_r}\right)\right\} -$$

$$\left. - \left(\int \frac{r^{2f-1}H_\lambda\,d\omega}{H_r}\right)\left\{(2f-1)\int \frac{r^{2f-2}H_\mu\,d\omega}{H_r^2} + \int \frac{r^{2f-1}\,d\omega}{H_r^2}\left(H_{\mu r} - \frac{H_\mu H_{rr}}{H_r}\right)\right\}\right].$$

Эти два последних уравнения вместе со вторым равенством (8) дают нам все необходимое для вычисления левой части равенства (9). Выписав его, сразу видим, что параметры λ и μ входят в нее симметрично; поэтому она наверняка будет равна правой части. Итак, равенство (9) выполняется.

Мы приходим к выводу, что для квазиэргодических систем значение энергии в конце адиабатического перехода совершенно не зависит от промежуточных механизмов перехода.

§ 7. Теперь вернемся к системам, имеющим более одной характеристики. Чтобы и для этих систем конечные характеристики не зависели от промежуточных механизмов перехода, необходимо тождественное выполнение условий полной интегрируемости системы в полных дифференциалах (6). Однако если провести вычисления (естественно, несколько более сложные, чем проделанные в предыдущем параграфе, но не отличающиеся от них по существу) и выписать эти условия интегрируемости, то окажется, что в общем случае они *не* удовлетворяются. Но изложению этих громоздких вычислений мы предпочтем освещение существа дела на примере простой системы с двумя характеристиками. Выбранный мной пример очень похож на тот, о котором я недавно доложил в работе о адиабатическом принципе.

Начертим в плоскости две ортогональные оси x и y, исходящие из начала O. Возьмем в первом квадранте две точки P, Q и проведем от них перпендикуляры PA, PB, QC, QD на оси. Предположим, что P находится внутри прямоугольника OCQD.

Представим далее, что внутри вогнутого многоугольника APBDQCA материальная точка движется в отсутствие какой-либо силы и при этом упруго отскакивает от сторон многоугольника. Абсолютные значения u, v компонент скорости точки по осям x, y, очевидно, остаются постоянными во время движения, и поэтому система имеет две характеристики. Затем предположим, что мы сохраняем неподвижной точку Q (с координатами a, b); точку же P (с координатами λ, μ) мы можем перемещать. Итак, мы фактически реализовали механическую систему с двумя характеристиками u и v и зависящую от двух параметров λ, μ.

Путем несложных рассуждений, аналогичных развитым в нашей уже цитированной работе, найдем, что при адиабатическом изменении положения точки P значения u и v меняются согласно следующему закону:

$$d\ln u = \frac{2\mu\, d\lambda}{ab - \lambda\mu}, \qquad d\ln v = \frac{2\lambda\, d\mu}{ab - \lambda\mu}.$$

Очевидно, ни одно из этих двух уравнений не является вполне интегрируемым, и поэтому значения, принимаемые u и v в конце перехода, зависят и от пути, пройденного точкой P.

Итак, в общем случае невозможно применять принцип Эренфеста к системам с несколькими характеристиками.

§ 8. Однако имеются некоторые важные типы исключений из этого правила и мы намерены изучить их в этом параграфе. Первый и самый важный относится к системам, допускающим введение угловых координат. Для них, согласно теореме Бюргерса, принцип Эренфеста применим не только в том смысле, что в каждом случае он приводит к определенным конечным условиям; такой принцип для этих систем также *проверен на практике* в том смысле, что он является логическим следствием условий Зоммерфельда, которые подтверждаются совокупностью теоретических и экспериментальных исследований атома водорода.

Еще один примечательный тип исключений из выводов § 7 таков. Предположим, что из m характеристик нашей системы только одна — энергия — явно зависит от параметров λ, μ механизма. Я утверждаю, что для этих систем в конце любого адиабатического перехода энергия принимает значение, не зависящее от промежуточных механизмов, а другие характеристики даже остаются неизменными.

Что все характеристики, кроме энергии, остаются неизменными, нетрудно видеть из того, что в элементарном процессе перехода они не могут меняться, поскольку не содержат параметров в явном виде; кстати, это видно также из системы (6), так как если Φ_i — одна из этих характеристик, то, вследствие сделанных гипотез, $\partial\Phi_i/\partial\lambda = \partial\Phi_i/\partial\mu = 0$.

Для доказательства того, что конечное значение энергии не зависит от пути перехода в плоскости λ, μ, можно было бы привести аргументы, похожие на изложенные в § 6. Однако проще заметить следующее: вслед-

ствие сделанных гипотез с помощью *не зависящего от параметров* канонического преобразования можно добиться того, чтобы не зависящие от параметров характеристики стали координатами Г. Тогда проведенное в § 6 рассуждение можно повторить дословно, причем неменяющиеся характеристики фигурируют в нем просто как постоянные параметры.

Системы такого типа довольно часто встречаются в приложениях. Например, к нему принадлежат все те системы, которые имеют в качестве однородных первых и не зависящих от времени интегралов, кроме энергии, еще и интегралы количества движения или момента количества движения (последние действительно всегда не зависят от параметров механизма).

§ 9. Что же касается возможного применения вышеизложенного к теории квантов, заметим следующее.

Наши выводы исключают возможность распространения принципа Эренфеста на системы не квазиэргодические (кроме указанных исключений). Напротив, для квазиэргодических систем или в случае изученных в § 8 исключений такое применение априори не исключается, хотя сейчас еще нельзя предсказать, подтвердится ли это на опыте. Однако, продвигаясь по этому пути, быть может, можно было бы попытаться получить полезные сведения о форме правил определения квантовых орбит для систем, не допускающих введения угловых координат. Естественно, что принцип Эренфеста сам по себе недостаточен для определения таких правил даже в том случае, если бы эксперимент подтвердил справедливость такого его обобщения; когда привилегированные орбиты известны, такой принцип позволяет только вывести их также и для всех тех систем, которые можно получить из первоначальной системы адиабатическим преобразованием. Если не обращать внимания на сложность вычислений, принцип Эренфеста мог бы помочь найти количественные соотношения между искровыми спектрами, скажем, щелочных металлов и дуговыми спектрами благородных газов. Это связано с тем, что системы, которым принадлежат такие спектры, отличаются только зарядом ядра и поэтому легко преобразуются друг в друга адиабатическим образом.

Геттинген, апрель 1923 г.

К статье 13

Проблемой равновесия между фотонами и электронами в черной полости Ферми заинтересовался, читая книгу Ричардсона «Электронная теория материи». В течение некоторого времени Ферми намеревался поставить опыты — или заставить кого нибудь еще в Институте сделать их — по наблюдению разрыва, вытекающего из его теории. Затем он оставил этот вопрос.

Дж. Полвани

13

РИЧАРДСОНОВСКАЯ СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА *

Рассмотрим полость в теле, все части которого имеют одинаковую температуру.

В ней находятся электроны и черное излучение, соответствующее данной температуре. При соударении со стенками полости электроны могут быть поглощены телом, в то время как новые электроны будут попадать из тела внутрь полости вследствие фотоэлектрического эффекта черного излучения. Эти два процесса — поглощение и испускание электронов — должны находиться в равновесии. Записав именно это, Ричардсон [1] нашел интегральное уравнение для неизвестной функции $\varphi(\nu)$, которая с точностью до излучающей способности тела представляет число электронов, вырываемых при фотоэлектрическом эффекте, когда поглощается единичная энергия света с частотой ν.

Решение интегрального уравнения дает следующий интересный результат:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\nu) &= 0 && \text{при} \quad h\nu \leqslant w_0, \\ \varphi(\nu) &= H\left(\frac{h}{\nu^2} - \frac{w_0}{\nu^3}\right) && \text{при} \quad h\nu \geqslant w_0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Здесь h — константа Планка, H — некоторая постоянная и w_0 — энергия, необходимая для вырывания электрона из тела. Это очень интересный ре-

---

* *Sulla teoria statistica di Richardson dell'effetto fotoelettrico.* Nuovo Cimento., 1923, **26**, 97—104.

[1] Richardson. Phil. Mag., 1912, **23**, 594; или Electron Theory of Matter, Cap. XVIII — Phil. Mag., 1914, **27**, 176. Описание опытов по проверке теории читатель может найти в работах Ричардсона, Комптона и др. в «Philosophical Magazine» (1914—1917 гг.).

зультат, поскольку он дает нам ясную интерпретацию того факта, что фотоэлектрическая эмиссия происходит только при частоте света, превышающей предел w_0/h (а это и есть закон Эйнштейна).

Однако в своей теории Ричардсон для некоторого упрощения ситуации использовал не формулу Планка для излучения черного тела

$$\frac{8\pi}{c^3}\frac{h\nu^3}{e^{h\nu/RT}-1},$$

а формулу Вина, именно

$$\frac{8\pi}{c^3}h\nu^3e^{-h\nu/RT}.$$

Как известно, формулы Планка и Вина совпадают для высоких частот В настоящей работе мы собираемся найти изменения, возникающие в ричардсоновской теории, если исходить из формулы Планка. Сначала мы докажем, что вывод $\varphi(\nu) = 0$ для $h\nu < w_0$ строго справедлив также при использовании формулы Планка. Затем будет доказано следующее: в то время как по Ричардсону $\varphi(\nu)$ и ее производная для $h\nu > w_0$ являются непрерывными функциями, в случае применения формулы Планка, за некоторыми исключениями, производная имеет разрывы для всех значений ν, для которых $h\nu = nw_0$, где n — целое число. Этот результат, довольно своеобразный и неожиданный, можно интерпретировать с точки зрения теории квантов; нетрудно понять, что когда $h\nu$ достигает значений, равных целым кратным w_0, начинают давать знать о себе новые эффекты, которые и вызывают вышеупомянутые разрывы. С экспериментальной точки зрения можно сделать следующее замечание: хотя уже можно утверждать, что ни настоящая теория, ни теория Ричардсона не дают согласующихся с опытом результатов, все же есть надежда найти разрыв при

$$h\nu = 2w_0;$$

однако имеющийся экспериментальный материал по фотоэлектрической эмиссии как функции длины волны, по-видимому, недостаточно обширен и надежен, чтобы можно было осуществить проверку теоретического результата.

С другой стороны, как не раз отмечалось несколькими авторами[2], параллелизм формул Планка и Вина несколько своеобразен: если формула Планка исходит из того, что возможными считались уровни с энергией $nh\nu$, то формула Вина — из того, что возможным считался только уровень с энергией $h\nu$. С этой точки зрения качественное различие, проявляющееся при использовании той или иной формулы, уже не так удивительно.

---

[2] См., например, недавнюю заметку де Бройля [Compt. Rend., 1922, fasc. 19].

Вкратце напомню ход рассуждений Ричардсона: обозначим через T абсолютную температуру, через n — число электронов на единицу объема полости. Несложные термодинамические соображения приводят к формуле

$$n = AT^{3/2}e^{-w_0/RT}, \tag{2}$$

где A — константа. Так как скорость электронов пропорциональна $T^{1/2}$, число N электронов, проникающих из полости в тело в единицу времени, будет пропорционально $nT^{1/2}$, т. е.

$$N = BT^2e^{-w_0/RT}, \tag{3}$$

где B — коэффициент, зависящий также от геометрической формы полости.

Далее Ричардсон предполагает, что при поглощении телом световой энергии dq частоты ν из него высвобождается, в результате фотоэлектрического эффекта, $f(\nu)\,dq$ электронов.

Если $L(\nu, T)$ — закон распределения энергии излучения в спектре черного тела и через $\varepsilon(\nu)$ обозначена поглощающая способность тела, то полное число испускаемых фотоэлектронов будет пропорционально

$$\int_0^\infty L(\nu, T)\,\varepsilon(\nu)\,f(\nu)\,d\nu;$$

тогда, полагая

$$\varphi(\nu) = \varepsilon(\nu)\,f(\nu),$$

находим, что N будет пропорционально

$$\int_0^\infty L(\nu, T)\,\varphi(\nu)\,d\nu.$$

Поэтому

$$KT^2e^{-w_0/RT} = \int_0^\infty L(\nu, T)\,\varphi(\nu)\,d\nu, \tag{4}$$

где K — постоянная.

Как уже упоминалось, Ричардсон предполагает, что $L(\nu, T)$ имеет формулу, данную Вином, т. е.

$$L(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3}\nu^3e^{-h\nu/RT}.$$

Таким образом, соотношение (4) преобразуется в интегральное уравнение

$$CT^2e^{-w_0/RT} = \int_0^\infty \nu^3e^{-h\nu/RT}\,\varphi(\nu)\,d\nu \qquad (C = \mathrm{const}),$$

которое в качестве решения имеет как раз выражение (1), где

$$H = Ch/R^2.$$

Если же вместо закона Вина воспользоваться формулой Планка, положив

$$L(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/RT} - 1}, \tag{5}$$

то (4) дает нам интегральное уравнение

$$CT^2 e^{-w_0/RT} = \int\limits_0^\infty \frac{\nu^3 \varphi(\nu)\, d\nu}{e^{h\nu/RT} - 1}. \tag{6}$$

Чтобы несколько преобразовать его, положим сначала

$$x = \frac{1}{RT};$$

тогда уравнение (6) принимает вид

$$\frac{C}{R^2} \frac{e^{-w_0 x}}{x^2} = \int\limits_0^\infty \frac{\nu^3 \varphi(\nu)\, d\nu}{e^{h\nu x} - 1}. \tag{6'}$$

Прямой проверкой нетрудно показать, что решением уравнения (6′) будет

$$\varphi(\nu) = \sum_{j=1}^\infty \varphi_j(\nu), \tag{6''}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_j(\nu) = 0 && \text{при} \quad \nu \leqslant j\frac{w_0}{h}, \\ &\varphi_j(\nu) = A_j\left(\frac{h}{\nu^2} - \frac{w_0}{\nu^3}\right) && \text{при} \quad \nu \geqslant j\frac{w_0}{h}. \end{aligned}\right\} \tag{6'''}$$

Здесь A_j всегда принимает одно из трех значений $\pm H/j^2$; 0; точнее, имеем $A_j = (-1)^n H/j^2$, если $j = p_1, p_2, \ldots, p_n$, где p_i — все разные простые числа; если же j делится на квадрат простого числа, то всегда $A_j = 0$. Поэтому

$$A_1 = H, \quad A_2 = -H/4, \quad A_3 = -H/9, \quad A_4 = 0,$$
$$A_5 = -H/25, \quad A_6 = H/36, \ldots$$

Отсюда видно, что, как уже было сказано, производная $\varphi(\nu)$ имеет разрыв для всех значений ν, кратных w_0/h, кроме $4(w_0/h)$, $8(w_0/h)$, $9(w_0/h)$, $12(w_0/h)$, ... Последующие рассуждения, хотя они и не очень строги с аналитической точки зрения, все-таки позволяют понять причину появления

последовательных разрывов. Умножим обе части уравнения (6′) на $e^{w_0 x}\,dx$ и затем проинтегрируем по x от $x = y$ до $x = \infty$. Меняя порядок интегрирования в правой части и выполняя интегрирование в левой, находим

$$\frac{C}{R^2 y} = \int_0^\infty \nu^3 \varphi(\nu)\, d\nu \int_y^\infty \frac{e^{w_0 x}\, dx}{e^{h\nu x} - 1}. \tag{7}$$

Как сразу видно, второй интеграл в правой части уравнения будет собственным только при $h\nu > w_0$. Поэтому наверняка $\varphi(\nu) = 0$, когда $h\nu \leqslant w_0$. Это как раз и выражает закон Эйнштейна.

Чтобы определить $\varphi(\nu)$ также для $\nu > w_0/h$, т. е. найти формулу, соответствующую второй строке равенства (1), заметим, что вследствие только что сказанного достаточно ограничиться значениями $\nu > w_0/h$, для которых $h\nu/RT$ очень велико, во всяком случае при обычных температурах. Пренебрегая тогда квадратами $e^{-h\nu/RT}$, запишем (6′) в виде

$$\frac{C}{R^2}\frac{e^{-w_0 x}}{x^2} = \int_{w_0/h}^\infty \nu^3 \varphi(\nu)\left(e^{-h\nu x} + e^{-2h\nu x}\right) d\nu, \tag{8}$$

где нижний предел интеграла, в соответствии с законом Эйнштейна, заменен значением w_0/h. Попытаемся решить это уравнение, полагая

$$\varphi(\nu) = H\left(\frac{h}{\nu^2} - \frac{w_0}{\nu^3}\right) + \psi(\nu), \tag{9}$$

где предположим, что $\psi(\nu)/\varphi(\nu)$ имеет порядок величины $e^{-h\nu/RT}$.

Учитывая, что $H = Ch/R^2$ и пренебрегая вследствие нашего приближения произведением $\psi(\nu)\, e^{-h\nu/RT}$, находим тогда для $\psi(\nu)$ интегральное уравнение

$$\int_{w_0/h}^\infty \nu^3 \psi(\nu)\, e^{-h\nu x}\, d\nu + \frac{Ch}{R^2}\int_{w_0/h}^\infty (h\nu - w_0)\, e^{-2h\nu x}\, d\nu = 0,$$

которое после очевидных преобразований принимает вид

$$\int_{w_0/h}^\infty \nu^3 \psi(\nu)\, e^{-h\nu x}\, dx + \frac{C}{4R^2}\frac{e^{-2w_0 x}}{x^2} = 0.$$

Его решение, очевидно:

$$\left.\begin{aligned} &\psi(\nu) = 0 && \text{при } h\nu \leqslant 2w_0,\\ &\psi(\nu) = -\frac{H}{4}\left(\frac{h}{\nu^2} - \frac{2w_0}{\nu^3}\right) && \text{при } h\nu > 2w_0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Тогда, учитывая (9), находим для $\varphi(\nu)$ следующее выражение:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(\nu)=0 && \text{при} \quad h\nu<w_0,\\ &\varphi(\nu)=H\left(\frac{h}{\nu^2}-\frac{w_0}{\nu^3}\right) && \text{при} \quad w_0<h\nu<2w_0,\\ &\varphi(\nu)=H\left(\frac{3}{4}\frac{h}{\nu^2}-\frac{w_0}{2\nu^3}\right) && \text{при} \quad 2w_0<h\nu. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Таким образом, мы нашли разрыв также в точке

$$h\nu=2w_0.$$

Но легко показать, что в соответствующем приближении можно найти разрывы во всех без исключения точках

$$h\nu=nw_0.$$

В самом деле, напишем два интегральных уравнения, соответствующих уравнению (8), которые получаются при пренебрежении соответственно n-й и $(n+1)$-й степенями $e^{-h\nu/RT}$, т. е.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{C}{R^2}\frac{e^{-w_0x}}{x^2}=\int\limits_{w_0/h}^{\infty}\nu^3\varphi(\nu)\left(e^{-h\nu x}+e^{-2h\nu x}+\ldots+e^{-(n-1)h\nu x}\right)d\nu,\\ &\frac{C}{R^2}\frac{e^{-w_0x}}{x^2}=\int\limits_{w_0/h}^{\infty}\nu^3\varphi(\nu)\left(e^{-h\nu x}+e^{-2h\nu x}+\ldots+e^{-nh\nu x}\right)d\nu. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Обозначим через $\varphi^*(\nu)$ решение первого уравнения и через $\varphi^*(\nu)+$ $+\psi(\nu)$ — решение второго. Подставляя во второе уравнение $\varphi^*(\nu)+$ $+\psi(\nu)$ вместо $\varphi(\nu)$ и учитывая, что $\varphi^*(\nu)$ — решение первого уравнения, находим

$$\int\limits_{w_0/h}^{\infty}\nu^3\psi(\nu)\left\{e^{-h\nu x}+e^{-2h\nu x}+\ldots+e^{-nh\nu x}\right\}d\nu+\int\limits_{w_0/h}^{\infty}\nu^3\varphi^*(\nu)\,e^{-nh\nu x}d\nu=0.$$

Умножим это уравнение на $e^{nw_0x}\,dx$ и проинтегрируем по x от $x=y$ до $x=\infty$, меняя порядок интегрирования. Тогда получим

$$\int\limits_{w_0/h}^{\infty}\nu^3\psi(\nu)\,d\nu\left\{\int\limits_{y}^{\infty}e^{-(h\nu-nw_0)x}\,dx+\ldots+\int\limits_{y}^{\infty}e^{-(nh\nu-nw_0)x}\,dx\right\}+$$
$$+\int\limits_{w_0/h}^{\infty}\nu^3\varphi^*(\nu)\,d\nu\int\limits_{y}^{\infty}e^{-n(h\nu-w_0)x}\,dx=0.$$

Но интеграл во втором члене наверняка собственный, так как

$$\nu > \frac{w_0}{h};$$

интегралы же в первом члене являются собственными, напротив, когда

$$h\nu > nw_0.$$

Поэтому $\psi(\nu)$ должно равняться нулю до тех пор, пока

$$h\nu < nw_0.$$

Этим и порождается разрыв в точке

$$h\nu = nw_0.$$

Рим, ноябрь 1922 г.

К статье 14

Эта статья интересна в историческом плане; в ней Ферми впервые обращается к абсолютной величине аддитивной постоянной в выражении для энтропии идеального одноатомного газа. Деление фазового пространства на ячейки объемом h^3 было предметом его настойчивых размышлений; позже он пришел к заключению, что недостает еще одного звена, но не смог сделать решающего шага (ср. статью 17).

Э. Сегре

14

К ШТЕРНОВСКОМУ СПОСОБУ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОНСТАНТЫ ЭНТРОПИИ ОДНОАТОМНОГО ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА *

1. Абсолютное значение константы энтропии одноатомного идеального газа впервые было найдено Сакуром [1] и Тетроде [2] статистическим методом. Они, следуя Больцману, положили энтропию пропорциональной логарифму вероятности и рассчитали абсолютное значение последней при следующем допущении относительно объема ячеек, на которые необходимо разделить фазовое пространство: объем (имеющий размерность действия в кубе) точно равен кубу константы Планка h. Таким образом они нашли, что энтропия одноатомного газа задается формулой

$$S = Nk\left\{\frac{5}{2}\ln T - \ln p + \ln\frac{(2\pi m)^{3/2} k^{5/2} e^{5/2}}{h^3}\right\}, \quad (1)$$

где N — число атомов; k — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура; p — давление и m — масса атомов.

Выражение (1) согласуется с экспериментом, и тем не менее способ его вывода, как показало большое число теоретических работ, выполненных впоследствии с целью найти лучшее его доказательство, не удовлетворил многих физиков. Среди этих попыток Штерну [3] несомненно принадлежит самая удачная. Она основана на следующем принципе. Будем рассмат-

---

* *Sopra la teoria di Stern della constante assoluta dell'entropia di un gas perfetto monoatomico.* Rend. Lincei, 1923, **32** (2), 395—398. Представлена на заседании 2 декабря 1923 г. академиком О. М. Корбино.

[1] O. Sackur. Ann. d. Phys., 1913, **40**, 67.

[2] H. Tetrode. Ann. d. Phys., 1912, **38**, 434.

[3] O. Stern. Phys. Zs., 1913, **14**, 629; Zs. f. Elektrochem., 1919, **25**, 66.

ривать наш газ как пар, находящийся в равновесии с твердой фазой; мы можем рассчитать его максимальное давление двумя способами. Во-первых, с помощью кинетической теории газов, получив при этом вполне определенный результат без произвольных констант, и, во-вторых, с помощью термодинамики; в последнем случае в качестве произвольной константы появляется как раз константа энтропии газа, поскольку энтропию твердого тела можно получить при помощи теоремы Нернста. Сравнивая два выражения, Штерн приходит к определению абсолютной величины константы; преимущество его метода состоит в том, что здесь не делается ни одной из необходимых другим авторам малообоснованных гипотез об идеальном газе, таких, например, как гипотеза о квантовании самого газа, законность которой неясна.

2. Все-таки и в теории Штерна остается не очень ясным следующий пункт. Кинетическим путем Штерн находит для плотности насыщенного пара следующее выражение:

$$\rho = \frac{(2\pi m)^{3/2}\,\tilde{\nu}^3}{(kT)^{3/2}}\,e^{-w/kT}, \tag{2}$$

где $\tilde{\nu}$ — среднее геометрическое основных упругих частот твердого тела, w — энергия, необходимая для испарения одного атома твердого тела при абсолютном нуле.

Термодинамическим же методом он находит

$$\rho = \frac{(2\pi m)^{3/2}\,\tilde{\nu}^3}{(kT)^{3/2}}\,e^{-\frac{w+3h\bar{\nu}/2}{kT}}, \tag{3}$$

где $\bar{\nu}$ — среднее арифметическое значение упомянутых частот.

Разница в экспонентах объясняется Штерном на основе гипотезы так называемой энергии при абсолютном нуле (Nullpunktsenergie), согласно которой предполагается, что даже при абсолютном нуле средняя энергия осциллятора равна не нулю, а $h\nu/2$. При этом предположении теплота испарения одного атома была бы уже не w, а w — $(3h\nu/2)$, поскольку у каждой молекулы три степени свободы; таким образом, скомпенсировалось бы различие двух экспонент.

В настоящей работе я собираюсь доказать, что для объяснения указанной разницы нет никакой необходимости в этой неестественной гипотезе; достаточно слегка изменить кинетический вывод выражения (2), учитывая, что движение молекул твердого тела возможно только по квантовым орбитам.

3. Чтобы получить кинетическим методом плотность насыщенного пара, следует прежде всего вычислить вероятность состояния, в котором (при данном объеме V) газу принадлежат N_g атомов, а твердому телу N_s

атомов; здесь $N = N_g + N_s$ — полное число атомов. Заметим, что атомы твердого тела, в отличие от атомов газа, можно различить по их положению; тогда, вспоминая принципы статистической механики, легко видеть, что эта вероятность определяется выражением

$$P = \binom{N}{N_g} N_s! \int e^{-W/kT}\, d\omega = \frac{N!}{N_g!} \int e^{-W/kT}\, d\omega, \tag{4}$$

где $d\omega$ — элемент объема фазового пространства, координаты которого суть обобщенные координаты и импульсы x_i, p_i ($i = 1, 2, \ldots, 3N_g$) молекул газа и обобщенные координаты и импульсы x_j, p_j ($j = 1, 2, \ldots, 3N_s$) атомов твердой фазы; W — энергия, соответствующая элементу $d\omega$. О молекулах газа нельзя ничего сказать. Что же касается молекул твердого тела, мы слегка изменим соображения Штерна, заметив, что молекулы твердого тела могут описывать только «статические» орбиты [4], которые в этом случае характеризуются следующим фактом: энергия, соответствующая каждой упругой частоте, должна быть $n_j h\nu_j$, где n_j — целое число, а ν_j — соответствующая частота. Как обычно принимается в теории квантов, припишем каждому из этих элементарных движений вес h, полагая

$$dx_j\, dp_j = h, \tag{5}$$

так что

$$d\omega = h^{3N_s} \prod_1^{3N_g} dx_i\, dp_i. \tag{6}$$

Энергия W рассчитывается как сумма кинетической энергии молекул газа, равной $\Sigma p_i^2/2m$, плюс энергия твердого тела, равная $\Sigma n_j h\nu_j$, плюс потенциальная энергия молекул газа, равная wN_g, где w и есть как раз энергия испарения одной молекулы при абсолютном нуле. Таким образом, имеем

$$W = \sum_1^{3N_g} \frac{p_i^2}{2m} + \sum_1^{3N_s} n_i h\nu_i + wN_g. \tag{7}$$

Поскольку в формуле (4) $6N_s$ интегралов по dx_j, dp_j следует заменить суммами, она принимает вид

$$P = \frac{N!}{N_g!} h^{3N_s} e^{-\frac{wN_g}{kT}} \prod_1^{3N_g} \left(\int dx_i\right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p^2}{2mkT}} dp\right)^{3N_g} \prod_{j=1}^{3N_s} \left(\sum_{n_j=0}^{\infty} e^{-\frac{n_j h\nu_j}{kT}}\right). \tag{8}$$

---

[4] Здесь атом, естественно, рассматривается как материальная точка, и движения, о которых идет речь, имеют тепловую природу.

Если x_1, x_2, x_3 — декартовы координаты первой молекулы газа, то имеем

$$\int dx_1 \int dx_2 \int dx_3 = V,$$

где V — объем газа. Тогда находим

$$\Pi \int dx_i = V^{N_g}.$$

Далее

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p^2}{2mkT}}\, dp = \sqrt{2\pi mkT},$$

$$\sum_{n_j=0}^{\infty} e^{-\frac{n_j h\nu_j}{kT}} = \frac{1}{1-e^{-\frac{h\nu_j}{kT}}} = \frac{kT}{h\nu_j}\left(1+\frac{h\nu_j}{2kT}+\ldots\right).$$

Таким образом, применяя формулу Стирлинга, находим

$$\ln P = \ln N! - N_g \ln\frac{N_g}{e} - \frac{N_g w}{kT} + N_g \ln V + \frac{3}{2} N_g \ln(2\pi mkT) +$$

$$+ 3N_s \ln\frac{kT}{\tilde{\nu}} + \sum_{1}^{3N_s} \ln\left(1+\frac{h\nu_j}{2kT}+\ldots\right),$$

т. е. при предельно высоких T

$$\ln P = \ln N! - N_g \ln\frac{N_g}{e} - \frac{N_g w}{kT} + N_g \ln[V(2\pi mkT)^{3/2}] + 3N_s \ln\frac{kT}{\tilde{\nu}} + \frac{3N_s h\bar{\nu}}{2kT}.$$

В состоянии равновесия вероятность P должна быть максимальной, следовательно, ее производная по N_g должна обратиться в нуль; следует, однако, заметить, что $N_s = N - N_g$, а N — константа. Таким образом, имеем

$$0 = -\ln N_g - \frac{w + 3h\bar{\nu}/2}{kT} + \ln[V(2\pi mkT)^{3/2}] - \ln\left(\frac{kT}{\tilde{\nu}}\right)^3.$$

Отсюда для плотности газа сразу получаем

$$\frac{N_g}{V} = \frac{(2\pi m)^{3/2}(\tilde{\nu}^3)}{(kT)^{3/2}} e^{-\frac{w+3h\bar{\nu}/2}{kT}},$$

в полном согласии с выражением (3).

К статье 15

Сноски к этой статье показывают, что Ферми знал о более ранних попытках Герцфельда решить такую же задачу в несколько более грубом приближении; в статье говорится также о его признательности Максу Борну за подсказанное уточнение. Бриллюэн (Les statistiques quantiques et leurs applications, vol. 2. Les Presses Universitaires de France, Paris, 1930) проанализировал и сравнил различные подходы, которые использовались разными авторами для исключения расходимости функции распределения квантовых уровней атома.

Ф. Разетти

15

О ВЕРОЯТНОСТИ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ *

Для одного и того же атома с учетом размеров проводится расчет условия равновесия квантовых состояний. Оказывается, что состояния, соответствующие бо́льшим объемам, осуществляются реже, чем это следует из обычной статистики.

Рассмотрим атом, который может находиться в различных квантовых состояниях; энергия этих состояний суть w_1, w_2, ..., w_r. Задача определения вероятности того, что этот атом находится в i-м состоянии, будет решаться в обычном предположении равенства статистических весов всех состояний [1].

Благодаря этому искомая вероятность есть

$$p_i = Ce^{-\frac{w_i}{kT}}, \tag{1}$$

где C — константа, определяемая из равенства $\Sigma p_i = 1$.

Однако может иметь место важный случай, когда это простое предположение наверняка не выполняется. Рассмотрим, например, атом водорода, у которого энергия i-го состояния есть $w_i = -R/i^2$. Согласно (1) вероятность этого состояния была бы равна

$$p_i = Ce^{\frac{R}{i^2kT}}, \tag{2}$$

---

* *Über die Wahrscheinlichkeit der Quantenzustände.* Zs. Physik, 1924, 26, 54—56.

[1] N. Bohr. Zs. f. Phys., 1923, 13, 117. (См. перевод: Н. Бор. Избранные научные труды, т. I. М., 1970, стр. 482.—*Ред.*).

где

$$C = \frac{1}{\sum e^{\frac{R}{i^2kT}}};\tag{3}$$

но, поскольку сумма в знаменателе последнего выражения расходится, получился бы неверный результат $C = 0$.

Эту трудность можно обойти [2], допуская возможность только таких квантовых состояний, которым соответствует радиус, меньший среднего расстояния между атомами. В этом случае в знаменателе C суммируется лишь конечное число членов, а последующие слагаемые отбрасываются.

Однако в этой работе будем действовать несколько аккуратнее: мы проведем термодинамический расчет условия равновесия между квантовыми состояниями атома, учитывая его объем. Ведь совершенно ясно, что чем больше объем атома, тем быстрее рассматриваемое состояние будет разрушаться за счет столкновений с другими атомами, так что атом с бо́льшим объемом будет встречаться относительно реже, нежели это следует из формулы (2).

Итак, пусть $v_1, v_2, \ldots, v_r$ суть атомные объемы r квантовых состояний нашего атома. Чтобы найти условие термодинамического равновесия этих квантовых состояний, воспользуемся свободной энергией F смеси n_1 атомов, находящихся в первом состоянии, n_2 — во втором, n_r — в r-м. Если U — полная энергия, S — энтропия и T — абсолютная температура, то

$$F = U - TS.\tag{4}$$

Величина U представляет собой сумму кинетической энергии атомов и энергии атомных состояний. Отсюда следует, что

$$U = (^3/_2)\, nkT + \sum n_i w_i,\tag{5}$$

где

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r\tag{6}$$

— полное число изучаемых атомов.

Для вычисления энтропии [3] применим к нашей смеси состояний уравнение Ван-дер-Ваальса (без члена A/v^2). Оно гласит, что

$$p(V - b) = nkT,$$

---

[2] K. Herzfeld. Ann. d. Phys., 1916, **51**, 261.

[3] На такую формулировку энтропии смеси, более точную, чем та, которой я пользовался прежде (Rend. Accad. Lincei, 1923, **32**, fasc, 12 — статья [Б17а].— *Ред.*), мое внимание обратил проф. М. Борн. В связи с этим я хотел бы выразить ему здесь свою глубокую признательность.

где V — объем рассматриваемой смеси, а

$$b = \frac{1}{2n} \sum_{ik} n_i n_k \left(\sqrt[3]{v_i} + \sqrt[3]{v_k}\right)^3. \qquad (7)$$

Отсюда энтропия равна

$$S = \frac{3}{2} nk \int \frac{dT}{T} + nk \int \frac{dV}{V-b} + \text{const} = \frac{3}{2} nk \ln T + nk \ln (V-b) - \sum_i n_i \ln n_i; \qquad (8)$$

при этом константа определяется таким образом, чтобы асимптотическое значение S при бесконечном разбавлении совпадало с энтропией идеального газа. Свободная энергия будет тогда равна (полагая, что b мало по сравнению с V)

$$F = \frac{3}{2} nkT + \sum_i n_i w_i - nkT \left\{ \frac{3}{2} \ln T + \ln V - \frac{b}{V} - \sum_i \frac{n_i}{n} \ln n_i \right\}. \qquad (9)$$

Условию равновесия отвечает минимум F как функции n_i. Но так как n_i должны удовлетворять равенству (6), это условие можно записать в виде

$$\frac{\partial F}{\partial n_1} = \frac{\partial F}{\partial n_2} = \cdots = \frac{\partial F}{\partial n_r} = \text{const}.$$

Откуда следует

$$n_i = Ce^{-\frac{w_i}{kT}} e^{-\frac{n}{V} \frac{\partial b}{\partial n_i}} = Ce^{-\frac{w_i}{kT}} e^{-\sum_k \frac{n_k}{V} \left(\sqrt[3]{v_i} + \sqrt[3]{v_k}\right)^3}. \qquad (10)$$

Чтобы несколько разъяснить положение, предположим, что в первом квантовом состоянии объем атомов практически ничтожен и что n_1 весьма велико по сравнению с n_2, n_3, ..., n_r. Тогда можно просто написать

$$n_i = Ce^{-\frac{w_i}{kT}} e^{-\frac{n_1}{V} v_i}. \qquad (11)$$

Сравнивая эту формулу с выражением (1), сразу же видим, что они различаются множителем

$$e^{-\frac{n_1}{V} v_i},$$

который можно в какой-то мере истолковать как некую априорную вероятность i-го квантового состояния; с ростом атомного объема и плотности он, как и должно быть, убывает.

В случае атома водорода положим, что его объем равен объему шара, радиус которого есть большая полуось кеплеровского эллипса, т. е. он пропорционален i^2. Отсюда следует, что объем равен Ai^6, где $A \simeq 5 \cdot 10^{-25}$.

Тогда вместо формулы (2) получим

$$p_i = Ce^{\frac{R}{i^2kT} - Ai^6 \frac{n_1}{V}},$$

где

$$C = \frac{1}{\sum\limits_i e^{\frac{R}{i^2kT} - Ai^6 \frac{n_1}{V}}},$$

причем сумма в знаменателе теперь уже сходится.

Определим численно величину $g_i = e^{-Ai^6 \frac{n_1}{V}}$; например, при атмосферном давлении $n_1 = 2{,}7 \cdot 10^{19}$ $1/см^3$. Таким образом, при $i = 1$ величина $g_1 = e^{-5{,}4 \cdot 10^{-6}}$, т. е. получается величина чрезвычайно близкая к единице; но уже при $i = 7$ $g_7 = e^{-0{,}65} = 0{,}52$. Таким образом, оказывается, что, в отличие от результата формулы (2), в состоянии с главным квантовым числом 7 находится лишь примерно половина того количества атомов, которое дает эта формула. Для $i = 10$ $g_{10} = e^{-5{,}6} = 3{,}7 \cdot 10^{-3}$, т. е. при атмосферном давлении практически нет атомов в состоянии с главным квантовым числом 10.

Получена 6 июня 1924 г.

К статье 16

В статье дается подробная теория изменения углового распределения оптического резонансного излучения при возрастании плотности газа. Ферми количественно объясняет результаты экспериментов Вуда, который наблюдал для ртутных паров переход от почти изотропного рассеяния при малых плотностях газа до правильного отражения при очень высоких плотностях газа.

Ф. Разетти

16

ОБ ОТРАЖЕНИИ И РАССЕЯНИИ РЕЗОНАНСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ *

1. Если осветить газ (или пар) излучением с частотой, равной частоте его собственной резонансной линии, то обнаружится открытое Вудом [1] явление так называемого оптического резонанса. Явление состоит в том, что падающий свет очень интенсивно рассеивается газом, так что для его полного поглощения бывает достаточно очень тонких слоев газа. Наблюдается следующий эффект [2]: до тех пор пока давление газа достаточно мало, почти все резонансное излучение рассеивается во всех направлениях; когда же давление становится достаточно большим, бо́льшая доля света отражается в определенном направлении и только малая часть рассеивается диффузно. Насколько мне известно, этому явлению еще не дано ясной интерпретации, и поэтому в настоящей работе я попытаюсь развить математическую теорию явления, которая позволит не только объяснить его, но и определить экспериментальные условия для более удобного наблюдения резонансного отражения.

2. Предположим, что наш газ содержится в сосуде, имеющем форму призмы; ее основание — квадрат со стороной B, причем стороны квадрата параллельны осям y, z; призма не ограничена со стороны положительных x, но ограничена в противоположном направлении плоскостью $x = 0$. Далее предположим, что падающий свет с частотой ν обладает направляющими косинусами l, m, n и падает на основание призмы; будем наблюдать вторичное излучение по направлению с косинусами α, β, γ ($\alpha < 0$). Пусть

---

* *Sopra la riflessione a la diffusione di risonanza.* Rend. Lincei, 1924, **33** (1), 90—93. Представлена на заседании 13 января 1924 г. академиком О. М. Корбино.

[1] R. Wood. Phil. Mag., 1905—1912.

[2] R. Wood. Phil. Mag., 1912, 23, 689; Dunoyer. C. R., 1913, **156**, 1067.

k — коэффициент поглощения. Если точка наблюдения P достаточно далека от призмы и r — ее расстояние от начала координат, то сразу видно, что при пренебрежении краевыми эффектами амплитуда вторичного излучения (в точке P) дается выражением

$$\sum_h \frac{A}{r} e^{-\frac{k}{2}\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{\alpha}\right)x_h} e^{2\pi i\nu\left(t-\frac{r}{c}\right)} e^{-\frac{2\pi i}{\lambda}\{(l-\alpha)x_h+(m-\beta)y_h+(n-\gamma)z_h\}},$$

где индекс h характеризует различные атомы газа, суммирование проводится по всем атомам, а A — некоторый коэффициент пропорциональности. Чтобы перейти от амплитуды к интенсивности, как известно, достаточно умножить предыдущую амплитуду на комплексно сопряженную ей величину. Поэтому интенсивность будет

$$I = \frac{A^2}{r^2}\sum_{hj} e^{-\frac{k}{2}\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{\alpha}\right)(x_h+x_j)} e^{\frac{2\pi i}{\lambda}\{(l-\alpha)(x_j-x_h)+(m-\beta)(y_j-y_h)+(n-\gamma)(z_j-z_h)\}}.$$

Суммирование по обоим индексам h, j, конечно, следует распространить на все присутствующие атомы. Чтобы выполнить его, удобно разделить I на сумму из двух слагаемых I_1 и I_2; первое соответствует вкладу членов суммы, для которых $h = j$, а второе — вкладу членов, для которых $h \neq j$. Тогда имеем

$$I_1 = \frac{A^2}{r^2}\sum_h e^{-k\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{\alpha}\right)x_h};$$

последнее выражение можно вычислить, заменяя сумму тройным интегралом

$$I_1 = \frac{NA^2}{r^2}\int_0^\infty \int_{-B/2}^{B/2} \int_{-B/2}^{B/2} e^{-k\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{\alpha}\right)x} dx\, dy\, dz,$$

где N — число атомов в единице объема. Вычисляя интеграл, получаем

$$I_1 = \frac{NA^2B^2}{kr^2\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{\alpha}\right)}. \qquad (1)$$

Далее

$$I_2 = \frac{A^2}{r^2}\sum_{h\neq j} e^{-\frac{k}{2}\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{\alpha}\right)(x_h+x_j)} e^{\frac{2\pi i}{\lambda}\{(l-\alpha)(x_j-x_h)+\cdots\}}.$$

И здесь мы можем заменить сумму шестикратным интегралом [3]; итак,

$$I_2 = \frac{A^2N^2}{r^2}\iiiint\!\!\iint e^{-\frac{k}{2}\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{\alpha}\right)(x+\xi)} e^{\frac{2\pi i}{\lambda}\{(l-\alpha)(\xi-x)+\dots\}} dx\, dy\, dz\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

Эта процедура не была бы правильной, если бы отдельно не были уже рассмотрены члены с $k = j$, которые привели бы к сингулярностям.

и, выполняя интегрирования,

$$I_2 = \frac{4A^2N^2\lambda^4}{\pi^4 r^2}\,\frac{\sin^2\frac{\pi B}{\lambda}(m-\beta)}{(m-\beta)^2}\,\frac{\sin^2\frac{\pi B}{\lambda}(n-\gamma)}{(n-\gamma)^2}\,\frac{1}{\frac{k^2}{4}\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{\alpha}\right)^2+\frac{4\pi^2}{\lambda^2}(l-\alpha)^2}. \quad (2)$$

Нетрудно видеть, что I_1 как функция от α, β, γ ведет себя регулярно (поскольку $l > 0 > \alpha$); I_2, напротив, имеет довольно ясно выраженный максимум при $m = \beta$, $n = \gamma$, и, значит, $l = -\alpha$ (при условии, что $B \gg \lambda$, как мы и полагаем). Этот максимум соответствует отражению; поэтому I_1 будет представлять свет, рассеянный во всех направлениях, а I_2 — отраженный свет. Поскольку I_1 пропорционально N, а I_2 пропорционально N^2, понятно также, что с увеличением плотности компонента I_2 постепенно становится преобладающей, что и наблюдается экспериментально.

3. Для обсуждения этого явления в более конкретных случаях удобно, однако, слегка изменить условия задачи. Если до сих пор в качестве источника падающего света мы брали бесконечно удаленную точку, то теперь возьмем бесконечно удаленный маленький круговой диск. Пусть ρ_0 — угол, под которым виден его радиус; координаты выберем так, чтобы направляющие косинусы лучей из центра диска были $-\cos\theta$, $-\sin\theta$, 0 (θ — угол падения). Будем вести наблюдение в направлении $\alpha = -\cos\theta$, $\beta = \sin\theta$, $\gamma = 0$, в котором отражается приходящий из центра диска луч. Тогда для точки источника с полярными координатами[4] ρ, φ приближенно имеем

$$l = \cos\theta + \rho\cos\varphi\sin\theta, \qquad m = \sin\theta - \rho\cos\varphi\cos\theta, \qquad n = -\rho\sin\varphi,$$

и поэтому, используя выражения (1) и (2), в этом случае находим

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{2N\lambda^4 k}{\pi^5\rho_0^2B^2\left(k^2+\frac{16\pi^2}{\lambda^2}\cos^4\theta\right)\cos\theta}\int\limits_0^{\rho_0}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi B}{\lambda}\rho\cos\varphi\cos\theta\right)\sin^2\left(\frac{\pi B}{\lambda}\rho\sin\varphi\right)}{\rho^3\cos^2\varphi\sin^2\varphi}\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= \frac{2N\lambda^2 k}{\pi^3\rho_0^2\cos\theta\left(k^2+\frac{16\pi^2}{\lambda^2}\cos^4\theta\right)}\int\limits_0^{\pi B\rho_0/\lambda}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin^2(x\cos\varphi\cos\theta)\sin^2(x\sin\varphi)}{x^3\cos^2\varphi\sin^2\varphi}\,dx\,d\varphi.$$

Далее рассмотрим два случая: очень больших и очень малых $B\rho_0/\lambda$. В первом случае мы можем заменить верхний предел интегрирования по x на бесконечность. Тогда значение двойного интеграла будет равно $\pi^2\cos\theta$,

---

[4] Подразумевается удаленная плоскость с полюсом в центре источника. (Заметим, что ρ — безразмерная величина, выраженная в единицах расстояния от диска до призмы.— *Прим. ред.*)

и поэтому

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{2N\lambda^2 k}{\pi\rho_0^2\left(k^2 + \frac{16\pi^2}{\lambda^2}\cos^4\theta\right)}. \tag{3}$$

Если же $B\rho_0/\lambda \ll 1$, то в двойном интеграле можно заменить синусы на дуги; поэтому легко находим

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{2NB^2 k\cos\theta}{k^2 + \frac{16\pi^2}{\lambda^2}\cos^4\theta}. \tag{4}$$

4. Предположим, например, что $\rho = {}^1/_{10}$. При этом, если исключить случай крайней малости B, мы будем находиться в условиях применимости соотношения (3). Тогда найдем, что при $k = 100$ величина N должна быть порядка 10^{20} (что соответствует давлению в несколько атмосфер), чтобы компонента I_1 была того же самого порядка величины, что и I_2 (это, очевидно, является необходимым условием для наблюдения резонансного отражения). Этим и объясняется неудача опытов Дюнуайе по наблюдению резонансного отражения в случае натрия, для которого опыты удобно проводить только при достаточно низком давлении паров.

К статье 17

Эта статья, написанная в январе 1924 г., важна главным образом тем, что показывает интерес Ферми к парадоксу Гиббса и абсолютной величине аддитивной константы энтропии (ср. также статью 14), проявлявшийся им по крайней мере за два года до написания знаменитой работы по статистике идеального газа. Ферми указывает, что в системах тождественных частиц, таких, как атом гелия, полный цикл, на который надо распространять интеграл Зоммерфельда, должен соответствовать повторению состояния, не отличимого от начального, даже если эти состояния и различаются в классическом смысле (две частицы обменялись местами). Его рассуждения до некоторой степени напоминают способ рассмотрения обмена координатами тождественных частиц в волновой функции системы, сформулированный позднее в квантовой механике. В этой статье мы снова видим ход рассуждений (см., например, конец раздела 1), который говорит о том, что Ферми нащупывал некое недостающее звено (принцип запрета). Как только этот принцип был сформулирован Паули, Ферми смог разработать новую статистику на основе точки зрения, сравнительно слабо связанной с современным ему развитием квантовой механики.

Ф. Разетти

17

О КВАНТОВАНИИ СИСТЕМ, СОДЕРЖАЩИХ ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ *

Правила, введенные Зоммерфельдом для определения квантовых орбит систем, допускающих разделение переменных, как известно, представляют собой просто требование, чтобы для таких орбит все значения фазовых интегралов $\oint p\,dq$ были целыми кратными константы Планка h. Условия Зоммерфельда полностью согласуются с экспериментальными фактами, относящимися к атому водорода, и в пределах экспериментальных ошибок объясняют все спектроскопические данные, полученные для этого элемента. В то же время известно, что все попытки распространить эти правила на расчет более сложных элементов приводили только к качественным результатам; несмотря на многочисленные усилия, количественного согласия между опытом и теорией не получено даже в случае гелия — самого простого атома после водорода.

Эта неудача обычно связывается с тем, что такие системы не допускают разделения переменных и что метод возмущений, который создавался для

---

* *Considerazioni sulla quantizzazione dei sistemi che contengono degli elementi identici.* Nouvo. Cimento, 1924, 1, 145—152.

распространения условий Зоммерфельда на сложные системы, по той или иной причине может оказаться непригодным для них.

Я же в настоящей работе собираюсь показать, что неудача, быть может, обусловлена скорее недостаточностью условий Зоммерфельда для расчетов статических орбит тех систем, которые, независимо от того, допускают они разделение переменных или нет, содержат некоторые тождественные составные части (в случае атома гелия, например, два неразличимых электрона). В некоторых случаях представляется весьма правдоподобной необходимость изменения квантовых законов вследствие того, что квантуемая система состоит из тождественных элементов; рассмотрим, например, кольцо, на котором имеются три электрона, расположенных в вершинах равностороннего треугольника. Так как электроны неразличимы, то для того, чтобы при вращении кольцо заняло свое начальное положение, очевидно, нет необходимости вращать его на угол 2π; достаточно повернуть его на угол $2\pi/3$. Итак, вращательное движение кольца было бы периодическим с периодом 2π, если бы электроны были различимыми; но, поскольку они неразличимы, оно становится периодическим с периодом $2\pi/3$. Если p — момент количества движения кольца, то при первом предположении величина $2\pi p$ должна была бы быть кратной константе h, в то время как при втором предположении кратной h должна быть величина $2\pi p/3$; итак, минимальное значение p во втором случае в три раза больше, чем в первом. В случае квантования кристаллической решетки периодическим можно считать перенос, параллельный одной из сторон элементарного параллелепипеда, на величину этой стороны (ввиду тождественности всех атомов); такие рассуждения были недавно представлены Комптоном и другими [1], которые развили с этой точки зрения весьма ясную квантовую теорию дифракции рентгеновских лучей.

1. Теперь я хотел бы привести пример системы, допускающей разделение переменных, для которой недостаточность условий Зоммерфельда в расчетах ее статических орбит является очевидной.

Итак, рассмотрим идеальный газ, состоящий из n точечных молекул, заключенных в объеме v. Попытаемся рассчитать абсолютную величину энтропии этого газа при разных предположениях о способе его квантования (чтобы получить конечное значение энтропии идеального газа, так или иначе его необходимо квантовать, поскольку классическая трактовка неизменно приводила бы к бесконечному значению). При этом мы всегда будем приводить нашу систему к системам с разделяемыми переменными, которые могут быть проквантованы по правилам Зоммерфельда; тем не менее единственным предположением о способе квантования, ведущим к согласующемуся с экспериментом значению константы энтропии, окажется предположение о том, что фундаментальная система, к которой приводится

---

[1] A. H. Compton. Proc. Nat. Acad. Sci., 1923, 9, 359; G. Breit. Ibid., 1923, 9, 244.

наш газ, содержит только один атом. Если же приводить наш газ к системам, пусть с разделяемыми переменными, но содержащим больше одного атома, то всегда обнаружатся более или менее серьезные расхождения.

В трактовке нашей проблемы мы будем использовать следующий подход. Прежде всего, разделим объем v, который занимает наш газ, на ячейки в форме прямоугольных параллелепипедов. Будем по нашему усмотрению делить v, например, на n параллелепипедов, помещая в каждый из них одну молекулу; на $n/2$ параллелепипедов, помещая в каждый из них по две молекулы, или, наконец, придавать объему v форму только одного параллелепипеда и оставлять в нем все n молекул [2]. Идеальный газ, состоящий из нескольких молекул, заключенных внутри сосуда в форме параллелепипеда, очевидно, допускает разделение переменных в системе декартовых координат, параллельных его сторонам (поскольку вследствие идеальности газа взаимодействиями молекул между собой следует пренебречь). Как только движение нашего газа будет квантовано подобным образом, легко рассчитать его энтропию. Мы увидим, что значение константы энтропии, согласующееся с опытом, удается получить, разделив объем на n параллелепипедов и поместив в каждом из них только одну молекулу. Если же поместить в одном из них хотя бы только две тождественных молекулы, то всегда будут получаться неправильные результаты.

2. Пусть a, b, c — стороны ячеек в форме параллелепипеда, на которые был разделен наш объем; согласно расчету, проведенному в цитированной работе Броди, возможные квантованные значения энергии движения молекулы, параллельного стороне a, следует записать в виде

$$w_n = \frac{n^2h^2}{8a^2m}, \tag{1}$$

где n — целое число, m — масса молекул и h — константа Планка. Вклад в энтропию этой степени свободы определяется известной формулой

$$\sigma^* = \frac{\overline{w}}{T} + k \ln\left(\sum e^{-\frac{w_i}{kT}}\right),$$

которую легко получить прямым расчетом; здесь $\overline{w}$ — средняя энергия на степень свободы, равная в этом случае $kT/2$. Заменяя сумму в скобках

---

[2] Подобный метод для расчета энтропии идеального газа развил Броди (Zs. f. Phys., 1921, 6, 79). Однако, чтобы получить точную формулу, он должен был бы положить (стр. 82) $dE=1$, где E — энергия. Но тогда вероятность, по существу, определяется им как число квантовых состояний газа (который для квантования помещается в сосуд с упругими стенками в форме параллелепипеда) на интервал энергий (E, $E+1$), так что его вероятность [выражение (6)] не является безразмерной величиной, а имеет размерность обратной энергии.

интегралом, сразу находим

$$\sum e^{-\frac{w_i}{kT}} = \int_0^\infty e^{-\frac{h^2 i^2}{8a^2 mkT}} di = \frac{a}{h} \sqrt{2\pi m} \sqrt{kT},$$

и поэтому

$$\sigma^* = \frac{k}{2} \ln T + k \ln \left(\frac{a}{h} \sqrt{2\pi mek} \right).$$

Учитывая, что у молекулы три степени свободы, таким образом, находим, что вклад молекулы в полную энтропию составляет

$$\frac{3k}{2} \ln T + k \ln \frac{(2\pi mke)^{3/2} v_c}{h^3},$$

где v_c — объем ячейки (газ предполагается одноатомным).

Наконец, поскольку $pv = nkT$, полная энтропия всех n молекул, заключенных в ячейках объема v_c, будет

$$S^* = kn \left\{ \frac{5}{2} \ln T - \ln p + \ln \left[\frac{(2\pi m)^{3/2} k^{5/2} e^{3/2}}{h^3} \frac{nv_c}{v} \right] \right\}. \qquad (2)$$

Чтобы от этой величины перейти к эффективной энтропии газа, необходимо заметить, что, как мы предполагали, во всех ячейках одинакового объема имеется также одинаковое число молекул.

Если через P обозначить вероятность того, что это выполняется, то для перехода от (2) к истинной энтропии газа необходимо, согласно принципу Больцмана, вычесть еще из выражения (2) умноженный на k логарифм P. Поэтому энтропия газа равна

$$S = S^* - k \ln P. \qquad (3)$$

Предположим сначала, что объем v был разделен на n одинаковых ячеек. Вероятность P того, что на каждую ячейку приходится только одна молекула, вычисляется как отношение числа способов размещения молекул таким образом, чтобы каждая ячейка содержала одну молекулу (что, очевидно, равно $n!$) к полному числу способов размещения молекул во всех ячейках (n^n); применяя формулу Стирлинга, находим в достаточном для нашего случая приближении

$$P = \frac{n!}{n^n} = \frac{(n/e)^n}{n^n} = e^{-n}.$$

Подставляя полученную величину в соотношение (3), находим выражение

$$S = kn \left\{ \frac{5}{2} \ln T - \ln p + \ln \frac{(2\pi m)^{3/2} k^{5/2} e^{5/2}}{h^3} \right\}, \qquad (4)$$

тождественное формуле Тетроде — Сакуры и поэтому согласующееся с опытом. Отсюда следует заключить: в случае, когда пространство разделено на ячейки таким образом, что каждая из них содержит только один атом, для значения аддитивной константы энтропии получается точный результат. Иначе обстоит дело, если в каждой ячейке содержится более одного атома; разделим, например, объем v на $n/2$ ячеек одинакового объема, в которых содержится по два атома. Чтобы рассчитать в этом случае вероятность P, заметим, что число способов размещения n предметов в $n/2$ ячейках так, чтобы в каждой ячейке были только два предмета, очевидно, равно $n!/2^{n/2}$; число же всех возможных размещений $(n/2)^n$. Вероятность P, как обычно, можно оценить с помощью формулы Стирлинга:

$$P = \frac{n!}{2^{n/2}(n/2)^n} = \left(\frac{\sqrt{2}}{e}\right)^n.$$

Если подставить этот результат в соотношение (3), то для энтропии газа получилось бы выражение

$$S = kn\left\{\frac{5}{2}\ln T - \ln p + \ln\frac{(2\pi m)^{3/2} k^{5/2} e^{5/2}}{h^3} + \ln\sqrt{2}\right\}, \qquad (5)$$

которое отличается от (4), и поэтому от экспериментального значения на $\ln\sqrt{2}$. Аналогичные расхождения обнаруживаются, если разделить объем на $n/3$, $n/4$, ... ячеек, содержащих соответственно по 3, 4, ... молекулы. В качестве примера можно сделать расчет для случая, когда объем вообще не делится на ячейки, но движение молекул квантуется при допущении, что все они находятся в сосуде, имеющем форму параллелепипеда. В этом случае, очевидно, $P = 1$ и поэтому $S = S^*$; нетрудно видеть, что эта формула даже не имеет размерности формулы Тетроде — Сакуры.

3. Приведем соображения, имеющие целью показать, что причина расхождений в тех случаях, когда в каждой ячейке находится больше одной молекулы, состоит как раз в том, что (с помощью правил Зоммерфельда) квантовалась система, содержащая тождественные элементы.

Рассмотрим смесь двух газов внутри объема v, в котором находятся $n/2$ молекул каждого из них; предположим теперь для простоты, что два типа молекул, хотя и отличаются друг от друга, все-таки имеют одинаковую массу. Рассчитаем энтропию этой смеси, деля объем на $n/2$ одинаковых ячеек и полагая, что в каждой из них находится одна молекула одного типа и одна — другого. Если справедливо наше предположение о том, что причиной расхождения является присутствие в одной ячейке двух тождественных молекул, то мы должны ожидать в этом случае правильный результат, поскольку две молекулы, присутствующие в ячейке, неодинаковы. Действительно, для вычисления энтропии можно и в этом случае применить соотношение (3), где теперь P представляет собой веро-

ятность того, что в каждой из $n/2$ ячеек содержится по одной и только по одной молекуле каждого из двух типов. Теперь число возможных случаев размещения молекул, очевидно, равно $(n/2)^n$, а число благоприятных случаев $[(n/2!]^2$, так что с помощью формулы Стирлинга получается

$$P = \frac{[(n/2)!]^2}{(n/2)^n} = e^{-n}.$$

Тогда в качестве выражения энтропии смеси найдем

$$S = kn\left\{\frac{5}{2}\ln T - \ln p + \ln\frac{(2\pi m)^{3/2}e^{5/2}k^{5/2}}{h^3} + \ln 2\right\}. \qquad (6)$$

Вспоминая, что энтропия смеси двух идеальных газов равна сумме энтропий каждого из них в случае, если бы он занимал весь объем целиком, сразу приходим к выводу, что величина (6) точно совпадает со значением, требуемым термодинамикой.

Резюме

Обсуждается гипотеза о том, что неверные результаты применения правил квантования Зоммерфельда в количественных расчетах, относящихся к атомам с атомным номером больше единицы, обусловлены не недостатками метода возмущений или механики, а скорее всего другой причиной. Именно, эти атомы содержат, по крайней мере, два неразличимых электрона, и правила Зоммерфельда, даже когда разделение переменных возможно, неприменимы в случае полной тождественности некоторых частей рассматриваемой системы.

В поддержку такой гипотезы приводится доказательство того, что квантование движения одинаковых молекул, находящихся внутри сосуда в форме параллелепипеда, ведет к точному результату для абсолютной величины энтропии газа только в том случае, когда в каждой ячейке содержится одна молекула; если же газ состоит из смеси двух типов молекул и его квантуют, заключая молекулы в ячейки так, что в каждой из них содержится две молекулы разного типа, то полученный результат опять-таки будет правильным.

Рим, январь 1924 г.

К статье 18

В этой статье вычислено влияние возбужденных состояний атома на равновесную ионизацию, что оказалось возможным благодаря методу Ферми (статья 15), позволяющему устранить расходимость функции распределения атомных состояний. Такое уточнение теории оказалось очень полезным для астрофизических приложений.

Ф. Разетти

18

О РАВНОВЕСНОЙ ТЕРМИЧЕСКОЙ ИОНИЗАЦИИ *

1. В 1921 г. Мег Над Саха [1] предложил теорию термической ионизации газов, в которой процесс превращения нейтрального атома в положительный ион и электрон рассматривается целиком и полностью как обычная химическая реакция диссоциации. Если химические константы реагентов (нейтральных атомов, положительных ионов, электронов) известны, то стандартные термодинамические методы позволяют рассчитать степень ионизации в зависимости от температуры и давления. Эти константы можно будет получить из формулы Сакуры — Тетроде. Итак, обозначая через c_a и c_e соответственно концентрацию нейтральных атомов и электронов, находим

$$\frac{c_a}{c_e^2} = \frac{h^3}{(2\pi\mu)^{3/2}} \frac{1}{(kT)^{3/2}} e^{\frac{w}{kT}}, \tag{1}$$

где h — постоянная Планка; μ — масса электрона; k — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура и w — энергия, необходимая для ионизации нейтрального атома. (Эту формулу сразу можно получить из соотношений на стр. 41 работы Саха, выражая степень ионизации x и давление P через концентрации; мы записали ее в ином, более удобном для нас виде.)

Саха предложил важные астрофизические применения формулы (1). В качестве первого шага он определял, к какому спектру (дуговому или искровому) относятся линии в спектре звезды, чтобы получить сведения о состоянии соответствующего элемента (нейтральном или ионизованном), и, таким образом, с помощью формулы (1) оценил, хотя и грубо, температуры звезд, которые оказались в хорошем согласии с температурами, найденными другими способами.

---

* *Sull'equilibrio termico di ionizzazione*. Nuovo Cimento, 1924, 1, 153—158.

[1] M. N. Saha. Zeits. f. Phys., 1921, 6, 40.

По теории Саха для нейтрального атома возможно только одно состояние. Но очевидно, что если такое предположение оправдано при низких температурах, когда высшие квантовые состояния существенно не возбуждаются, то при температурах, достаточно высоких для тепловой диссоциации, кроме ионизованных атомов будет существовать и значительное число атомов, находящихся на уровнях с энергией выше минимальной; такие энергетические уровни, конечно, следует учитывать при расчете равновесной ионизации. Кстати, такую трудность почувствовал и Саха, который обсуждает ее на стр. 42 своей работы и приходит к выводу, что пока термодинамика не позволяет рассчитать химическое равновесие между всеми этими энергетическими уровнями; пренебрежение ими является необходимым временным предположением. В самом деле, если бы в этом расчете, как обычно принимается в теории квантов, статистические веса всех квантовых состояний принимались равными, то было бы найдено, что сумма всех этих весов расходится, что означало бы абсурдный результат: отсутствие ионизации даже при очень высокой температуре [2].

Недавно мне представился случай показать [3], что гипотеза об одинаковости статистических весов всех квантовых состояний справедлива в предельном случае бесконечно малых давлений, но уже несправедлива при конечных давлениях; при этом статистический вес различных квантовых состояний тем меньше, чем больше объем атома,находящегося в рассматриваемом квантовом состоянии. Оказывается, что статистический вес p_i квантового состояния атома с объемом v_i равен

$$p_i = e^{-4nv_i}, \tag{2}$$

где n — полное число молекул (любого сорта) на единицу объема.

Устранив трудность, связанную с расходимостью суммы статистических весов, нам теперь нетрудно рассчитать равновесную ионизацию с учетом всех энергетических уровней, что и представляет цель настоящей работы.

2. Формула (1) дает соотношение между концентрациями нейтральных атомов и ионов в предположении, что рассматриваемый вид атомов имеет статистический вес 1. Если бы статистический вес был p, то мы имели бы формулу, полученную из соотношения (1) умножением правой части на p. Итак, рассмотрим квантовое состояние с энергией w_i и через c_i обозначим концентрацию атомов в этом состоянии; учитывая соотношение (2), находим

$$c_i = c_e^2 \frac{h^2}{(2\pi\mu)^{3/2}} \frac{1}{(kT)^{3/2}} e^{\frac{w_i}{kT} - 4nv_i}. \tag{3}$$

---

[2] См., например, обсуждение в связи с сообщением Бекера: Phys. Zs., 1923, **24**, 485.
[3] E. Fermi. Rend. Lincei, 1923, **32**, 493. (Работа [Б17а], см. статью 15.— *Ред.*).

Если же обозначить через c_a полную концентрацию всех нейтральных атомов, в каком бы квантовом состоянии они ни находились, то будем иметь

$$c_a = \sum c_i = \frac{h^3}{(2\pi\mu)^{3/2}} \frac{c_e^2}{(kT)^{3/2}} \sum e^{\frac{w_i}{kT} - 4nv_i}. \qquad (4)$$

Эта формула должна заменить формулу (1).

Теперь хотелось бы обсудить различия между формулами (1) и (4); однако сначала заметим следующее: если бы для статистического веса вместо выражения (2) мы приняли в вычислениях значение 1, то ряд в правой части соотношения (4) был бы $\sum e^{w_i/kT}$, и, поскольку все энергии ионизации положительны, все его члены были бы больше 1, т. е. ряд расходился бы. Влияние члена e^{-4nv_i} таково, что теперь ряд сходится, и это позволяет учитывать все квантовые состояния в вычислениях равновесия; при этом здесь не принимается, что статистический вес квантового состояния с минимальной энергией равен 1, а веса всех других состояний — равны нулю, как это, по существу, сделал Саха.

3. Различие соотношений (1) и (4) состоит в том, что в (4) вместо

$$e^{\frac{w}{kT}} \qquad (5)$$

появляется выражение

$$\sum e^{\frac{w_i}{kT} - 4nv_i}. \qquad (6)$$

Итак, именно в различиях между этими двумя выражениями и заключается суть дела. Сразу видно, что эти различия будут малыми для веществ с высоким ионизационным потенциалом (нулевая группа периодической системы) и значительно больше для элементов с малым ионизационным потенциалом (щелочные металлы). Действительно, мы видим, что отношение выражения (6) к выражению (5) близко к 1 до тех пор, пока температура такова, что значение kT по порядку величины не превышает ионизационного потенциала. Поэтому различие может быть существенным только для щелочных металлов и при температуре порядка температур на поверхности звезд.

Чтобы получить количественное представление об этом различии, я выполнил численный расчет выражения (6) для калия при температуре 30 000°. Следует заметить, что s-термы щелочных металлов простые, в то время как p-, d-, f-, ...-термы — все двойные, так что главному квантовому числу i соответствуют $2i - 1$ энергетических уровней [4]. Что же касается объема

[4] В этом расчете не учтено пространственное квантование.— *Прим. ред. амер.-итал. изд.*

v_i, который, строго говоря, различен для каждого уровня, мы положили его равным объему соответствующего квантового состояния атома водорода; это приближение оправдывается тем, что оно наверняка законно для больших квантовых чисел, когда размеры орбиты валентного электрона металла почти равны размерам электронной орбиты водорода. Для малых же квантовых чисел, для которых такое отождествление орбит металла и водорода заведомо довольно неточно, само влияние объема несущественно, и поэтому совершенно безразлично, какую гипотезу относительно объема мы примем. Поэтому, согласно моей цитированной работе, я взял для объема значение $v_i = 6{,}3 \cdot 10^{-25} i^6$. Приняв эти предпосылки и обладая некоторым терпением, можно найти численное значение выражения (6).

Для калия при температуре 30 000°, плотности, равной одной тысячной от плотности воздуха при 0°, и атмосферном давлении найдено, что

$$\sum e^{\frac{w_i}{kT} - 4nv_i} = 231,$$

тогда как значение выражения (5) при тех же условиях равно

$$e^{\frac{w}{kT}} = 5{,}34.$$

Итак, в этом случае различие велико: при одинаковой концентрации ионов теория Саха предсказывает в 40 раз меньшую концентрацию нейтральных атомов.

Более ясно этот результат можно выразить, если указать такую температуру, которой по формуле Саха соответствует та же самая степень ионизации, что по формуле (4) при 30 000°. Такая температура, очевидно, получается из уравнения

$$\frac{e^{\frac{w}{kT}}}{T^{3/2}} = \frac{231}{(30\,000)^{3/2}},$$

где $w/k = 50\,200$. Из этого уравнения следует, что $T \approx 12\,100$.

Итак, видно, что при очень высоких температурах различия для щелочных металлов достаточно велики. Но следует учитывать, что при этих температурах такие атомы почти полностью ионизованы, так что их дуговой спектр невидим; это делает невозможным всякое сравнение со спектроскопическими данными наиболее горячих звезд. И действительно, сам Саха при определении температур наиболее горячих звезд был вынужден использовать данные, относящиеся к благородным газам (с высоким ионизационным потенциалом).

При более низких температурах, порядка температуры поверхности Солнца, различия между формулами Саха и (4) уже довольно малы. Например, в случае того же калия при концентрации, эквивалентной тысяч-

ной доле атмосферы при нормальной температуре, формула (4) для температуры 6000° дает число атомов на 25% выше предсказанного формулой Саха; такая разница, которая для лабораторных условий могла бы рассматриваться как достаточно большая, при неопределенности астрофизических данных является несущественной.

Если рассчитать температуру, которой согласно формуле Саха соответствует та же степень ионизации, что и по формуле (4) при температуре 6000°, то она оказывается около 5870°. Видно, что достаточно ошибиться на 130° при измерении температуры, чтобы не отличить эти два результата.

Итак, можно утверждать, что поправка, которую необходимо внести в формулу Саха для учета вклада всех энергетических уровней атома в равновесную ионизацию, оказывается в общем случае довольно малой. Самые существенные различия имеют место для щелочных металлов при очень высоких температурах.

Рим, февраль 1924 г.

К статье 19

В этой статье мы уже ясно видим признаки более зрелого стиля Ферми: фундаментальная идея — простая и в то же время остроумная — используется для решения нескольких интересных конкретных задач практической важности (с помощью математических методов, обеспечивающих достаточно хорошее приближение, но не более точное, чем это оправдано исходными физическими гипотезами). Результаты согласуются с опытом, но лишь по порядку величины, и Ферми делает типичное для него замечание, что в одном из приложений согласие с экспериментом лучше, чем следовало бы ожидать.

Вскоре после опубликования этой] статьи Бор заметил, что в приложении к энергетическому распределению электронов, выбиваемых при ионизации, метод Ферми не дает согласия с опытом, и заключил: «При таких обстоятельствах вряд ли можно будет считать доводом в пользу сделанных Ферми предположений тот факт, что оценка эффекта торможения, основанная на законе сохранения энергии, дает результат, который приближенно согласуется с опытом» (Zs. f. Phys., 1925, **34**, 149). (См.: Н. Бор. Избранные научные труды, т. I. М., 1970, стр. 556. Небезынтересно отметить, что отправным пунктом в этой статье Бора была концепция возможного нарушения законов сохранения в элементарных атомных процессах.— *Ред.*)

Позднее, когда была разработана квантовая механика, метод Ферми, предложенный для изучения столкновений электрически заряженных частиц, нашел свое адекватное теоретическое обоснование в теореме Дирака (P. A. Dirac. «Principles of Quantum Mechanics», 1930, стр. 167), что отметил Э. Дж. Вильямс (Proc. Roy. Soc., 1933, **139**, 163). Вильямс тщательно анализировал пределы применимости метода Ферми и, пользуясь квантовомеханическими значениями матричных элементов, вычислил вероятность возбуждения и ионизации при столкновениях на больших расстояниях. Несколько позже Вейцзекер воспользовался тем же самым методом для расчета тормозного излучения (Zs. f. Phys., 1937, 88, 612). В то время Вильямс и Вейцзекер работали в Копенгагене. Метод, известный как метод Вейцзекера — Вильямса, находил все более широкое применение в атомной и ядерной физике, и сам Ферми во многих случаях пользовался им. На протяжении всей его жизни фундаментальная идея этого метода оставалась его излюбленной идеей.

Э. Персико

19

К ТЕОРИИ СТОЛКНОВЕНИЙ АТОМОВ С ЭЛЕКТРИЧЕСКИ ЗАРЯЖЕННЫМИ ЧАСТИЦАМИ *

Проводится гармонический анализ электрического поля заряженной частицы, пролетающей вблизи атома, и результат сравнивается с электрическим полем света (при соответствующем частотном распределении). Предполагается, что вероятность возбуждения или ионизации атома пролетающей мимо него частицей равна вероятности возбуждения или ионизации эквивалентным излучением. Это предположение используется для анализа возбуждения при электронном ударе, а также для расчета ионизации и пробега α-лучей.

1. Если находящийся в нормальном состоянии атом облучается светом надлежащей частоты, то он может возбудиться, т. е. квант может поглотиться, вследствие чего атом переходит на более высокий энергетический уровень. Когда квант падающего света больше работы ионизации атома, последний может оказаться ионизованным; при этом вырывается электрон внутренних или внешних оболочек атома.

Аналогичное явление происходит при столкновении атомов с электронами. Когда атомы газа бомбардируются электронами, то при малых скоростях происходит возбуждение, а при больших — ионизация (сначала внешних, затем внутренних оболочек атома).

Цель данной работы состоит в уточнении аналогии между этими двумя классами явлений и в количественном описании процессов соударения с помощью данных по поглощению света.

Когда вблизи некоторой точки пролетает электрически заряженная частица, там возникает переменное электрическое поле. Если же с помощью интеграла Фурье провести гармонический анализ этого поля, то окажется, что оно эквивалентно полю, которое возникло бы в этой точке при облучении ее светом соответствующего непрерывного распределения частот. Представим теперь, что атом находится в этой точке; при этом весьма резонно предположить, что электрическое поле заряженной частицы вызывает те же самые явления возбуждения и ионизации атома, как и электрическое поле эквивалентного света. Когда для атома известен коэффициент поглощения света как функция частоты, можно вычислить вероятность ионизации электрически заряженной частицей, пролетающей с заданной скоростью на заданном расстоянии от атома. Однако уже сейчас следует ввести ограничение на такое соответствие электрических полей света и частицы. В самом деле, известно, что тело, движущееся со ско-

* *Über die Theorie des Stosses zwischen Atomen und elektrisch geladenen Teilchen.* Zs. f. Physik, 1924, **29**, 315—327.

ростью v, может в результате столкновения вызвать лишь такие процессы, энергия которых не превышает кинетической энергии этого тела. Напротив, в гармоническом разложении его электрического поля присутствуют все частоты, включая высшие. Поэтому мы вынуждены предположить, что все частоты, кванты энергии которых больше кинетической энергии частицы, не могут оказать какого-либо действия, так как для их излучения недостает энергии.

Мы воспользовались нашей гипотезой для описания трех явлений, которые допускают один и тот же тип экспериментального подтверждения.

а) Возбуждение линии ртути 2537 Å. С количественной стороны оптическое поглощение этой линии известно достаточно хорошо; кроме того, имеются опыты, из которых можно определить порядок величины вероятности возбуждения атомов ртути при столкновении с медленными электронами. Наша теория дает для этой вероятности несколько завышенное, но все же верное по порядку величины значение; естественно, однако, что неопределенность экспериментальных результатов исключает строгую проверку теории.

б) Число пар ионов, создаваемых на сантиметре пробега α-частицей RaC. Мы решили эту задачу для гелия, так как для этого газа коэффициент поглощения в зависимости от частоты известен с достаточной точностью (гелий является одноатомным газом, и электроны его атома находятся лишь в K-оболочке). Теория удовлетворительно согласуется с опытом. Более ранние теории ударной ионизации [1] можно резюмировать следующим образом. Когда вблизи атома пролетает электрически заряженная частица, она притягивает его электроны и передает им определенную кинетическую энергию, которую можно вычислить, предполагая, что электроны атома являются свободными. Далее полагается, что электрон отрывается от атома, как только эта энергия превысит работу ионизации.

в) Пробег α-частиц RaC в гелии. Мы предположили следующий механизм торможения α-частиц: при прохождении α-частицы через гелий вокруг нее возникает переменное электрическое поле, энергия которого поглощается смежными атомами точно так же, как если бы это было электрическое поле световой волны. Поглощаемая таким образом энергия черпается, естественно, за счет энергии частицы, которая вследствие этого замедляется. В этом случае согласие теории с опытом также вполне удовлетворительно. Торможение α-лучей в веществе ранее изучалось теоретически Томсоном и Бором. Согласно Бору [2], электроны связаны в атоме квазиупругими силами и благодаря притяжению частицы приходят в движение; энергия частицы при этом уменьшится, конечно, на величину переданной электронам энергии. Бор обнаружил хорошее согласие с опытом;

---

[1] J. J. Thomson. Phil. Mag., 1912, 23, 449; N. Bohr. Там же, 1915, 30, 581; S. Rosseland. Там же, 1923, 45, 65.

[2] N. Bohr. Phil. Mag., 1913, 25, 10; 1915, 30, 581. (См. перевод: Н. Бор. Избранные научные труды, т. I. М., 1970, стр. 63 и 215.— *Ред.*)

при этом частоту, соответствующую упомянутой связи, он принимал — смотря по обстоятельствам — равной по порядку величины оптическим или рентгеновским частотам.

Во втором разделе настоящей работы будет выведено несколько формул для расчета светового поля, эквивалентного электрическому полю заряженной частицы, а в третьем, четвертом и пятом даются приложения к упомянутым явлениям «а», «б» и «в».

2. Вычислим сначала спектральное распределение энергии, которое эквивалентно полю, создаваемому в точке P частицей с зарядом ε. Пусть v — скорость частицы, а b — наименьшее расстояние от нее до точки P. Компоненты напряженности электрического поля, параллельная и перпендикулярная скорости частицы, равны

$$E_1 = \frac{\varepsilon v \Theta}{(b^2 + v^2\Theta^2)^{3/2}}, \qquad E_2 = \frac{\varepsilon b}{(b^2 + v^2\Theta^2)^{3/2}}, \tag{1}$$

где Θ означает время, прошедшее с момента максимального сближения. Если мы положим, что T есть некоторое время, возрастающее до бесконечности, то E_1 и E_2 можно разложить в ряд Фурье (для $-T/2 < \Theta < T/2$). Находим, что

$$E_1 = \sum a_n \sin \frac{2\pi n}{T}\Theta, \qquad E_2 = \sum b_n \cos \frac{2\pi n}{T}\Theta, \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2\varepsilon v}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} \frac{\Theta \sin \frac{2\pi n \Theta}{T}\, d\Theta}{(b^2 + v^2\Theta^2)^{3/2}}, \\ b_n &= \frac{2\varepsilon b}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} \frac{\cos \frac{2\pi n \Theta}{T}\, d\Theta}{(b^2 + v^2\Theta^2)^{3/2}}. \end{aligned} \tag{3}$$

Электрическое поле $a_n \sin (2\pi n\Theta/T)$ равно электрическому полю световой волны, интенсивность которой $\frac{c}{4\pi}\frac{a_n^2}{2}$ и частота $\nu = n/T$. Пусть $J(\nu)\, d\nu$ — умноженная на продолжительность действия полная интенсивность света в интервале частот $d\nu$; находим

$$J(\nu)\, d\nu = \lim_{T=\infty} \frac{cT}{4\pi} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2} T\, d\nu = \frac{c\varepsilon^2}{2\pi} \left\{ b^2 \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2\pi\nu\Theta\, d\Theta}{(b^2 + v^2\Theta^2)^{3/2}} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + v^2 \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\Theta \sin 2\pi\nu\Theta\, d\Theta}{(b^2 + v^2\Theta^2)^{3/2}} \right)^2 \right\} d\nu.$$

Входящие в это соотношение интегралы можно выразить через модифицированные бесселевы функции 2-го рода (нулевого и первого порядка) [3]. В самом деле,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega\varkappa \, d\varkappa}{(1+\varkappa^2)^{3/2}} = 2\omega K_1(\omega),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varkappa \sin \omega\varkappa \, d\varkappa}{(1+\varkappa^2)^{3/2}} = -2\omega K_0(\omega).$$

С помощью этих формул сразу же находим

$$J(\nu) = \frac{8\pi c\varepsilon^2\nu^2}{v^4}\left\{K_0^2\left(\frac{2\pi\nu b}{v}\right) + K_1^2\left(\frac{2\pi\nu b}{v}\right)\right\}; \qquad (4)$$

ради краткости положим

$$B(\omega) = K_0^2(\omega) + K_1^2(\omega),$$

после чего получим

$$J(\nu) = \frac{8\pi c\varepsilon^2\nu^2}{v^4} B\left(\frac{2\pi\nu b}{v}\right). \qquad (5)$$

Поскольку же все частоты, кванты энергии которых превышают кинетическую энергию частицы, не могут — согласно нашему предположению — оказывать никакого действия, выясняется, что поле, возникающее при прохождении частицы, эквивалентно следующему спектральному распределению:

$$J(\nu) = \begin{cases} \dfrac{8\pi c\varepsilon^2\nu^2}{v^4} B\left(\dfrac{2\pi\nu b}{v}\right) & \text{при } h\nu \leqslant \dfrac{1}{2}mv^2, \\ 0 & \text{при } h\nu > \dfrac{1}{2}mv^2. \end{cases} \qquad (6)$$

3. Поясним теперь применение общего метода на простом примере. Для этого исследуем возбуждение резонансного излучения при соударении. Рассмотрим, например, атом ртути, и пусть его коэффициент поглощения частоты ν равен $\alpha(\nu)$. Это означает, что атом, облучаемый светом, интенсивность которого $J(\nu)\,d\nu$, в среднем поглощает энергию $J(\nu)\,\alpha(\nu)\,d\nu$, т. е. вероятность поглощения кванта $h\nu$ равна

$$\frac{J(\nu)\,\alpha(\nu)\,d\nu}{h\nu}. \qquad (7)$$

---

[3] См., например, G r a y, M a t h e w s, M a c r o b e r t. Bessel Functions, London, 1922, где можно найти также и таблицы этих функций. Относительно разложения Фурье этих сил см. также: Н. Б о р. Цит. соч.

Поскольку же поглощение кванта, соответствующего линии поглощения, приводит к возбуждению атома до энергетического уровня $2p$, мы обнаруживаем, что выражение (7) представляло бы вероятность возбуждения только в том случае, если бы давали вклад частоты интервала $d\nu$. Обозначим через $\Pi(b)$ вероятность возбуждения состояния $2p$, когда частица пролетает на расстоянии b; сразу же получаем [4], что

$$\Pi(b) = 1 - e^{-\int \frac{J(\nu)\,\alpha(\nu)\,d\nu}{h\nu}}. \tag{8}$$

Так как в случае резонанса $\alpha(\nu)$ отличен от нуля лишь в очень узкой области вблизи резонансной частоты ν_0, можно написать

$$\int \frac{J(\nu)\,\alpha(\nu)\,d\nu}{h\nu} = \frac{J(\nu_0)\,\alpha}{h\nu_0},$$

где

$$\alpha = \int \alpha(\nu)\,d\nu.$$

Таким образом, в нашем случае формула (8) принимает вид

$$\Pi(b) = 1 - e^{-\frac{\alpha}{h\nu_0}J(\nu_0)}. \tag{8*}$$

Отсюда можно вычислить эквивалентный радиус ρ атома при возбуждении резонансного излучения, т. е. радиус, которым атом обладал бы в предположении, что каждое столкновение приводит к ионизации. Очевидно, что этот радиус определяется из соотношения

$$\pi\rho^2 = 2\pi\int b\,db\,\Pi(b).$$

Учитывая равенства (6), находим [5], следовательно, что при $^1/_2\,mv^2 > h\nu_0$

$$\rho^2 = 2\int_0^\infty \left\{1 - e^{-\frac{8\pi\varepsilon^2 c\alpha\nu_0}{hv^4}B\left(\frac{2\pi\nu_0 b}{v}\right)}\right\} b\,db = \frac{v^2}{2\pi^2\nu_0^2}\int_0^\infty \left(1 - e^{-\frac{8\pi\varepsilon^2 c\alpha\nu_0}{hv^4}B(x)}\right) x\,dx. \tag{9}$$

---

[4] В самом деле, вероятность того, что атом не поглощает ни одного кванта, равна

$$1 - \Pi(b) = \Pi\left(1 - \frac{J(\nu)\,\alpha(\nu)\,d\nu}{h\nu}\right),$$

где произведение нужно брать по всему бесконечно малому интервалу частот $d\nu$. Если затем прологарифмировать обе части, то в пределе найдем

$$\ln[1 - \Pi(b)] = \sum \ln\left(1 - \frac{J(\nu)\,\alpha(\nu)\,d\nu}{h\nu}\right) = -\int \frac{J(\nu)\,\alpha(\nu)\,d\nu}{h\nu},$$

откуда и следует формула (8).

[5] В действительности электрон, пролетающий с малой скоростью вблизи атома, будет заметно отклоняться электрическим полем последнего со своего пути. Но, поскольку нам нужно оценить этот процесс лишь по порядку величины, мы все же воспользуемся формулой (6).

Этот интеграл можно приближенно вычислить [6]; мы получим

$$\rho^2 = \frac{2\varepsilon^2 c\alpha}{\pi h\nu_0 v^2}\left(0{,}54 - \ln\frac{8\pi\varepsilon^2 c\alpha\nu_0}{hv^4}\right). \qquad (9^*)$$

Возбуждение резонансной линии 2537 Hg электронным ударом экспериментально исследовалось Шпонер [7]. К сожалению, однако, эта работа дает лишь порядок величины вероятности возбуждения. Шпонер обнаружила, в частности, что при столкновении электронов, имеющих энергию немного выше 4,9 *эв*, с атомами Hg вероятность возбуждения последних составляет всего лишь несколько процентов. Чтобы вычислить значение ρ по формуле (9*), примем для v величину, которая соответствует потенциалу 8 *в*. Значение α можно взять из работ Фюхтбауэра [8]. Он установил, что при облучении атома ртути светом со спектральным распределением $J(\nu)$ вероятность поглощения кванта резонансной частоты равна $PJ(\nu_0)$, где $P = 8\cdot 10^7$. Очевидно, что $\alpha = Ph\nu$, откуда $\alpha = 6\cdot 10^{-4}$; в итоге формула (9*) дает

$$\rho = 0{,}8\cdot 10^{-8}.$$

Это значение, очевидно, несколько выше полученного Шпонер. Если же предположить, что доля неупругих соударений составляла 9%, то для ρ всегда получалось бы значение $0{,}4\cdot 10^{-8}$, т. е. примерно вдвое меньше нашего. Однако это расхождение можно легко объяснить: когда электроны

---

[6] Чтобы получить приближенное выражение интеграла

$$J(\alpha) = \int_0^\infty [1 - e^{-\alpha B(x)}]\, x dx$$

при $\alpha \ll 1$, заметим, что при $x < 0{,}4$ с достаточной точностью $B(x) = 1/x^2$; далее, при $\alpha \ll 1$ и $x > 0{,}4$ можно положить, что

$$1 - e^{-\alpha B(x)} = \alpha B(x).$$

Таким образом, мы можем записать

$$J(\alpha) = \int_0^{0{,}4} (1 - e^{-\alpha/x^2})\, x dx + \alpha \int_{0{,}4}^\infty B(x)\, x dx.$$

Численное интегрирование дает для второго интеграла величину $0{,}973\,\alpha$. Первый же легко вычисляется с помощью асимптотических выражений для интегрального логарифма; при этом получается значение $-(\alpha/2)\ln\alpha - 0{,}705\,\alpha$. В результате получается, следовательно,

$$J(\alpha) = (0{,}268 - \frac{1}{2}\ln\alpha)\,\alpha.$$

[7] Hertha Sponer. Zs. f. Phys., 1921, 7, 185.

[8] Füchtbauer. Phys. Zs., 1920, **21**, 322; Füchtbauer, Joos. Там же, стр. 694.

со скоростью в несколько вольт пролетают вблизи какого-либо электрона на расстоянии порядка 10^{-8} *см*, они испытывают с его стороны очень сильное отталкивание. Так как при вычислении ρ мы пренебрегли таким отклонением, можно было предвидеть, что значение ρ окажется завышенным. Поскольку же строгое подтверждение теории в нашем случае исключается вследствие ненадежности измерений, более точное и, конечно, весьма сложное вычисление ρ представляется излишним, ибо даже при наших упрощающих предположениях получается правильный порядок величины ρ.

Точно таким же образом объясняются и процессы ударной ионизации. Известно, что у всех атомов за пределами главной серии наблюдается непрерывный спектр как поглощения, так и испускания; он соответствует переходу оптического электрона из нормального состояния в состояние, в котором этот электрон отрывается от атома, и обладает, кроме того, определенной кинетической энергией. Этот спектр состоит из широкой полосы с резким краем со стороны красной части спектра, на границе главной серии, и размытой со стороны коротких длин волн. Если же скорость падающих электронов такова, что частота $mv^2/2h$ оказывается за пределами этой полосы поглощения, то формулой (9*) можно воспользоваться также и для вычисления эквивалентного радиуса атома при ионизации; напротив, когда граничная частота $mv^2/2h$ попадает внутрь полосы поглощения, то радиус будет меньше того, что дает формула (9*), и станет равным нулю, как только $mv^2/2h$ совпадет с границей главной серии. Подобное поведение ρ в зависимости от v качественно подтверждается опытом [9]. К сожалению, количественное исследование этого процесса представляется невозможным, поскольку практически ничего неизвестно об интенсивностях в полосе поглощения.

4. При расчете ионизации, вызванной α-лучами, ситуация более благоприятна. В этом случае очень медленные α-частицы будут лишь незначительно отклоняться полем атома. Следующая формула обобщает [10] данные о поглощении в области рентгеновского излучения:

$$\alpha(\nu) = \frac{KZ^4}{\nu^3} + D, \tag{10}$$

где $\alpha(\nu)$ означает атомный коэффициент поглощения; Z — атомный номер; D — обусловленная рассеянием величина поглощения; K — коэффициент, который на границе рентгеновской серии испытывает разрыв: для значений ν, превышающих граничную частоту ν_0 K-серии, $K = 0{,}6\cdot 10^{30}$, а для $\nu < \nu_0$ $K = 0{,}1\cdot 10^{30}$. Отсюда можно сделать вывод, что суммарное по-

---

[9] Nettleton. Proc. Nat. Acad. Amer., 1924, **10**, 140.
[10] См., например, H. A. Kramers. Phil. Mag., 1923, **46**, 836.

глощение, связанное с ионизацией K-оболочки, равно

$$\alpha(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{при } \nu < \nu_0, \\ \dfrac{HZ^4}{\nu^8} & \text{при } \nu > \nu_0. \end{cases} \tag{11}$$

Коэффициент H описывает, разумеется, скачок при переходе K-границы и, следовательно, равен

$$H = 0{,}5 \cdot 10^{30}.$$

Вероятность $\Pi(b)$ ионизации K-оболочки атома α-частицей, которая пролетает от него на расстоянии b, снова можно вычислить по формуле (8). Поскольку же масса α-частицы весьма велика, граничную частоту $mv^2/2h$ можно заменить на ∞. После этого получим

$$\Pi(b) = 1 - e^{-\frac{8\pi c\varepsilon^2 HZ^4}{hv^4}\int\limits_{\nu_0}^{\infty}\frac{d\nu}{\nu^2}B\left(\frac{2\pi\nu b}{v}\right)}. \tag{12}$$

Радиус можно опять вычислить по формуле

$$\rho^2 = 2\int\limits_0^\infty b\,db\,\Pi(b).$$

Таким образом, находим:

$$\rho^2 = 2\int\limits_0^\infty b\,db\left\{1 - e^{-\frac{8\pi c\varepsilon^2 HZ^4}{hv^4}\int\limits_{\nu_0}^{\infty}\frac{d\nu}{\nu^2}B\left(\frac{2\pi\nu b}{v}\right)}\right\} =$$

$$= \frac{v^2}{2\pi^2\nu_0^2}\int\limits_0^\infty \xi d\xi\left\{1 - e^{-\alpha\xi\int\limits_{\xi}^{\infty}\frac{dx}{x^2}B(x)}\right\}, \tag{13}$$

где для краткости мы полагаем

$$\alpha = \frac{8\pi c\varepsilon^2 HZ^4}{h\nu_0 v^4}. \tag{14}$$

В соотношении (13) интеграл можно вычислить приближенно [11] для $\alpha \ll 1$,

---

[11] Нужно вычислить интеграл

$$J = \int\limits_0^\infty \xi d\xi\left\{1 - e^{-\alpha\xi\int\limits_{\xi}^{\infty}\frac{dx}{x^2}B(x)}\right\}.$$

Когда $\alpha < 0{,}1$, интеграл J можно разложить на два: один от 0 до 0,4, а второй —

после чего получим

$$\rho^2 = \frac{v^2}{2\pi^2\nu_0^2}\alpha\left(0{,}45 - \frac{1}{6}\ln\alpha\right). \qquad (13^*)$$

Воспользуемся этой формулой для расчета ионизации гелия α-лучами RaC. Поскольку электроны в атоме гелия располагаются только в одной, и притом заполненной, K-оболочке, попробуем выяснить, нельзя ли применить формулу (13*) и положить $H = 0{,}5\cdot 10^{30}$. Примем, далее, $\nu_0 = 6{,}0\cdot 10^{15}$ — соответственно потенциалу ионизации 24,5 *в*; для α-лучей RaC $v = 1{,}98\cdot 10^9$.

Таким образом, находим, что $\alpha = 0{,}0091$, откуда получается

$$\rho^2 = 0{,}56\cdot 10^{-16}, \qquad \rho = 0{,}75\cdot 10^{-8}.$$

Число пар ионов, создаваемых частицей на сантиметр пробега, равно, очевидно, $\pi\rho^2 n$, где $n = 2{,}6\cdot 10^{19}$ есть число атомов в 1 *см*^{3} при 15°.

Следовательно, это число пар ионов равно 4800.

Экспериментально найдено, что оно равно 4600.

Согласие этих двух величин исключительно хорошее. Во всяком случае, можно сказать, что оно несколько лучше, чем можно было бы ожидать. В действительности же, вследствие большой неопределенности, особенно в величине коэффициента H, можно было бы легко объяснить расхождение около 30%, а может быть, и несколько большее [12].

5. Дальнейшее подтверждение нашим выводам можно найти в теории торможения α-частиц в веществе. Этот пример мы также приведем для ге-

---

от 0,4 до ∞. Первый можно вычислить, полагая с достаточной точностью при $\xi < 0{,}4$, что

$$\int_\xi^\infty \frac{dx}{x^2} B(x) = \frac{1}{3\xi^3} - 0{,}64$$

и воспользовавшись затем асимптотическим выражением для интегрального логарифма. Второй интеграл можно записать приближенно в виде

$$\alpha\int_{0,4}^\infty \xi^2 d\xi \int_\xi^\infty \frac{dx}{x^2} B(x).$$

Определенный численно коэффициент при α равен 0,28. Таким образом, находим

$$J = \alpha\left(0{,}45 - \frac{1}{6}\ln\alpha\right).$$

[12] Следует помнить, кроме того, что непосредственное сравнение теоретических и экспериментальных результатов незаконно, так как первые не учитывают вторичной ионизации, которая могла бы составить заметную долю полной ионизации. Однако, во всяком случае, при грубой экстраполяции H нельзя ожидать лучшего согласия.— *Прим. авт. при корр.*

лия, поскольку, как уже указывалось, относительно его поглощения можно сделать разумные предположения.

Вычислим сначала потери энергии, которые испытывает α-частица, пролетая на расстоянии b от атома. Пусть $\Pi(b)$ опять означает вероятность ионизации атома при прохождении α-частицы на расстоянии b от него, а $P(b,\nu)\,d\nu$ — вероятность ионизации для того случая, когда имеются только частоты интервала $d\nu$. Тогда вероятность ионизации за счет поглощения кванта из интервала частот $d\nu$ равна

$$\Pi(b)\frac{P(b,\nu)\,d\nu}{\int\limits_0^\infty P(b,\nu)\,d\nu}.$$

Эта ионизация отвечает затратам энергии $h\nu$. Отсюда средние потери энергии частицы равны

$$\Pi(b)\frac{\int\limits_0^\infty P(b,\nu)\,h\nu d\nu}{\int\limits_0^\infty P(b,\nu)\,d\nu}.$$

Если n — число атомов в единице объема, то α-частица на единичном пробеге и на расстоянии между b и $b+db$ пролетает мимо $2\pi b db n$ атомов. Обозначая ее кинетическую энергию через T, находим, следовательно, что

$$\frac{dT}{dx}=-2\pi n\int\limits_0^\infty b db \Pi(b)\frac{\int\limits_0^\infty P(b,\nu)\,h\nu d\nu}{\int\limits_0^\infty P(b,\nu)\,d\nu}. \tag{15}$$

Далее имеем

$$P(b,\nu)=\frac{\alpha(\nu)J(\nu)}{h\nu}=\begin{cases}\dfrac{8\pi c\varepsilon^2HZ^4}{hv^4}\dfrac{1}{\nu^2}B\left(\dfrac{2\pi\nu b}{v}\right) & \text{при}\quad \nu>\nu_0,\\ 0 & \text{при}\quad \nu<\nu_0,\end{cases}$$

$$\Pi(b)=1-e^{-\int\limits_0^\infty P(b,\nu)\,d\nu}.$$

С учетом равенства (14) формула (15) принимает вид

$$\frac{dT}{dx}=-\frac{4c\varepsilon^2HZ^4n}{\nu_0^2v^2}\int\limits_0^\infty \xi d\xi\left\{1-e^{-\alpha\xi\int\limits_\xi^\infty \frac{dx}{x^3}B(x)}\right\}\frac{\int\limits_\xi^\infty \frac{dx}{x}B(x)}{\alpha\xi\int\limits_\xi^\infty \frac{dx}{x^2}B(x)}. \tag{16}$$

При очень малых α это выражение можно вычислить приближенно [13], после чего найдем, что

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{c\varepsilon^2 HZ^4 n}{\nu_0^2 v^2}\left(0{,}96 + \ln\frac{h\nu_0 v^4}{8\pi c\varepsilon^2 HZ^4}\right); \qquad (17)$$

поскольку же $T = 1/2\, mv^2$, мы, наконец, получаем

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{c\varepsilon^2 HZ^4 n}{m\nu_0^2 v^3}\left(0{,}96 + \ln\frac{h\nu_0 v^4}{8\pi c\varepsilon^2 HZ^4}\right). \qquad (17^*)$$

Отсюда можно легко вывести формулу, которая говорит нам о том, какой путь прошла α-частица за то время, пока ее скорость уменьшилась от начальной величины v_0 до конечной v. Таким образом, находим

$$x = \frac{m\nu_0^2}{c\varepsilon^2 HZ^4 n}\int\limits_v^{v_0}\frac{v^3 dv}{0{,}96 + \ln\frac{h\nu_0 v^4}{8\pi c\varepsilon^2 HZ^4}} = 2{,}4\frac{m\nu_0}{nh}\int\limits_{\frac{0{,}104 h\nu_0 v^4}{c\varepsilon^2 HZ^4}}^{\frac{0{,}104 h\nu_0 v_0^4}{c\varepsilon^2 HZ^4}}\frac{du}{\ln u}. \qquad (18)$$

Разумеется, эта формула справедлива лишь в том случае, когда оба предела у интеграла велики по сравнению с единицей, ибо в противном случае более неприменима формула (17*), из которой выводится (18), а выра-

---

[13] Для вычисления этого интеграла при $\xi < 0{,}4$ нужно воспользоваться приближенными формулами:

$$\int\limits_\xi^\infty \frac{dx}{x^2}B(x) = \frac{1}{3\xi^3} - 0{,}64, \qquad \int\limits_\xi^\infty \frac{dx}{x}B(x) = \frac{1}{2\xi^2} - 0{,}64.$$

Далее интеграл нужно разложить на две части. Первую — интеграл от 0 до 0,4 — можно легко свести к асимптотическому выражению интегрального логарифма, а для вычисления второй части — интеграла от 0,4 до ∞ — нужно лишь вспомнить что для $\xi > 0{,}4$ и очень малых α можно положить

$$1 - e^{-\alpha\xi\int\limits_\xi^\infty \frac{du}{u^2}B(u)} = \alpha\xi\int\limits_\xi^\infty \frac{du}{u^2}B(u).$$

Теперь достаточно путем численных расчетов найти значение интеграла:

$$\int\limits_{0,4}^\infty \xi d\xi\int\limits_\xi^\infty \frac{dx}{x}B(x) = 0{,}35.$$

Наконец, мы находим, что величина искомого интеграла есть $0{,}24 - \frac{1}{4}\ln\alpha$, откуда, пользуясь соотношением (15), сразу же получаем формулу (17).

жение (16) тоже нужно было бы вычислять для больших значений α. Тем не менее с помощью формулы (18) можно рассчитать тот путь, который проходит в гелии α-частица, пока ее скорость уменьшится до половины начального значения. Полагая в формуле (18)

$$m = 6{,}6\cdot 10^{-24},\quad \nu_0 = 6{,}0\cdot 10^{15},\quad n = 2{,}6\cdot 10^{19},$$

$$\varepsilon = 2\cdot 4{,}77\cdot 10^{-10} = 9{,}54\cdot 10^{-10},\quad v_0 = 1{,}98\cdot 10^{9},\quad v = 0{,}99\cdot 10^{9},$$

находим, что

$$x = 0{,}56 \int\limits_{18}^{288} \frac{du}{\ln u} = 32.$$

Как известно, пробег α-лучей со скоростью $v_0/2$ составляет 1/8 пробега [14] α-лучей, скорость которых v_0. Отсюда следует, что пробег в гелии равен

$$32 + 5 = 37\ \textit{см}.$$

Экспериментально найденная величина пробега составляет 33 *см* — в хорошем согласии с теоретическим значением.

---

[14] Расчет торможения по формуле (16) при малых значениях v (α — велико) также показывает, что пробег α-лучей со скоростью $v_0/2 = 0{,}99\cdot 10^9$ составляет примерно 5 *см*.— *Прим. авт. при корр.*

К статье 20

Эта работа связана с пребыванием Ферми в университетах Голландии. В Утрехте тогда экспериментально изучались интенсивности спектральных линий; эта задача представляла также значительный интерес с теоретической точки зрения. Как говорится в примечании 6 к статье, Ферми обсуждал эту проблему с проф. П. Эренфестом.

Голландский вариант статьи (см. [Б22а] — *Ред.*) является докладом, представленным на заседание Нидерландского общества естествоиспытателей 1 ноября 1924 г. Более подробная итальянская статья была написана позже.

Ф. Разетти

20

ОБ ИНТЕНСИВНОСТИ ЛИНИЙ МУЛЬТИПЛЕТА*

1. Новые методы, разработанные в Физическом институте Утрехтского университета для определения относительных интенсивностей компонент мультиплета[1], позволили в последнее время собрать по этому вопросу весьма богатый и точный материал, который привел к открытию неожиданно простых эмпирических правил[2]. Эти правила можно сформулировать следующим образом. Разделим линии одного мультиплета на группы, помещая в каждую из них все линии, которые имеют один и тот же исходный (или конечный) уровень. Оказывается, что справедливо следующее правило: сумма интенсивностей всех линий одной такой группы пропорциональна внутреннему квантовому числу J исходного (или конечного) терма (в нормировке Ланде[3]). Например, для дублетов sp щелочных элементов отношение интенсивностей равно 2 : 1, для триплетов sp щелочноземельных элементов 5 : 3 : 1 и т. д. В случае высших мультиплетов эти правила недостаточны для определения интенсивностей всех компонент[4]; в то же время для ряда случаев этого типа имеются хорошие измерения интенсивности.

Возникает вопрос о теоретической интерпретации накопленного эмпирического материала. При современном состоянии теории атома единственный путь к такой интерпретации лежит через принцип соответствия.

---

* *Sopra l'intensità della righe multiple.* Rend. Lincei, 1925, 1, 120—124. Представлено на заседании 4 января 1925 г. академиком О. М. Корбино.

1 H. B. Dorgelo. Zs. f. Phys., 1923, 13, 206; 1924, 22, 170.

2 H. C. Burger, H. B. Dorgelo. Zs. f. Phys., 1924, 23, 258.

3 A. Landè. Zs. f. Phys., 1923, 15, 206.

4 Доргело и Бургер сделали попытку обобщить свои правила и на эти случаи, но, как мы увидим из § 3, их обобщение не является точным.

Известно, что Зоммерфельд и Гейзенберг [5] на основании принципа соответствия нашли формулу для отношения интенсивностей компонент мультиплета. Эти авторы пришли к выводу, что отношения интенсивностей трех компонент, соответствующих квантовым переходам с $\Delta k = 1$, $\Delta j = +1, 0, -1$, есть

$$(1 + \cos\theta)^2 : 2\sin^2\theta : (1 - \cos\theta)^2, \tag{1}$$

где θ — некое среднее значение между углами, которые полный момент атома составляет с моментом валентного электрона на исходной и конечной орбитах. Соотношения (1) можно использовать только для выводов качественного характера (правило интенсивности Зоммерфельда).

В этой работе мы намерены показать, как небольшое изменение рассуждений Зоммерфельда и Гейзенберга все же может привести к установлению формул, которые при некоторых понятных исключениях количественно объясняют экспериментальные результататы. Ниже перечислены основные пункты, в которых наши аргументы отходят от рассуждений Зоммерфельда и Гейзенберга.

а) При выводе соотношений (1) квантовый переход с Δk, Δj, который обусловливает одну компоненту мультиплета, рассматривается как простой, т. е. без учета того, что он в действительности является результатом многочисленных переходов с изменением магнитного квантового числа m, причем каждый из них в отсутствие магнитного поля порождает ту же самую компоненту; если предположить, например, что атом находится в магнитном поле H крайне малой интенсивности, то интенсивность нерасщепленной линии, очевидно, следует рассчитывать как сумму интенсивностей всех ее зеемановских компонент [6].

б) Мы определяли угол θ и угол φ (между полным моментом импульса атома и H) следующим образом. Предположим, согласно Ланде, что квантовые числа R, K, J, m представляют собой соответственно момент атомного остатка, момент оптического электрона, полный момент атома и его проекцию на H.

Поскольку J — результирующая R и K, находим

$$\cos\widehat{KJ} = \frac{J^2 + K^2 - R^2}{2KJ}, \qquad \cos\widehat{HJ} = \frac{m}{J}.$$

[5] A. Sommerfeld, W. Heisenberg. Zs. f. Phys., 1922, 11, 130.

[6] Получаемый таким образом результат количественно очень мало отличается от того, который бы мы нашли, рассматривая переход как простой, но приписывая каждому переходу вес J, равный среднему значений J, соответствующих исходному и конечному термам; однако мы предпочитаем представить расчет интенсивности именно так, поскольку он не только теоретически более ясен, но, кроме того, объясняет запрет квантового перехода $J = 1/2 \to J = 1/2$. Идея такого подхода возникла у меня после разговора с проф. П. Эренфестом, которому здесь я еще раз приношу мою сердечную благодарность.

Но θ и φ — некие значения углов $\widehat{KJ}$ и $\widehat{HJ}$, промежуточные между теми, которые они принимают на исходной и конечной орбитах. Мы определили их следующим образом:

$$\cos\theta = \frac{\bar{J}^2 + \bar{K}^2 - \bar{R}^2}{2\bar{J}\bar{K}}; \qquad \cos\varphi = \frac{\bar{m}}{\bar{J}}, \tag{2}$$

где $\bar{R}$, $\bar{K}$, $\bar{J}$, $\bar{m}$ — средние арифметические значения соответствующих квантовых чисел, относящихся к исходному и конечному термам. Этот способ расчета θ и φ, конечно, неточен, но, как мы увидим, он дает довольно хорошее приближение. Вероятно, самая правильная процедура состояла бы в том, чтобы брать в качестве интенсивности «прямолинейное среднее» значение интенсивностей между крайними орбитами, потому что такие прямолинейные средние величины, по-видимому, особенно важны с точки зрения связи классической теории с теорией квантов[7]. Однако эта процедура привела бы к трудностям, которые пока кажутся непреодолимыми.

2. С точностью до множителя, одинакового для всех линий одного мультиплета, Зоммерфельд и Гейзенберг нашли для интенсивностей отдельных зеемановских компонент мультиплета значения, приведенные в табл. 1.

Таблица 1

ΔK	ΔJ	Δm	Интенсивность
1	± 1	1	$(1 \pm \cos\theta)^2 (1 \pm \cos\varphi)^2$
1	± 1	0	$2(1 \pm \cos\theta)^2 \sin^2\varphi$
1	± 1	-1	$(1 \pm \cos\theta)^2 (1 \mp \cos\varphi)^2$
1	0	± 1	$4\sin^2\theta \sin^2\varphi$
1	0	0	$8\sin^2\theta \cos^2\varphi$

Здесь для θ и φ следует подставить значения (2) и затем просуммировать интенсивности всех зеемановских компонент, которые при $H = 0$ составляют ту же самую нерасщепленную линию. Этот расчет хотя и несколько громоздок, поскольку приходится рассматривать каждый случай по отдельности, но не представляет никакой трудности. Вычисленные интенсивности приведены в табл. 2.

[7] См., например, M. Born. Zs. f. Phys., 1924, 26, 379.

Таблица 2

ΔK	ΔJ	Интенсивность
± 1	± 1	$\left[\frac{2(K+J+1)^2-2\overline{R}^2}{(2K+1)(2J+1)}\right]^2 \frac{4J(8J^2+12J+5)}{(2J+1)^2}$
± 1	0	$\frac{4J^2(2K+1)^2-\{4J^2+(2K+1)^2-4\overline{R}^2\}}{J^2(2K+1)^2}\frac{4J-1}{J}$
± 1	± 1	$\left[\frac{2\overline{R}^2-2(K-J+1)^2}{(2K+1)(2J-1)}\right]^2 \frac{4(J-1)(8J^2-4J+1)}{(2J-1)^2}$

NB. Для K и J следует всегда подставлять значения, соответствующие терму с минимальным K.

3. Теперь хотелось бы сравнить эти формулы с опытом. Можно предсказать, что для комбинаций *sp*, для которых форма орбиты значительно меняется при квантовом переходе, получится только качественное согласие теории с опытом, в то время как для комбинаций *pd*, *df* ожидается значительно лучшее согласие.

В следующем сравнении между теоретическими и экспериментальными данными интенсивности различных компонент мультиплета для удобства выражаются в процентах от наиболее интенсивной линии.

(*sp*)	Дублеты	теор.	100 : 26,5 (щелочные металлы, 1 *p* — *ms*)	
		эксп.	100 : 50	
	Триплеты	теор.	100 : 43 : 19 (щелочноземельные, 1 *p* — *ms*)	
		эксп.	100 : 60 : 20	
(*pd*)	Дублеты сложн.	теор.	100 : 10 : 54	(Ca, 1 *p* — 2*d*)
		эксп.	100 : 11 : 55	
	Триплеты сложн.	теор.	100 : 17 : 1,5 : 55 : 15 : 23	(Ca, 1 *p* — 2 *d*)
		эксп.	100 : 18 : 1 : 54 : 19 : 25	
(*df*)	Триплеты сложн.	теор.	100 : 6 : 0,15 : 68 : 8 : 46	(Sr, 1 *d* — 3 *f*)
		эксп.	100 : 9 : $<$1 : 69 : 9 : 48	
	Триплеты с неразрешенным термом *f*	теор.	100 : 72 : 43	(Ca, 1 *d* — 3 *f*)
		эксп.	100 : 72 : 45	

Как видно, согласие очень хорошее, за исключением вполне понятного случая комбинаций *sp*.

Заметим, что приведенное в начале статьи правило Доргело и Бургера можно получить как предельный случай из наших формул; оно практически выполняется со значительной точностью уже для комбинаций *pd*. Поэтому, как нам кажется, это правило является, по-видимому, точным. Но мы думаем, что обобщение его, которое пытались сделать Доргело и Бургер, в частности, в табл. 5 их цитированной работы (стр. 265), явля-

ется неточным. Например, согласно этой таблице, соотношение между наиболее интенсивной и наиболее слабой компонентами сложного триплета pd для больших K должно равняться $12K^2 : 1$. Согласно же принципу соответствия, должно быть $\frac{256}{81} K^4 : 1$. Итак, оказывается, что интенсивность самой слабой компоненты уменьшается в действительности значительно быстрее, чем того требует табл. 5 в работе Доргело и Бургера.

4. Дополним замечание относительно зеемановских компонент. Зоммерфельд и Гейзенберг, выбирая иным способом угол φ, находят для интенсивностей результаты, приведенные в графической форме в конце их цитированной работы. Согласно этим авторам, интенсивность продольно поляризованных линий оказывается на 20% меньше интенсивности поперечных компонент (это утверждение остается в силе и при наблюдении перпендикулярно полю). Это вынудило их высказать предположение о существовании такой разницы в действительности. Но это привело бы к странному следствию: свет, испускаемый в магнитном поле, даже когда оно настолько слабо, что не может вызвать расщепления, как будто должен быть поляризованным по направлению, перпендикулярному полю. Расчеты по нашему методу позволили получить графики, довольно близкие графикам в работе Зоммерфельда и Гейзенберга; разница состоит только в том, что продольные компоненты у нас оказываются несколько более интенсивными, так как уже для комбинаций pd разница полных интенсивностей продольных и поперечных компонент не превышает нескольких процентов, а при переходе к высшим комбинациям, для которых принцип соответствия заслуживает большего доверия, продолжает постепенно уменьшаться. По нашему мнению, эта малая разница возникает вследствие приближенного характера нашей процедуры применения принципа соответствия, и в действительности она отсутствует. Во всяком случае, желательно было бы провести измерения, чтобы выяснить этот важный момент.

К статье 21

Неизвестно, при каких обстоятельствах зародилась эта работа, написанная характерным для Ферми ясным и «физичным» языком.

Б. Понтекорво

21

О СОУДАРЕНИЯХ АТОМОВ С ЯДРАМИ ВОДОРОДА *

Недавно Дж. Франк [1] обсуждал процесс ионизации в соударениях между атомами и ионами со скоростями, соответствующими энергии в несколько вольт. Когда энергия относительного движения атома и иона превышает необходимую для ионизации атома энергию, конечным результатом таких соударений может быть ионизация атома; однако следует учитывать, что условия, при которых происходит такая ионизация, резко отличаются от тех, при которых электронные соударения вызывают обычную ионизацию. И действительно, поскольку масса ионов и атомов в несколько тысяч раз больше массы электронов, при одинаковой кинетической энергии скорость первых будет гораздо меньше скорости электронов. В то время как электроны с достаточной для ионизации атомов энергией должны иметь скорости порядка величины скоростей валентных электронов атома, ионы же, хотя и имеют достаточную энергию, будут обладать гораздо меньшей скоростью. В существующей литературе процесс ударной ионизации всегда (также и в случае медленных ионов) рассматривался как связанный с чем-то дискретным; цель работы состоит в том, чтобы на простом примере соударения атомов и ядер водорода показать, что ионизация при соударении может быть полностью непрерывным процессом.

Рассмотрим следующий случай: предположим, что атом и ядро водорода сталкиваются друг с другом, причем их относительная скорость мала по сравнению со скоростью атомного электрона. Можно представить себе, что приближение ядра к атому изменяет движение электрона адиабатически. Вначале заметим, что так как движение электрона подчиняется адиабатическому принципу, то в каждый момент времени оно должно представлять собой квантованное движение промежуточной системы, состоящей из электрона и притягивающих его двух ядер; в нашем приближении последние в каждый момент времени должны рассматриваться как неподвижные. Пока ядро достаточно далеко от атома, последний (находящийся

---

* *Sopra l'urto tra atomi e nuclei di idrogeno.* Rend. Lincei, 1925, 1, 77—80. Представлена академиком О. М. Корбино на заседании 4 января 1925 г.

[1] J. Franck. Zs. f. Phys., 1924, 25, 312.

в своем основном состоянии [2], т. е. на орбите 1_1) будет, в согласии с теорией эффекта Штарка, располагаться так, что орбита электрона будет перпендикулярна прямой, соединяющей два ядра. Тогда сразу видно, что для любого положения двух ядер электрон будет описывать окружность, располагающуюся в плоскости, перпендикулярной прямой, соединяющей два ядра; центр окружности будет на этой прямой. Далее, момент количества движения электрона относительно этой прямой всегда равен $h/2\pi$; предположим, что в данный момент времени два ядра находятся на расстоянии $2a$ друг от друга. Пусть x — расстояние от средней точки отрезка, соединяющего два ядра, до плоскости окружности, описываемой электроном, и пусть r — радиус этой окружности. Если v — скорость электрона и m — его масса, то

$$\frac{h}{2\pi} = mvr.$$

Поэтому центробежная сила будет равна

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{h^2}{4\pi^2 mr^3}.$$

Эта сила должна уравновешивать притяжение со стороны двух ядер; составляющие этого притяжения, параллельные вышеуказанной соединяющей прямой и r, будут соответственно 0 и $\frac{h^2}{4\pi^2 mr^3}$. Поэтому имеем следующие два соотношения между x и r:

$$\begin{gathered}\frac{e^2(a-x)}{\{(a-x)^2+r^2\}^{3/2}} - \frac{e^2(a+x)}{\{(a+x)^2+r^2\}^{3/2}} = 0,\\ \frac{e^2 r}{\{(a-x)^2+r^2\}^{3/2}} + \frac{e^2 r}{\{(a-x)^2+r^2\}^{3/2}} = \frac{h^2}{4\pi^2 mr^3},\end{gathered} \tag{1}$$

где e — заряд электрона. Корни этой системы уравнений дают возможные положения окружности, описываемой электроном, для любого расстояния между двумя ядрами. Сразу видно, что уравнения (1) допускают решение, для которого $x = 0$, в то время как r — функция a, которая при $a = 0$ принимает значение $\rho/2$ ($\rho = \frac{h^2}{4\pi^2 e^2 m} = 0{,}53\cdot 10^{-8}$ *см* — радиус атома водорода в нормальном состоянии) и увеличивается до бесконечности с увеличением a.

Этому решению соответствует симметричное расположение ядер по отношению к плоскости окружности, описываемой электроном. Когда $a < 0{,}65\,\rho$, оказывается, что это — единственное действительное решение

[2] Ферми пользуется здесь обозначениями Бора (n_k). В более поздних обозначениях (n_l) это — орбита 1_0 или $1s$, как сказали бы мы теперь.— *Прим. ред.*

уравнений (1) (r — величина существенно положительная). Когда же $a > 0{,}65\ \rho$, т. е. ядра находятся на расстоянии, в 1,3 раза большем радиуса атома водорода, оказывается, что, кроме предыдущего решения, имеются еще два других, для которых x принимает равные и противоположные значения, а r — одинаковые значения. Мы будем называть их асимметричными. Для очень больших a они имеют вид $x = \pm a$, $r = \rho$, и поэтому соответствуют случаю, когда атом, очень далекий от другого ядра, находится в своем нормальном состоянии. С уменьшением a два асимметричных решения сближаются друг с другом и при $a = 0{,}65\ \rho$ совпадают между собой, а также и с симметричным решением, образуя тройное решение $x = 0$, $r = 0{,}92\ \rho$. При дальнейшем уменьшении a, как уже было сказано, опять-таки имеем только симметричное решение.

Итак, мы можем заключить, что при сближении двух ядер, пока они еще очень далеки друг от друга, окружность, описываемая электроном, соответствует асимметричному решению. В этих условиях ядро отталкивается атомом. При дальнейшем сближении двух ядер (несмотря на их отталкивание) наступает момент, когда a становится равным $0{,}65\ \rho$ и окружность соответствует тройному решению; при дальнейшем уменьшении a окружность будет соответствовать симметричному решению, которое является единственным при $a < 0{,}65\ \rho$. Два ядра продолжают отталкиваться, и наступает момент, когда они начинают отдаляться друг от друга; a будет расти, а окружность все еще будет оставаться такой, которая соответствует симметричному решению, до тех пор, пока a не станет равным значению $0{,}65\ \rho$, которому соответствует тройное решение. При дальнейшем увеличении a возможны два случая. Если окружность соответствует одному из асимметричных решений, то конечным результатом соударения явится, очевидно, одно ядро и один атом водорода, т. е. ионизации не произойдет. Но при увеличении a сверх значения $0{,}65\ \rho$ может оказаться и так, что электрон будет продолжать двигаться по симметричной орбите. В этом случае два ядра продолжают некоторое время отталкиваться (до тех пор, пока a не станет равным $0{,}86\ \rho$) и при бóльших расстояниях притягиваются.

Если полная энергия системы (относительно центра тяжести) оказывается отрицательной, т. е. если атом и ион до соударения обладают относительной кинетической энергией меньше работы ионизации Rh водорода (R — число Ридберга), то конечный результат соударения — симметричный метастабильный ион H^+, который затем расщепляется на атом и ядро. Если же энергия соударения больше Rh, то два ядра расходятся до бесконечности, а электрон остается в медианной плоскости, описывая со скоростью, стремящейся к нулю, окружность все возрастающего радиуса.

Поэтому в последнем случае конечным результатом соударения будут свободные два ядра и один электрон. Итак, мы видим, что когда относительная энергия соударения больше энергии ионизации, может иметь место непрерывный процесс ионизации.

К статье 22

Ферми отмечает, что один из главных моментов инерции плоской молекулы равен сумме двух других моментов инерции. Это соотношение справедливо для всех трехатомных молекул и должно проявляться в виде зависимости между ротационными констактами различных систем полос. Хорошим подтверждением этого вывода являются инфракрасные полосы поглощения водяного пара. Статья 22 была написана во Флоренции.

Ф. Разетти

22

ОБ ОДНОМ СООТНОШЕНИИ МЕЖДУ ПОСТОЯННЫМИ ИНФРАКРАСНЫХ ПОЛОС ТРЕХАТОМНЫХ МОЛЕКУЛ *

Инфракрасные полосы, как известно, обусловлены переходами молекул между квантовыми состояниями, которые соответствуют одной и той же конфигурации электронов и отличаются друг от друга только различным состоянием вращения и колебания ядер. Изучение инфракрасных полос позволяет довольно просто определить момент инерции молекулы в ее основном состоянии. Теория этих полос [1] приводит к формуле

$$\Delta\nu = \frac{h}{4\pi^2 I}, \tag{1}$$

где h — постоянная Планка, I — момент инерции молекулы и $\Delta\nu$ — постоянная разность частот линий инфракрасной полосы.

Если молекула двухатомна, она обладает только одним моментом инерции и соответственно только одной системой инфракрасных полос; если же она многоатомна, она обладает тремя главными моментами инерции и поэтому также тремя системами инфракрасных полос, соответствующими трем различным значениям $\Delta\nu$. Три значения $\Delta\nu$ и позволяют нам определить три главных момента инерции молекулы.

Пусть имеется система точек, расположенных на плоскости. Сразу видно, что одна из главных осей инерции перпендикулярна плоскости,

---

* *Una relazione tra le costanti delle bande infrarosse delle molecole triatomiche.* Rend. Lincei, 1925, 1, 386—387. Представлена академиком А. Гарбассо на заседании 15 марта 1925 г.

[1] A. Sommerfeld. Atombau und Spektrallinien, ed. 3, Cap. 7 (см. перевод: А. Зоммерфельд. Строение атома и спектры. М., 1956, т. I.— *Ред.*).

а две другие лежат в ней; при этом момент инерции относительно главной оси, перпендикулярной плоскости, равен сумме двух других главных моментов инерции [2]. В случае трехатомной молекулы все три атома заведомо лежат в одной плоскости, и поэтому между тремя моментами инерции должно иметь место соотношение $I_1 = I_2 + I_3$. Поскольку, согласно формуле (1), три главных момента инерции обратно пропорциональны соответствующим значениям $\Delta\nu$ для трех систем инфракрасных полос, должно иметь место соотношение

$$\frac{1}{\Delta\nu_1} = \frac{1}{\Delta\nu_2} + \frac{1}{\Delta\nu_3}. \tag{2}$$

На это соотношение, насколько мне известно, до сих пор не обращалось внимания. Оно может служить как для подтверждения теории инфракрасных полос, так и для доказательства правильности интерпретации системы инфракрасных полос трехатомных веществ.

К сожалению, эмпирический материал, пригодный для проверки соотношения (2), довольно беден, так как только одна система инфракрасных полос трехатомного вещества (а именно, паров воды) известна полностью. И действительно, недавно Витт [3] сумел обнаружить в инфракрасном спектре поглощения паров воды три системы полос с разностями частот 16,8; 24,5 и 56 (в волновых числах).

Поскольку

$$\frac{1}{17{,}0} = \frac{1}{24{,}5} + \frac{1}{56},$$

видно, что соотношение (2) хорошо согласуется с опытом в пределах экспериментальных ошибок.

---

[2] Примем в качестве осей x и y две главные оси, лежащие в плоскости, а в качестве оси z — третью главную ось. Тогда три момента инерции будут соответственно $\Sigma m(x^2 + y^2)$, Σmx^2, Σmy^2. Отсюда сразу следует упомянутое свойство.

[3] H. Witt. Zs. f. Phys., 1924, 28, 249.

К статьям 23, 24

Эти работы (см. также [Б26, Б27]) важны по нескольким причинам: они описывают вторую «вылазку» Ферми в область эксперимента, сделанную им после нескольких лет теоретической работы; они показывают его изобретательность в обращении с незнакомой методикой; они являются первым примером исследований атомных спектров радиочастотными методами, получившими широкое распространение много позже.

Выдающееся открытие влияния слабых магнитных полей на поляризацию резонансного излучения ртути было сделано Вудом и другими; во Флорентийском университете этим эффектом занялся Разетти. Когда несколькими месяцами позже во Флоренции появился Ферми, его сильно заинтересовало это явление, для которого в то время существовала только классическая теория, основанная на представлении о ларморовской прецессии. Ферми указал, что поскольку резонансная линия ртути обнаруживает аномальный эффект Зеемана с множителем Ланде $^3/_2$, то атом ртути должен, видимо, прецессировать с частотой в $^3/_2$ раза выше ларморовской. Разрешить этот вопрос можно было бы, исследовав поведение поляризации в магнитных полях с напряженностью около 1 гаусса и частотой в несколько мегагерц (приблизительно в резонансе с частотой прецессии атома).

Разетти был знаком со спектроскопической методикой, но ни один из экспериментаторов не имел опыта работы с радиочастотными схемами. Тем не менее Ферми рассчитал характеристики простого колебательного контура, который мог бы дать поля нужной интенсивности и частоты. К счастью, на складе удалось разыскать несколько триодов, которые были признаны Ферми годными к работе. В лаборатории нашлось также несколько тепловых амперметров для измерения тока в катушках, так что можно было определить напряженность магнитного поля. Если бы этих приборов не оказалось в наличии, то эксперимент не удалось бы поставить, так как исследовательский бюджет лаборатории был чрезвычайно скуден и не вынес бы закупки дорогостоящего оборудования. Такая ситуация с финансами приводила также к тому, что здание лаборатории никогда не отапливалось, поскольку, как легко было вычислить, отопление в течение одного месяца поглотило бы весь годовой бюджет Физического факультета. С декабря по март температура в здании составляла от 3 до 6° С. Весной, когда выполнялись эксперименты, температура в комнатах, к сожалению, поднялась до 12° С — температуры, более приятной для обитателей, но слишком высокой для того, чтобы плотность насыщенных ртутных паров сохранилась на достаточно низком уровне.

Катушки индуктивности и другие простые детали были изготовлены экспериментаторами; когда установка была собрана, она сразу же заработала так, как предсказывал Ферми. Эксперименты были выполнены без труда; к сожалению, точность их была невелика вследствие высокой температуры и фотографического метода измерения поляризации. Тем не менее результаты опытов ясно демонстрировали, что частота прецессии атома согласуется с предсказаниями, основанными на множителе Ланде.

В статьях 23 и 24 содержится полное изложение теории и экспериментальных результатов; был опубликован также сокращенный немецкий вариант, в котором были опущены вычисления [Б27], и краткое предварительное сообщение [Б26].

Важность этого эксперимента с квантовомеханической точки зрения подчеркивалась Йорданом (P. Jordan. Anschauliche Quantentheorie, Springer, Berlin, 1936, p. 45—46).

Ф. Разетти

23

ВЛИЯНИЕ ПЕРЕМЕННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ПОЛЯРИЗАЦИЮ РЕЗОНАНСНОГО СВЕТОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ *[1]

(Совместно с Ф. Разетти)

В этой работе мы собираемся изучить влияние высокочастотного магнитного поля на поляризацию резонансного излучения; здесь речь будет идти о теории явления, а в следующей работе мы опишем некоторые эксперименты, позволившие подтвердить предсказанные результаты.

Как известно, освещение паров, например паров ртути, излучением одной из собственных линий поглощения приводит к очень интенсивному селективному рассеянию; в этом и состоит явление оптического резонанса. Чтобы описать этот эффект, мы можем использовать классическую модель, которая в этом случае достаточно хорошо объясняет характер явления. Итак, предположим, что в рассматриваемых пара́х содержатся упруго связанные электроны, способные колебаться с частотой, равной частоте падающего светового излучения. Под действием переменного электрического поля света электроны будут резонансно и поэтому интенсивно рассеивать первичное излучение. Предположим теперь, что свет поляризован; тогда направление колебаний электронов будет параллельным электрическому вектору света. При наблюдении света, рассеянного в направлении, перпендикулярном этому вектору, мы найдем, что он поляризован; эта поляризация такова, что его электрический вектор параллелен электрическому вектору падающего света. В действительности это и наблюдается в случае ртути, освещенной линией 2536,7, по крайней мере, когда плотность паров достаточно мала (в противном случае имелись бы возмущения вторичного характера). Здесь следует заметить, что не для всех элементов дело обстоит так хорошо, как для ртути: все происходит согласно предсказаниям классической теории только в том случае, когда резонансная линия обнаруживает нормальный эффект Зеемана или, по крайней мере, расщепляется на триплет (даже если расщепление отличается от лоренцова). В случае же аномального эффекта Зеемана, как, например, для линии D натрия, характер поляризации значительно более сложен.

---

* *Effetto di un campo magnetico alternato sopra la polarizzazione della luce di risonanza* (Con F. Rasetti). Rend. Lincei, 1925, 1, 716—722. Представлена академиком А. Гарбассо на заседании 5 июня 1925 г.

[1] См. предварительную заметку в Nature, 16 мая 1925 г. (Работа [Б26]).

Обсудим теперь, какое влияние оказывает на поляризацию резонансного излучения наличие магнитного поля, правда, достаточно слабого, чтобы соответствующее зеемановское расщепление не превышало ширины линии освещающего света. Рассмотрим, например, случай (который потребуется нам впоследствии), когда магнитное поле перпендикулярно падающему лучу и его электрическому вектору, а резонансное излучение наблюдается в направлении поля. Для определенности предположим, что падающий луч и магнитное поле расположены в горизонтальной плоскости и перпендикулярны друг другу, а электрический вектор направлен вертикально. Магнитное поле будет приводить к расщеплению линий поглощения на зеемановские триплеты. Теперь заметим, что если бы пары́ не поглощали, а испускали свет в направлении падающих лучей, то две круговые компоненты движения электрона наблюдались бы как линейно поляризованный свет с вертикальным электрическим вектором, в то время как прямолинейная компонента движения электрона проявлялась бы как поляризованный свет с горизонтально направленным электрическим вектором. Таким образом, в нашем случае, когда пары́ освещаются световым излучением с вертикально направленным электрическим вектором, поглощаться будут только круговые компоненты; при наблюдении в направлении поля они, вследствие рассеяния, будут образовывать две циркулярно-поляризованные в противоположных направлениях компоненты с практически неразличимыми частотами, так что резонансное излучение не будет поляризовано.

Итак, влияние магнитного поля в этом случае состоит в полной деполяризации резонансного излучения; действительно, это явление было открыто Вудом и Эллеттом [2].

Недавно Ханле [3] в случае ртути и Эллетт [4] в случае натрия сделали очень интересные наблюдения влияния крайне слабого магнитного поля. Они установили, что в этом случае обусловленная полем деполяризация является неполной и что происходит вращение плоскости поляризации рассеянного излучения по направлению ларморовского вращения. Для ртути эти явления наблюдаются при полях порядка одного гаусса.

С помощью нашей модели нетрудно понять причины этого факта. Рассмотрим осциллятор, получивший импульс в вертикальном направлении и свободно колеблющийся при наличии горизонтального магнитного поля. Если бы шла речь о незатухающем осцилляторе, то направление его колебаний вращалось бы под действием магнитного поля, при этом амплитуда осциллятора оставалась бы неизменной; так что по направлению поля наблюдался бы неполяризованный свет. Но дело обстоит иначе, если имеется затухание и ларморовское вращение настолько медленно, что за малую долю первого оборота амплитуда значительно уменьшается; понятно, что в этом

[2] R. W. Wood, A. Ellett. Proc. Roy. Soc., 1923, 103, 396.
[3] W. Hanle. Zs. f. Phys., 1924, 30, 93.
[4] A. Ellett. Journ. Opt. Soc. Amer., 1925, 10, 427.

случае деполяризация не может быть полной, а направление колебаний должно в среднем вращаться по отношению к направлению возбуждающего электрического поля, что и приводит к вращению плоскости поляризации рассеянного излучения.

Рассмотрим теперь интересующий нас случай, когда резонирующий атом находится уже не в постоянном, а в переменном магнитном поле. Если осциллятор получает импульс от возбуждающего электрического поля, то направление его колебаний вначале вращается, вследствие прецессии Лармора, по направлению, соответствующему знаку магнитного поля в данный момент времени; когда же поле изменит знак, направление колебаний будет вращаться в другую сторону и т. д. Если частота магнитного поля значительно превышает ларморовскую, то направление колебаний осциллятора будет слегка отклоняться в ту и другую сторону от начального. Поэтому мы должны ожидать, что для очень высоких частот деполяризующее действие поля (хотя и при постоянной средней интенсивности последнего) должно стать незначительным.

Из изложенного очевидно, что изменения степени поляризации в зависимости от частоты будут особенно заметны для частот переменного поля порядка ларморовской частоты. Для наблюдения изменений поляризации, конечно, необходимо также иметь достаточно сильное поле, которое могло бы вызвать значительную деполяризацию при низкой частоте. Для этого необходимо, чтобы период ларморовского вращения был не больше среднего времени затухания, которое для линии 2536,7 ртути оказывается по разным соображениям [5] приблизительно равным 10^{-7} *сек* (время затухания амплитуды будет вдвое бóльшим, т. е. $2 \cdot 10^{-7}$ *сек*).

Итак, мы должны оперировать полями с напряженностью в несколько гаусс (поскольку ларморовская частота, соответствующая полю в один гаусс, равна 1,4 *Мгц*) и частотой порядка 5 *Мгц*.

Приступим к изучению поведения резонирующего осциллятора, помещенного в переменное магнитное поле. Предположим, что электрический вектор E падающего света направлен по оси x, а магнитное поле — по оси z. Тогда колебания осциллятора будут происходить в плоскости xy.

Заметим теперь, что при практическом осуществлении резонансных опытов полоса частот возбуждающего светового излучения всегда относительно широка, так что величина $\Delta\nu$ заметно больше ширины, характерной для линии в случае, когда единственной причиной уширения является затухание волн. Итак, $\Delta\nu$ будет значительно больше коэффициента σ затухания амплитуды нашего осциллятора. Поскольку в нашем случае порядок величины σ, ларморовской частоты n_L, а также частоты n магнитного поля одинаков, то $\Delta\nu$ будет по порядку величины больше всех этих значений. Известно далее, что спектральная линия с шириной $\Delta\nu$ экви-

---

[5] L. A. Turner. Phys. Rev., 1924, 23, 464; R. C. Tolman. Phys. Rev., 1924, 23, 693; W. Hanle. Цит. соч.

валентна совокупности строго монохроматичных, ограниченных цугов волн, причем число волн в каждом из них порядка $\nu/\Delta\nu$. Поэтому наше возбуждающее световое излучение будет эквивалентно совокупности некогерентных цугов волн, каждый продолжительностью $1/\Delta\nu$, меньшей периода затухания осциллятора $1/\sigma$, а в связи с нашими предположениями, также меньшей $1/n_L$ и $1/n$. Поскольку уравнения движения осциллятора линейны, каждый из этих цугов волн будет действовать независимо друг от друга. Далее, действие только одного цуга состоит в импульсе такой малой продолжительности, что за это время эффекты затухания и ларморовского вращения будут пренебрежимо малыми. Осциллятор, получивший этот импульс по направлению возбуждающего электрического поля, будет продолжать свое движение под действием только «собственной» упругой силы и силы, обусловленной внешним магнитным полем. Поэтому рассеянное им излучение является излучением осциллятора, который получил импульс по направлению оси x, а затем продолжал двигаться под действием указанных сил. В отсутствие магнитного поля и затухания осциллятор, получивший начальный импульс, продолжал бы двигаться по оси x с амплитудой, равной начальной A_0. Затухание приводит к уменьшению амплитуды колебаний, так что в момент времени t последняя будет $A = A_0 e^{-\sigma}$. Действие магнитного поля $H = H_0 \cos(2\pi nt - \alpha)$ состоит во вращении направления колебаний с угловой скоростью

$$\omega = \frac{eH}{2mc} = \frac{eH_0}{2mc} \cos(2\pi nt - \alpha).$$

Итак, в момент времени t угол, на который повернется направление колебаний, будет

$$\Omega = \int_0^t \omega dt = \frac{eH_0}{4\pi mcn} \{\sin(2\pi nt - \alpha) + \sin\alpha\} = \frac{2n_0}{n} \sin\pi nt \cos(\pi nt - \alpha),$$

где через $n_0 = \dfrac{eH_0}{4\pi mc}$ обозначена ларморовская частота, соответствующая максимальному значению H_0 магнитного поля. Поэтому в момент времени t компоненты амплитуды, параллельные оси x и оси y, будут

$$A_x = A_0 e^{-\sigma t} \cos\Omega, \qquad A_y = A_0 e^{-\sigma t} \sin\Omega. \tag{1}$$

Компоненты по осям x и y интенсивности излучения, рассеянного в момент времени t в направлении z, поляризованные так, что их электрические векторы параллельны соответственно осям x и y, будут пропорциональны квадратам соответствующих амплитуд; тогда, пренебрегая постоянным множителем, получаем

$$X = e^{-2\sigma t} \cos^2\Omega, \qquad Y = e^{-2\sigma t} \sin^2\Omega. \tag{2}$$

Поскольку различные импульсы, эквивалентные действию возбуждающего излучения, как отмечено выше, являются некогерентными, интенсив-

ность получается суммированием интенсивностей, обусловленных действием одиночных импульсов. Интенсивности рассеянного излучения I_x и I_y поэтому пропорциональны выражениям, которые получаются интегрированием (2) по всем значениям времени и фазы α. Опуская множитель, имеем

$$\left.\begin{aligned} I_x &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} X dt d\alpha = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-2\sigma t}\cos^2\left[\frac{2n_0}{n}\sin\pi nt\cos(\pi nt-\alpha)\right]dt d\alpha = \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-2\sigma t}\cos^2\left[\frac{2n_0}{n}\sin\pi nt\cos\varphi\right]dt d\varphi, \\ I_y &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} Y dt d\alpha = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-2\sigma t}\sin^2\left[\frac{2n_0}{n}\sin\pi nt\cos\varphi\right]dt d\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Для оценки этих выражений заметим, что

$$\left.\begin{aligned} I_x + I_y &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-2\sigma t} dt d\varphi = \frac{\pi}{\sigma}, \\ I_x - I_y &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-2\sigma t}\cos\left[\frac{4n_0}{n}\sin\pi nt\cos\varphi\right]dt d\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Обозначая через $J_0(x)$ бесселеву функцию нулевого порядка и принимая во внимание известную формулу

$$2\pi J_0(a) = \int_0^{2\pi}\cos(a\cos\varphi)\,d\varphi,$$

находим

$$I_x - I_y = 2\pi\int_0^{\infty} e^{-2\sigma t} J_0\left(\frac{4n_0}{n}\sin\pi nt\right)dt.$$

Переходя к новой переменной $x = \pi nt$, получаем

$$I_x - I_y = \frac{2}{n}\int_0^{\infty} e^{-\frac{2\sigma}{\pi n}x} J_0\left(\frac{4n_0}{n}\sin x\right)dx. \quad (5)$$

Прежде всего следует найти эту разность для очень малых значений n. Учитывая известное равенство

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \int_0^{\infty} e^{-ax} J_0(bx)\,dx,$$

находим, что для малых n можно записать

$$\lim_{n\to 0}(I_x - I_y) = \frac{\pi}{\sigma\sqrt{1+\frac{4\pi^2 n_0^2}{\sigma^2}}}. \tag{6}$$

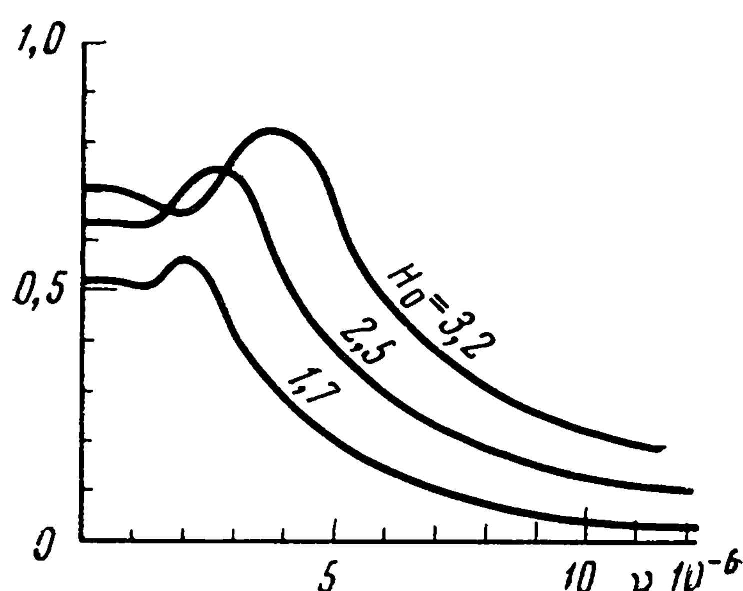
Эта формула позволяет найти степень поляризации для очень низких частот, которая определяется выражением

$$\lim_{n\to 0}\frac{I_x - I_y}{I_x + I_y} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4\pi^2 n_0^2}{\sigma^2}}}.$$

Отсюда видно, что степень поляризации в случае очень низких частот оказывается равной нулю, когда n_0, а следовательно, и H_0 очень велики; в этом случае имеет место полная деполяризация, тогда как при $n_0 = 0$ и, следовательно, $H_0 = 0$ степень поляризации равна единице, т. е. имеет место полная поляризация. Возвращаясь к общему выражению (5), полезно несколько преобразовать его с целью приведения к виду, удобному для вычислений. Поскольку функция $J_0\left(\frac{4n_0}{n}\sin x\right)$ периодическая с периодом π, нетрудно видеть, что соотношение (5) можно записать в виде

$$I_x - I_y = \frac{2}{n}\frac{e^{2\sigma/n}}{e^{2\sigma/n}-1}\int_0^{\pi} e^{-\frac{2\sigma}{\pi n}x} J_0\left(\frac{4n_0}{n}\sin x\right)dx. \tag{7}$$

С помощью последнего соотношения мы вычислили степень поляризации при $\sigma = 5\cdot 10^6$ и полях 1,7; 2,5 и 3,2 *гс*. Результаты численных расчетов представлены на рисунке, где по оси абсцисс отложена частота (в единицах 10^6 *сек*$^{-1}$) и по оси ординат — отношение I_y/I_x.



Как видно из кривых, поляризация при низких частотах осциллирует во всех случаях; с увеличением частоты она увеличивается и становится полной при очень высоких частотах. Чем меньше поле, тем раньше начинается увеличение поляризации.

См. вводные замечания к статье 23

24

ЕЩЕ О ВЛИЯНИИ ПЕРЕМЕННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ПОЛЯРИЗАЦИЮ РЕЗОНАНСНОГО СВЕТОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ *[1]

(Совместно с Ф. Разетти)

В предыдущей работе [2] мы рассчитали частотную зависимость влияния переменного магнитного поля на поляризацию резонансного излучения. С целью проверки теоретических предсказаний нами были выполнены опыты по резонансному излучению ртути для линии 2536,7.

Использованная нами аппаратура состояла из оптической части (для осуществления резонанса) и электрической части (для генерации переменного магнитного поля).

Возбуждающее излучение создавалось с помощью ртутной лампы, охлаждаемой водой; линия 2536,7 выделялась кварцевым монохроматором. На пути лучей помещался двоякопреломляющий большой кристалл исландского шпата, который делил излучение на два пучка, поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях. Один из них (с электрическим вектором, направленным по вертикали) падал на резонансную лампу, состоящую из стеклянного сосуда с двумя окошками, закрытыми плоскими кварцевыми пластинками и расположенными под прямым углом друг к другу. Одно из окошек служило для входа возбуждающего излучения, а другое — для наблюдения резонансного излучения; кварцевые пластинки вырезались параллельно оптической оси и располагались таким образом, чтобы поляризация излучения не изменялась. Резонансная лампа, в которой находилась капля ртути, соединялась с насосом Геде, непрерывно работавшим во время опытов. Резонансное излучение наблюдалось в направлении, перпендикулярном направлению возбуждающего света. С помощью другого кристалла исландского шпата, помещенного на пути луча, образовывались два изображения резонирующего пара, поляризо-

---

* *Ancora dell'effetto di un campo magnetico alternato sopra la polarizzazione della luce di risonanza* (Con F. Rasetti). Rend. Lincei, 1925, 2, 117—120. Представлена академиком А. Гарбассо на заседании 5 июня 1925 г.

[1] Эта работа была выполнена в Физическом институте Королевского университета во Флоренции.

[2] E. Fermi, F. Rasetti. Rend. Lincei, 1925, 1, 716 (статья 23).

ванные горизонтально и вертикально; изображения фотографировались кварцевой камерой.

Устройство для получения переменного поля состояло из триодного генератора непрерывных колебаний и связанного с ним контура; для создания переменного магнитного поля две катушки, являющиеся частями контура, располагались по сторонам резонансной лампы.

Мы использовали триоды «Вестерн Электрикал Компани» с оксидированной нитью накала; анодное напряжение (около 300 *в*) поступало от динамо; анодный ток каждого триода составлял 40—50 *ма*. Обычно нами использовались два параллельно соединенных триода.

Для создания генерирующего контура средняя точка катушки L присоединялась к отрицательному полюсу цепи накала, а ее выводы соединялись с переменным конденсатором C_1. Одна из пластин конденсатора соединялась непосредственно с сеткой, а вторая — с анодом (через динамо). В контуре, предназначенном для образования переменного магнитного поля, были включены последовательно: спираль, расположенная вблизи катушки L и служившая вторичной обмоткой трансформатора, переменный конденсатор C_2, тепловой амперметр без шунта, две катушки с десятью витками, каждая для образования магнитного поля, и одна катушка, выводы которой могли замыкаться и при помощи которой можно было добиться настройки в достаточно широкой полосе частот.

Емкости C_1 и C_2 могли изменяться приблизительно от 50 до 500 *пф*. Индуктивность катушки L в разных случаях составляла от 12 до 40 *мкгн*. Ввиду значительной емкости между анодом и сеткой триодов оказалось невозможным без существенных усложнений достичь частот, превышающих $5 \cdot 10^6$ *сек*$^{-1}$. Для опытов использовались частоты от 1 до 5 млн. *сек*$^{-1}$.

Волномер, служащий для измерений частот, был любезно прокалиброван для нас д-ром Матца из Института неорганической химии Флорентийского университета.

Теоретические соображения, изложенные в предыдущей работе, позволили нам полагать, что для исследования этого вопроса подходят магнитные поля в несколько гаусс. Для реализации таких полей с нашими катушками требовались токи порядка пол-ампера, которые достаточно легко достигались на нашей установке.

Геомагнитное поле нейтрализовалось при помощи большой катушки.

При комнатной температуре (около 12° С) поляризация резонансного излучения даже в отсутствие какого-либо магнитного поля оказывалась небольшой. Поэтому мы решили охладить резонансную лампу. Применив охлаждение с помощью испарения эфира, мы получили неплохие результаты; благодаря этой системе поляризация в отсутствие магнитного поля сильно возрастала. Степень поляризации, однако, колебалась в разных опытах, что и сделало невозможным достижение точности, достаточной для изучения некоторых деталей, предсказанных теорией.

Далее заметим, что прецессия, вызванная магнитным полем, должна быть принята равной $^3/_2$ ларморовской прецессии, так как линия ртути

2536, 7 обнаруживает аномальный эффект Зеемана (она разделяется на триплет с расщеплением, равным $^3/_2$ от нормального). Поэтому кривые, которые представлены в предыдущей работе как соответствующие полям 1,7; 2,5 и 3,2 *гс*, фактически соответствуют для ртути полям, в $^3/_2$ раза бо́льшим этих значений. При этих трех напряженностях, которым соответствовали эффективные токи в катушках 0,32; 0,46 и 0,6 *а*, и были выполнены наши опыты. На каждой пластинке были сделаны шесть фотографий с выдержкой порядка 2—3 минут (для каждой пластинки); каждая фотография состояла из двух изображений резонансного излучения, поляризованного в перпендикулярных направлениях. Одна фотография делалась в отсутствие магнитного поля, другие пять — с полями постоянной (максимальной) напряженности и частотами 1, 2, 3, 4 и 5 млн. *сек*$^{-1}$. Три пластинки соответствовали полю, образованному током 0,32 *а*, три пластинки — полю, образованному током 0,46 *а*, и две пластинки — полю, соответствующему 0,6 *а*.

Уже при визуальном просмотре пластинок было определенно заметно увеличение поляризации при высоких частотах для токов 0,32 и 0,46 *а*; для получения же более точных данных мы фотометрировали наши пластинки термоэлектрическим фотометром. Ниже мы приводим эти результаты.

Приводимые в табл. 1 числа представляют отношение почернений компоненты, поляризованной так, что электрический вектор направлен горизонтально, и компоненты, поляризованной вертикально; частоты выражаются в миллионах *сек*$^{-1}$.

Заметим, что на наших фотографиях нет пропорциональности между почернением и интенсивностью освещения, как требовалось бы по закону Шварцшильда; поэтому отношения дают лишь качественное указание на степень поляризации. По этой же причине можно сравнивать между собой

Таблица 1

Номер пластинки	Ток, *а*	Частоты, 10^6 *сек*$^{-1}$				
		1,2	2	3	4	5
6	0,32	0,71	0,69	0,64	0,59	0,53
7	—	—	0,75	0,72	0,67	0,51
8	—	0,58	0,59	0,52	0,39	0,36
5	0,46	0,76	0,74	0,77	0,68	0,57
9	—	0,72	0,71	0,78	0,65	0,53
10	—	0,74	0,75	0,74	0,67	—
11	0,60	0,84	0,85	0,92	0,85	0,79
12	—	0,76	0,73	0,80	0,79	0,76

только данные одной и той же пластинки, так как на разных пластинках имели место различия в интенсивности освещения и в выдержке.

Как можно видеть из табл. 1, для подробной проверки особенностей кривых, приведенных в предыдущей работе, точность недостаточна. Но с уверенностью можно заключить, что на пластинках, соответствующих токам 0,32 *а*, поляризация увеличивается с частотой, при этом тем быстрее, чем выше частота; на пластинках, соответствующих токам 0,46 *а*, поляризация удерживается почти постоянной вплоть до частот около 3 млн. $сек^{-1}$, а для более высоких частот начинает расти, хотя и меньше, чем в предыдущих случаях; наконец, для фотографий, полученных с током 0,6 *а*, изменения поляризации находятся в пределах ошибок наблюдения.

Сравнивая эти результаты с приведенными в предыдущей работе теоретическими кривыми, видим, что предсказания подтверждаются, по крайней мере, в пределах использованного нами приближения.

1926

К статье 25

К сожалению, нам мало известно о той обстановке, которая сопутствовала наиболее значительным достижениям Ферми в области теории, тогда как о его экспериментальной работе мы располагаем адекватными сведениями. Причины этого довольно очевидны. Даже если его опыты выполнялись без участия других сотрудников, за их ходом могли следить день за днем его коллеги. Как теоретик же Ферми был целиком независим, часть работы делалась рано по утрам дома, и даже его ближайшие помощники порой почти ничего не знали, что занимало его ум, пока он сам в неофициальной лекции не знакомил их с итогом своих размышлений.

Эти замечания относятся и к данной статье, которая представляет собой, вероятно, наиболее известный вклад Ферми в теоретическую физику; в этой работе он сформулировал теорию идеального газа частиц, подчиняющихся принципу Паули и называемых теперь в его честь «фермионами».

Имеются убедительные доказательства того, что Ферми занимался проблемой абсолютного значения энтропии, по крайней мере, уже в январе 1924 г., когда он написал работу о квантовании систем, содержащих тождественные частицы (статья 17). В следующем году он обсуждал подобного рода проблемы с Разетти. Уже гораздо позже он говорил Сегре, что деление фазового пространства на конечные ячейки очень серьезно захватило его и что если бы Паули не открыл принцип исключения, то он, Ферми, мог бы прийти к нему окольным путем, исходя из константы энтропии (см. статью 17). Как только Ферми прочел статью Паули о принципе исключения, он понял, что теперь у него есть все элементы для построения теории идеального газа, которая удовлетворяла бы принципу Нернста при абсолютном нуле, давала правильную формулу Сакура — Тетроде для абсолютной энтропии в пределе низких плотностей и высоких температур и была бы свободна от различных произвольных предположений, необходимых в статистической механике для получения правильного значения энтропии. Теория Эйнштейна, опиравшаяся на данную Бозе трактовку излучения черного тела как фотонного газа, на Ферми как будто особого влияния не оказала, хотя он и указывает на аналогию между двумя формами статистики. По-видимому, Ферми потратил мало времени на разработку теории в том детальном и окончательном виде, в каком он опубликовал ее на немецком языке.

Стоит отметить, что Ферми не заключает идеальный газ в ящик, согласно обычному подходу, а помещает частицы в потенциальное поле трехмерного гармонического осциллятора. Так он получил сферически симметричную, монотонно убывающую плотность газа. При больших радиусах плотность всегда была достаточно малой, чтобы обеспечить справедливость классического больцмановского приближения и отсюда определить температуру газа в целом. Кроме этой детали, рассмотрение, по существу, тождественно тому, что можно найти в большинстве учебников. Он получил все основные свойства функций $F(A)$ и $G(A)$, дал их асимптотические выражения для больших и малых значений параметра вырождения A, и детально проанализировал случай полного вырождения. Его метод помещения молекулы в потенциальное поле позднее естественно привел к статистической теории атома как вырожденного электронного газа; главное различие между этими задачами состоит в том, что во втором случае потенциал не является заданным, но частично определяется самими электронами.

Известно, что независимо от Ферми статистику такого типа разработал Дирак (P. A. D i r a c. Proc. Roy. Soc., 1926, A112, 661). Он представил свою статью Королевскому обществу 26 августа 1926 г., тогда как короткая заметка Ферми в «Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei» [Б31] была представлена на заседании этой академии 7 февраля, а его более подробная статья была получена редакцией «Zeitschrift für Physik» 26 марта того же года. Таким образом, обе публикации Ферми появились заметно раньше статьи Дирака. Дираку первому удалось показать, что обе статистики, ныне обычно называемые статистикой Бозе — Эйнштейна и статистикой Ферми — Дирака, связаны с симметричностью или антисимметричностью волновых функций относительно обмена координатами двух тождественных частиц. На эти две альтернативные возможности независимо указывал и Гейзенберг, однако он не разработал теории идеального газа частиц, которые описывались бы такими собственными функциями.

По-видимому, первая публикация, посвященная приложению статистики Ферми к вырожденному электронному «газу» в металле, обязана своим появлением Паули (W. P a u l i. Zs. f. Phys., 1927, 41, 81), который воспользовался ею для объяснения слабого парамагнетизма щелочных металлов, не зависящего от температуры. Полезность вырожденного газа Ферми для интерпретации многих других еще не объясненных свойств металлов впервые была отмечена Зоммерфельдом (A. S o m m e r f e l d. Naturwiss., 1927, 15, 825; Zs. f. Phys., 7, 1928, 47, 1 и 43), который изложил часть своей работы на конференции в Комо в 1927 г. Ферми прекрасно понимал важность своей статистики для электронов металла. Кстати, тот факт, что удельная теплоемкость электронного газа в металле исчезающе мала при обычных температурах, оказался предметом теоретического и экспериментального изучения со стороны Корбино в Риме.

Интерес Ферми к приложению новой статистики к электронам в металлах доказывают следующие выдержки из дискуссии на конференции в Комо.

Сначала Ферми отвечает на возражение Г. А. Лоренца при обсуждении сообщения Зоммерфельда (Atti del Congresso Internazionale dei Fisici, 11—20 settembre 1927; vol. 2, pp. 470—471, Zanichelli, Bologna, 1928).

Лоренц: «Я бы хотел сделать короткое замечание к тому применению, которое проф. Зоммерфельд дал этой прекрасной теории. Предполагается, что в данном куске металла в каком-то определенном состоянии, скажем, в нулевом, может находиться только *один* электрон. Допустим, что у нас есть два одинаковых куска металла, в каждом из которых имеется по электрону в одном и том же состоянии. Тогда можно было бы ожидать, что при простом объединении этих двух тел в одно — без изменения их состояний — в последнем оказалось бы *два* электрона в нулевом состоянии, а не один, как предполагалось».

Ферми: «Упомянутую проф. Лоренцом трудность можно, как мне кажется, устранить, рассуждая следующим образом. Пусть задан некий объем, который разделен стенкой на две равные части A и B. Допустим теперь, что в какой-то части пространства, A или B, находится молекула, и, таким образом, можно проквантовать ее движение и найти для ее скорости определенные квантовые значения, плотность которых зависит от объема того пространства, где движется молекула. Если же стенку между A и B убрать, так что при этом объем пространства удвоится, то плотность квантовых состояний также будет вдвое больше, чем прежде.

Предположим теперь, что в каждой части, А и В, заданного объема содержится N молекул. В этом случае на их распределение по скоростям накладывается требование, согласно которому каждое квантовое состояние может быть занято, самое большее, одной молекулой. И если теперь стенку убрать, то число молекул удвоится, но, поскольку число состояний также увеличилось вдвое, каждая молекула остается в том же самом своем состоянии, что и раньше».

Во время этой дискуссии он вкратце сообщает и о своей работе по металлам (цит. труды конференции, стр. 471).

Ферми: «В связи с исследованием проф. Зоммерфельда мне хотелось бы заметить, что я тоже начал одну работу, о результатах которой хочу вкратце рассказать. Речь идет о вычислении энергии испарения металла. В качестве модели металла принимается ионная решетка, в которой электроны движутся подобно молекулам газа. Естественно, что такой газ описывается не старой, а новой статистикой. Оказывается, что вблизи положительных ионов плотность электронов несколько увеличивается; поэтому теория металлов строится примерно на той же основе, что и дебаевская теория сильных электролитов. Непосредственным результатом теории является возможность вычислить энергию, которая необходима для разделения металла на ионы и электроны. Поскольку же нам известна энергия, высвобождающаяся при присоединении электрона и иона к нейтральному атому, мы можем найти отсюда также и энергию, которая необходима для отделения нейтрального атома от металла, т. е. энергию испарения. Численные расчеты пока еще не завершены. Но уже сейчас можно сказать, что эта теория дает правильный порядок величины энергии испарения».

И, наконец, при обсуждении работы Бора по квантовой механике и теории излучения Ферми сделал следующие замечания (цит. труды конференции, стр. 594—596).

Ферми: «Новая квантовая теория, исходные концепции которой нам разъяснил проф. Бор, по-новому освещает проблему излучения. Мне хочется обратить внимание на некоторые аспекты этой проблемы. В квантовой механике вопрос о реакции излучения можно рассмотреть с помощью следующего метода, позволяющего легко получить конкретные результаты, несмотря на то, что в значительной мере этот метод является гипотетическим. Рассмотрим для простоты такую систему, в которой в определенный момент времени возбуждаются два квантовых состояния (в шредингеровском смысле); согласно статистической интерпретации, это означает, что если бы мы поставили опыт для определения того, в котором из этих двух состояний атом находится в действительности, то обнаружили бы определенное соотношение между вероятностями нахождения атома в том или другом состоянии.

Тогда можно легко вычислить электрический момент системы, который оказывается функцией времени и, согласно классической теории излучения, обусловливает излучение с частотой, определяемой по энергиям этих двух состояний с помощью соотношения Бора; он вызывает также реакцию излучения, которая в классической теории представляется силой, имеющей в первом приближении величину $(2/3c^3)e\dddot{p}$.

Формально эту силу можно представить как вытекающую из зависящего от времени потенциала

$$V_1 = -\frac{2}{3c^3}e(\dddot{p}_x x + \dddot{p}_y y + \dddot{p}_z z). \quad (1)$$

Можно предположить, что для учета реакции излучения достаточно к потенциалу системы добавить потенциал (1). В действительности оказывается, что эта гипотеза приводит к правдоподобным результатам: получается, что вследствие этой добавки к потенциалу системы последняя переходит из состояния с большей энергией в состояние с меньшей энергией за время, по порядку величины равное среднему времени жизни атома. Можно также легко проследить за тем, каким образом осуществляется такой переход между двумя квантовыми состояниями, и, следовательно, вычислить, например, ширину и форму спектральной линии излучения, испускаемого при квантовом переходе (см. статью 34.— *Ред.*).

Я хотел бы высказать некоторые соображения относительно новых статистических методов в квантовой механике. Известно, что квантовая теория позволяет вполне естественным образом определить размеры ячеек, на которые нужно делить фазовое пространство в соответствии со статистикой Больцмана и Максвелла; если на основе такого определения попытаться построить статистику идеального газа, то окажется, что для этой цели такого определения недостаточно, ибо, когда размеры содержащего газ сосуда возрастают, квантовые состояния сближаются, и в результате поэтому их дискретность перестает проявляться.

Для преодоления этих трудностей недавно были предприняты две попытки: одна — Эйнштейном, другая — мною; в случае Эйнштейна молекулы газа подчиняются статистической зависимости такого типа, который предложил Бозе для световых квантов; в моем же случае ко всему газу, который рассматривается как единая система, состоящая из неразличимых молекул, применяется принцип Паули.

Связь между этими двумя типами статистики выяснилась на основе новой механики, благодаря работам Гейзенберга, Дирака и Винтера; они показали, что если имеется система, содержащая тождественные частицы, то их состояния делятся на группы, причем невозможно каким бы то ни было образом получить переходы между двумя состояниями, относящимися к разным группам. Одна из этих групп удовлетворяет статистике Бозе — Эйнштейна, другая — принципу исключения и, следовательно, статистике, предложенной автором. К настоящему времени опыт показал, что электроны атома, а также положительные корпускулы всегда удовлетворяют принципу исключения.

Применив такого рода статистику к электронному газу, находящемуся внутри металла, Паули сумел объяснить тот факт, что парамагнетизм твердых щелочных металлов значительно слабее, чем можно было бы ожидать из величины магнитного момента электрона, а проф. Зоммерфельд показал нам, каким образом с ее помощью можно объяснить также и многие другие свойства проводимости металлов.

На основе тех же самых гипотез можно попытаться построить теорию металлов, способную объяснить силы, которые определяют свойства металла. Для этого достаточно рассмотреть положительные ионы металла, расположенные в узлах кристаллической решетки металла, и методом, аналогичным методу Дебая и Хюккеля в их теории сильных электролитов, вычислить распределение валентных электронов под влиянием электростатических сил (используя при этом, разумеется, новую статистику вместо классической). Однако необходимые для такой теории численные расчеты довольно длинны и еще не закончены».

Ф. Разетти

25

О КВАНТОВАНИИ ИДЕАЛЬНОГО ОДНОАТОМНОГО ГАЗА *[1]

Если термодинамический принцип Нернста остается справедливым и для идеального газа, то нужно предположить, что при низких температурах законы идеального газа отступают от классических. Причину этого вырождения следует искать в квантовании молекулярного движения. Во всех теориях такого вырождения всегда делается более или менее произвольное предположение о статистическом поведении молекул или об их квантовании. В данной работе будет использовано лишь предположение (впервые высказанное Паули и опирающееся на многочисленные спектроскопические факты), согласно которому в системе никогда не может оказаться двух тождественных элементов, квантовые числа которых полностью совпадают. С помощью этой гипотезы будут получены уравнение состояния и внутренняя энергия идеального газа; значение энтропии при больших температурах совпадает со значением Штерна — Тетроде.

В классической термодинамике молекулярная теплоемкость (при постоянном объеме) полагается равной

$$c = \frac{3}{2} k. \tag{1}$$

Однако если мы хотим применить термодинамический принцип Нернста также и к идеальному газу, то равенство (1) следует рассматривать лишь как приближенное, справедливое при высоких температурах, ибо в пределе $T = 0$ теплоемкость c должна обращаться в нуль. Это вынуждает нас предположить, что движение молекул идеального газа квантовано; такое квантование проявляется при низких температурах в известных явлениях вырождения, так что и удельная теплоемкость, и уравнение состояния будут отличаться от своих классических выражений.

Цель настоящей работы — дать метод квантования идеального газа, в значительной мере свободный, по нашему мнению, от произвольных предположений о статистическом поведении газовых молекул.

В последнее время предпринимаются многочисленные попытки установить уравнение состояния идеального газа[2]. Уравнения состояния,

---

* *Zur Quantelung des idealen einatomigen Gases.* Zs. f. Physik., 1926, 36, 902—912.

[1] Ср. предварительное сообщение: E. Fermi. Rend. Lincei, 1926, (6), 3, 145 (Б31).

[2] Ср., например, A. *Einstein*. Berl. Ber., 1924, стр. 261; 1925, стр. 318 (см. перевод: А. Эйнштейн. Собр. научных трудов, т. III. М., 1966, стр. 481 и 489.— *Ред.*). М. Планк. Там же, 1925, стр. 49. Наш метод и метод Эйнштейна родственны в той мере, в какой оба они сохраняют предположение статистической независимости молекул, хотя у нас и у Эйнштейна используются зависимости совершенно разного вида, а конечные результаты для отклонений от классического уравнения состояния оказываются даже противоположными.

полученные различными авторами и нами, отличаются друг от друга и от классического уравнения состояния $pV = NkT$ лишь при очень низких температурах и высоких давлениях. К сожалению, именно при этих условиях отклонения реальных газов от идеальных максимальны, так что отнюдь не ничтожные проявления вырождения до сих пор не могли наблюдаться. Во всяком случае, вовсе не исключено, что удастся накопить исчерпывающие сведения об уравнениях состояния газов и отделить вырождение от остальных отклонений от уравнения $pV = NkT$, и, таким образом, станет возможным экспериментальный выбор между различными теориями вырождения.

Чтобы применить квантовые правила к движению молекул нашего идеального газа, можно действовать по-разному; однако конечный результат всегда остается одним и тем же. Например, можно представить себе, что молекулы заключены в сосуд (в форме параллелепипеда) с упруго отражающими стенками; благодаря этому движение молекул от стенки к стенке будет условно-периодическим и поэтому может быть проквантовано. Вообще говоря, можно представить себе внешнее силовое поле такого рода, что движение находящихся в нем молекул будет условно-периодическим. Предположение об идеальности газа позволяет нам пренебречь механическим воздействием молекул друг на друга, так что их механическое движение происходит только под влиянием внешней силы. Однако очевидно, что в предположении полной независимости движения молекул друг от друга проведенного квантования молекулярного движения недостаточно, чтобы предсказать ожидаемое вырождение. Проще всего это понять на примере молекул, заключенных в некоторый объем, когда с ростом линейных размеров этого объема значения энергии квантовых состояний каждой отдельной молекулы будут группироваться все плотнее, так что для объема макроскопических размеров уже всякое влияние дискретности значений энергии практически исчезнет. Кроме того, это влияние зависит от размеров объема, если число содержащихся в нем молекул выбрано таким, чтобы их плотность оставалась постоянной.

Количественный учет этих соображений [3] позволяет убедиться в том, что вырождение ожидаемого порядка величины получается лишь при столь малом объеме, когда в нем содержится всего только одна молекула.

Поэтому нам представляется, что при квантовании идеального газа к квантовым условиям Зоммерфельда нужно добавить еще одно правило.

Недавно Паули [4] — в связи с работой Стонера [5] — установил такое правило: если в атоме имеется электрон, квантовые числа которого (включая магнитные квантовые числа) принимают известные значения, то в этом атоме не может быть другого электрона, орбита которого характеризуется теми же самыми квантовыми числами. Другими словами, квантовая орбита

[3] E. Fermi. Nuovo Cimento, 1924, 1, 145 (статья 17).
[4] W. Pauli. Zs. f. Phys., 1925, 31, 765.
[5] E. C. Stoner. Phil. Mag., 1924, 48, 719.

(во внешнем магнитном поле) уже полностью занята каким-то одним электроном.

Поскольку это правило Паули оказалось чрезвычайно плодотворным при толковании спектроскопических данных [6], мы попытаемся выяснить, не будет ли оно полезно также и в случае задачи квантования идеального газа.

Мы покажем, что это действительно так и что применение правила Паули позволяет построить совершенно последовательную теорию вырождения.

Таким образом, в дальнейшем будет предполагаться, что в нашем газе может присутствовать не более одной молекулы с заданными квантовыми числами; при этом имеются в виду не только квантовые числа, определяющие внутреннее движение молекулы, но также и числа, отвечающие ее переносному движению.

Сначала нужно нашу молекулу поместить в соответствующее внешнее силовое поле, в котором ее движение было бы условно-периодическим. Это можно осуществить бесчисленным числом способов; поскольку же результат не зависит от выбора силового поля, наложим на молекулы центральную упругую связь с фиксированной точкой О (началом координат), так чтобы каждая молекула образовала гармонический осциллятор. Такая центральная сила будет удерживать весь наш газ в окрестности точки О; с удалением от О плотность газа будет уменьшаться и на бесконечном расстоянии она обратится в нуль. Если ν — собственная частота осциллятора, то действующая на молекулу сила равна

$$4\pi^2\nu^2 mr,$$

где m — масса молекулы, а r — ее расстояние от О. Потенциальная энергия силы притяжения равна тогда

$$u = 2\pi^2\nu^2 mr^2. \qquad (1)$$

Квантовыми числами осциллятора, соответствующего движению молекулы, будут s_1, s_2, s_3. По существу же для характеристики движения молекул этих квантовых чисел недостаточно: к ним нужно было бы добавить еще и квантовые числа внутреннего движения. Однако мы ограничимся одноатомными молекулами, предполагая впредь, что все имеющиеся в нашем газе молекулы находятся в основном состоянии и что это состояние является простым (не расщепляется магнитным полем). В этом случае нам не нужно будет беспокоиться о внутреннем движении, и молекулы можно считать просто материальными точками. В наших условиях правило Паули гласит: во всем множестве газовых молекул существует не более одной молекулы с заданными квантовыми числами s_1, s_2, s_3.

---

[6] Ср., например, F. Hund. Zs. f. Phys., 1925, 33, 345.

Полная энергия этой молекулы задается соотношением

$$w = h\nu\,(s_1 + s_2 + s_3) = h\nu s. \tag{2}$$

Поэтому полная энергия может быть любым целым кратным $h\nu$; однако значение $sh\nu$ может реализоваться многими путями. Каждая из таких возможностей отвечает решению уравнения

$$s = s_1 + s_2 + s_3, \tag{3}$$

где s_1, s_2, s_3 могут принимать значения 0, 1, 2, 3, ... Как известно, уравнение (3) имеет

$$Q_s = \frac{(s+1)(s+2)}{2} \tag{4}$$

решений. Таким образом, нулевая энергия может реализоваться только одним способом, энергия $h\nu$ — тремя, энергия $2h\nu$ — шестью и т. д. Молекула с энергией $h\nu s$ будет называться просто s-молекулой.

Согласно нашему предположению, во всем множестве молекул газа может существовать не более Q_s s-молекул, т. е. не более одной молекулы с нулевой энергией, не более трех молекул с энергией $h\nu$, не более шести молекул с энергией $2h\nu$ и т. д.

Чтобы можно было яснее себе представить следствия этого факта, рассмотрим крайний случай, когда абсолютная температура нашего газа равна нулю. Пусть N — число молекул. При абсолютном нуле газ должен находиться в состоянии с наименьшей энергией. Если бы не существовало никаких ограничений на число молекул, обладающих заданной энергией, то каждая молекула находилась бы в состоянии с нулевой энергией ($s_1 = s_2 = s_3$). Но, согласно сказанному ранее, с нулевой энергией может быть не более одной молекулы; поэтому, если $N = 1$, то при абсолютном нуле состояние с нулевой энергией было бы занято одной-единственной молекулой; при $N = 4$ одна молекула занимала бы состояние с нулевой энергией, а три другие — три состояния с энергией $h\nu$; при $N = 10$ одна молекула заняла бы состояние с нулевой энергией, три другие — три состояния с энергией $h\nu$, а оставшиеся шесть находились бы в состоянии с энергией $2h\nu$.

Таким образом, при абсолютном нуле молекулы нашего газа образуют своего рода оболочечную структуру, обнаруживая известную аналогию с оболочечным расположением электронов в атоме со многими электронами.

Посмотрим теперь, как распределяется полная энергия

$$W = Eh\nu \tag{5}$$

(E — целое число) между нашими N молекулами.

Пусть N_s — число молекул, находящихся в состоянии с энергией $sh\nu$. Согласно нашему предположению,

$$N_s \leqslant Q_s. \tag{6}$$

Далее, имеем равенства

$$\sum N_s = N, \tag{7}$$

$$\sum sN_s = E, \tag{8}$$

которые означают, что общее число молекул и их полная энергия равны соответственно N и $Eh\nu$.

Вычислим теперь число P таких возможностей осуществления распределений из наших N молекул, когда N_0 находятся в состояниях с нулевой энергией, N_1 — в состояниях с энергией $h\nu$, N_2 — в состояниях с энергией $2h\nu$ и т. д. При этом два распределения следует считать одинаковыми, если молекулы занимают одни и те же состояния: два распределения, которые различаются между собой только перестановкой молекул между их состояниями, следует поэтому рассматривать как одно и то же распределение. Если бы два таких распределения считались разными, то P нужно было бы умножить на $N!$; однако нетрудно понять, что это не оказало бы никакого влияния на последующие выводы. В указанном выше смысле число возможностей осуществления распределений из N_s молекул по Q_s состояниям, которым отвечает энергия $sh\nu$, дается величиной

$$\binom{Q_s}{N_s}.$$

Следовательно, для P находим выражение

$$P = \binom{Q_0}{N_0}\binom{Q_1}{N_1}\binom{Q_2}{N_2}\cdots = \prod_s \binom{Q_s}{N_s}. \tag{9}$$

Наиболее вероятные значения N_s получаются, если найти максимум P с учетом условий (7) и (8). Пользуясь формулой Стирлинга, можно с достаточной для нашего случая точностью написать

$$\ln P = \sum \ln \binom{Q_s}{N_s} = -\sum \left(N_s \ln \frac{N_s}{Q_s - N_s} + Q_s \ln \frac{Q_s - N_s}{Q_s} \right). \tag{10}$$

Таким образом, найдем значения N_s, удовлетворяющие условиям (7) и (8), и для которых $\ln P$ максимален. Получаем

$$\alpha e^{-\beta s} = \frac{N_s}{Q_s - N_s},$$

где α и β — постоянные. Предыдущее равенство дает

$$N_s = Q_s \frac{\alpha e^{-\beta s}}{1 + \alpha e^{-\beta s}}. \tag{11}$$

Значения α и β можно определить с помощью равенств (7) и (8); либо, наоборот, их можно считать заданными, и тогда равенства (7) и (8) определяют общее число молекул и их полную энергию, а именно

$$\left.\begin{aligned} N &= \sum_0^\infty Q_s \frac{\alpha e^{-\beta s}}{1 + \alpha e^{-\beta s}}, \\ \frac{W}{h\nu} = E &= \sum_0^\infty s Q_s \frac{\alpha e^{-\beta s}}{1 + \alpha e^{-\beta s}}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Абсолютная температура газа T является функцией N и E или же α и β. Эту функцию можно найти двумя разными методами, которые, тем не менее, приводят к одному и тому же результату. Можно было бы, например, в соответствии с принципом Больцмана положить энтропию равной

$$S = k \ln P$$

и затем вычислить температуру по формуле

$$T = \frac{dW}{dS}.$$

Однако этот метод, как и все методы, опирающиеся на принцип Больцмана, имеет тот недостаток, что его применение требует более или менее произвольного предположения относительно вероятности состояний. Поэтому мы предпочитаем поступить следующим образом. Вспомним, что плотность нашего газа является функцией расстояния, которая обращается в нуль на бесконечно большом расстоянии. Следовательно, при бесконечно больших r вырождение будет снято и статистика нашего газа перейдет в классическую. В частности, при $r = \infty$ средняя кинетическая энергия молекул должна равняться $3\,kT/2$ и их распределение по скоростям должно переходить в максвелловское. Таким образом, температуру можно определить из распределения по скоростям в области, где плотность бесконечно мала; поскольку же весь газ находится при постоянной температуре, одновременно будет известна и температура для областей большей плотности. Для такого определения воспользуемся, так сказать, газовым термометром с бесконечно разреженным идеальным газом.

Прежде всего нужно вычислить плотность молекул с кинетической энергией от L до $L + dL$ на расстоянии r. Согласно формуле (1), полная энергия таких молекул будет заключена между

$$L + 2\pi^2\nu^2 m r^2 \quad \text{и} \quad L + 2\pi^2\nu^2 m r^2 + dL.$$

Полная же энергия одной молекулы равна $sh\nu$. Следовательно, для наших молекул значение s должно лежать между s и $s + ds$, где

$$s = \frac{L}{h\nu} + \frac{2\pi^2\nu m}{h} r^2, \qquad ds = \frac{dL}{h\nu}. \tag{13}$$

Обратимся теперь к молекуле, движение которой характеризуется квантовыми числами s_1, s_2, s_3. Ее координаты x, y, z как функции времени задаются равенствами

$$\left.\begin{aligned} &x = \sqrt{Hs_1}\cos(2\pi\nu t - \alpha_1), \qquad y = \sqrt{Hs_2}\cos(2\pi\nu t - \alpha_2),\\ &z = \sqrt{Hs_3}\cos(2\pi\nu t - \alpha_3). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

При этом

$$H = \frac{h}{2\pi^2\nu m}; \tag{15}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ означают здесь фазовые константы, которые с равной вероятностью могут принимать любой произвольный набор значений. Отсюда и из равенств (14) следует, что $|x| \leqslant \sqrt{Hs_1}$, $|y| \leqslant \sqrt{Hs_2}$, $|z| \leqslant \sqrt{Hs_3}$, а вероятность того, что x, y, z лежат в пределах между x и $x + dx$, y и $y + dy$, z и $z + dz$, дается следующим выражением:

$$\frac{dxdydz}{\pi^3\sqrt{(Hs_1 - x^2)(Hs_2 - y^2)(Hs_3 - z^2)}}.$$

Если известны не отдельные значения s_1, s_2, s_3, а только их сумма, то искомая вероятность выражается величиной

$$\frac{1}{Q_s}\frac{dxdydz}{\pi^3}\sum\frac{1}{\sqrt{(Hs_1 - x^2)(Hs_2 - y^2)(Hs_3 - z^2)}}; \tag{16}$$

здесь суммирование распространяется на все целочисленные решения уравнения (3), удовлетворяющие неравенствам

$$Hs_1 \geqslant x^2, \qquad Hs_2 \geqslant y^2, \qquad Hs_3 \geqslant z^2.$$

Если вероятность (16) умножить на число N_s s-молекул, то получим количество s-молекул, содержащихся в элементе объема $dxdydz$. Принимая во внимание равенство (1), находим, таким образом, что плотность s-молекул в точке x, y, z определяется выражением

$$n_s = \frac{\alpha e^{-\beta s}}{1 + \alpha e^{-\beta s}}\frac{1}{\pi^3}\sum\frac{1}{\sqrt{(Hs_1 - x^2)(Hs_2 - y^2)(Hs_3 - z^2)}}.$$

Для достаточно больших s сумму можно заменить двойным интегралом; после интегрирования находим

$$n_s = \frac{2}{\pi^2 H^2}\frac{\alpha e^{-\beta s}}{1 + \alpha e^{-\beta s}}\sqrt{Hs - r^2}.$$

Воспользовавшись соотношениями (13) и (15), находим далее, что плотность молекул с кинетической энергией от L до $L + dL$ в точке x, y, z выражается следующим образом:

$$n(L)\,dL = n_s ds = \frac{2\pi(2m)^{3/2}}{h^3}\sqrt{L}\,dL \frac{\alpha e^{-\frac{2\pi^2 \nu m\beta r^2}{h}} e^{-\frac{\beta L}{h\nu}}}{1 + \alpha e^{-\frac{2\pi^2 \nu m\beta r^2}{h}} e^{-\frac{\beta L}{h\nu}}}. \tag{17}$$

Эту формулу нужно сравнивать с классическим выражением максвелловского закона распределения

$$n^*(L)\,dL = K\sqrt{L}\,dL e^{-L/kT}. \tag{17'}$$

При этом можно заметить, что в пределе $r = \infty$ формула (17) переходит в (17′), если только положить

$$\beta = \frac{h\nu}{kT}. \tag{18}$$

Формулу (17) можно теперь записать в следующем виде:

$$n(L)\,dL = \frac{(2\pi)(2m)^{3/2}}{h^3}\sqrt{L}\,dL \frac{Ae^{-L/kT}}{1 + Ae^{-L/kT}}, \tag{19}$$

где

$$A = \alpha e^{-\frac{2\pi^2\nu^2 m r^2}{kT}}. \tag{20}$$

Суммарная плотность молекул на расстоянии r будет равна, следовательно,

$$n = \int_0^\infty n(L)\,dL = \frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} F(A), \tag{21}$$

где

$$F(A) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{A\sqrt{x}e^{-x}dx}{1 + Ae^{-x}}. \tag{22}$$

Средняя кинетическая энергия молекул на расстоянии r равна

$$\bar{L} = \frac{1}{n}\int_0^\infty Ln(L)\,dL = \frac{3}{2}kT\frac{G(A)}{F(A)}, \tag{23}$$

где

$$G(A) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{Ax^{3/2}e^{-x}dx}{1 + Ae^{-x}}. \tag{24}$$

С помощью соотношения (21) величину A можно определить как функцию плотности и температуры; если найденное значение подставить в формулы (19) и (23), то получим распределение молекул по скоростям и их среднюю кинетическую энергию в зависимости от плотности и температуры.

Чтобы написать уравнение состояния, воспользуемся теоремой вириала, согласно которой давление дается формулой

$$p = \frac{2}{3} n\bar{L} = nkT \frac{G(A)}{F(A)}; \tag{25}$$

выражение для A как функции плотности и температуры снова нужно взять из соотношения (21).

Прежде чем идти дальше, укажем на некоторые математические свойства введенных выше функций $F(A)$ и $G(A)$.

При $A \leqslant 1$ обе функции можно представить сходящимися рядами

$$\left.\begin{aligned} F(A) &= A - \frac{A^2}{2^{3/2}} + \frac{A^3}{3^{3/2}} - \ldots, \\ G(A) &= A - \frac{A^2}{2^{5/2}} + \frac{A^3}{3^{5/2}} - \ldots. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

При больших A имеют место асимптотические выражения

$$\left.\begin{aligned} F(A) &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\ln A)^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8(\ln A)^2} + \ldots\right], \\ G(A) &= \frac{8}{15\sqrt{\pi}} (\ln A)^{5/2} \left[1 + \frac{5\pi^2}{8(\ln A)^2} + \ldots\right]. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Далее, имеет место соотношение

$$\frac{dG(A)}{F(A)} = d \ln A. \tag{28}$$

Кроме того, мы должны ввести функцию $P(\Theta)$, определяемую соотношениями

$$P(\Theta) = \Theta \frac{G(A)}{F(A)}, \qquad F(A) = \frac{1}{\Theta^{3/2}}. \tag{29}$$

При очень больших и очень малых Θ функцию $P(\Theta)$ можно вычислять соответственно по приближенным формулам

$$\left.\begin{aligned} P(\Theta) &= \Theta\left\{1 + \frac{1}{2^{5/2}\Theta^{3/2}} + \ldots\right\}, \\ P(\Theta) &= \frac{3^{2/3}\pi^{1/3}}{5\cdot 2^{1/3}}\left\{1 + \frac{5\cdot 2^{2/3}\pi^{4/3}}{3^{7/3}}\Theta^2 + \ldots\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Учитывая соотношения (29), (28), (27), обнаруживаем, что

$$\int_0^\Theta \frac{dP(\Theta)}{\Theta} = \frac{5}{3}\frac{G(A)}{F(A)} - \frac{2}{3}\ln A. \tag{31}$$

Теперь у нас есть возможность исключить параметр A из уравнения состояния (25) и равенства (23) и получить давление и среднюю кинетическую энергию в виде явных функций плотности и температуры:

$$p = \frac{h^2 n^{5/3}}{2\pi m} P\left(\frac{2\pi mkT}{h^2 n^{2/3}}\right), \tag{32}$$

$$\overline{L} = \frac{3}{2}\frac{h^2 n^{2/3}}{2\pi m} P\left(\frac{2\pi mkT}{h^2 n^{2/3}}\right). \tag{33}$$

В предельном случае слабого вырождения (T велико, а n мало) уравнение состояния принимает следующую форму:

$$p = nkT\left\{1 + \frac{1}{16}\cdot\frac{h^3 n}{(\pi mkT)^{3/2}} + \ldots\right\}. \tag{34}$$

Таким образом, давление оказывается больше, чем в случае классического уравнения состояния ($p = nkT$). Для идеального газа с атомным весом гелия при $T = 5°$ и давлении 10 *атм* различие составляет около 15%.

В предельном случае сильного вырождения формулы (32) и (33) принимают вид

$$p = \frac{1}{20}\left(\frac{6}{\pi}\right)^{2/3}\frac{h^2 n^{5/3}}{m} + \frac{2^{4/3}\pi^{8/3}}{3^{5/2}}\frac{mn^{1/3}k^2T^2}{h^2} + \ldots, \tag{35}$$

$$\overline{L} = \frac{3}{40}\left(\frac{6}{\pi}\right)^{2/3}\frac{h^2 n^{2/3}}{m} + \frac{2^{1/3}\pi^{8/3}}{3^{2/3}}\frac{mk^2T^2}{h^2 n^{2/3}} + \ldots. \tag{36}$$

Отсюда видно, что вырождение приводит к существованию нулевого давления и нулевой энергии.

По формуле (36) можно также вычислить и удельную теплоемкость при низких температурах; находим

$$c_v = \frac{d\overline{L}}{dT} = \frac{2^{4/3}\pi^{8/3}}{3^{2/3}}\frac{mk^2T}{h^2 n^{2/3}} + \ldots. \tag{37}$$

Оказывается, что удельная теплоемкость при абсолютном нуле обращается в нуль и что, в частности, при низких температурах она пропорциональна абсолютной температуре.

Укажем, наконец, что наша теория дает для энтропии газа значение Штерна — Тетроде. В самом деле, пользуясь формулой (33), находим

$$S = n\int_0^T \frac{d\bar{L}}{T} = \frac{3}{2}nk\int_0^\Theta \frac{P'(\Theta)\,d\Theta}{\Theta}\,.$$

Далее, соотношение (31) дает

$$S = nk\left\{\frac{5}{2}\frac{G(A)}{F(A)} - \ln A\right\},$$

где значение A снова берется из (21). Пользуясь разложениями (26), находим, следовательно, что при высоких температурах

$$A = \frac{nh^3}{(2\pi mkT)^{3/2}}, \qquad \frac{G(A)}{F(A)} = 1. \tag{38}$$

В этом случае формула (38) дает

$$S = nk\left\{\ln\frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{nh^3} + \frac{5}{2}\right\} = nk\left\{\frac{3}{2}\ln T - \ln n + \ln\frac{(2\pi m)^{3/2}k^{3/2}e^{5/2}}{h^3}\right\},$$

что совпадает с выражением для энтропии, полученным Штерном и Тетроде.

К статье 26

На основе векторной модели и принципа соответствия в статье вычисляются интенсивности линий, запрещенных правилом отбора по J и появляющихся при помещении излучающего атома в сильное магнитное поле. Количественное приложение результатов производится для комбинаций ^1S — $^3P_2$ и ^1S — $^3P_1$ в щелочноземельных элементах.

Ф. Разетти

26

ОБ ИНТЕНСИВНОСТИ ЗАПРЕЩЕННЫХ ЛИНИЙ В СИЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ *

В эмиссионном спектре атома, возмущенного сильным электрическим или магнитным полем, часто наблюдаются линии или серии линий, которые отсутствуют в спектре невозмущенного атома. Это явление объясняется принципом соответствия Бора[1] следующим образом: известно, что частоты всех эмиссионных линий атома могут быть представлены как разности спектроскопических термов, но не всем возможным разностям термов соответствуют линии, которые атом на самом деле может испускать.

Бор выдвинул следующий критерий допустимости комбинации двух термов. В разложении движения оптического электрона в ряд Фурье должна появиться гармоническая компонента, соответствующая переходу между двумя термами; в этом случае интенсивность линии приблизительно равна интенсивности, с которой соответствующая гармоническая компонента излучалась бы согласно классической электродинамике, т. е. она пропорциональна квадрату амплитуды этой компоненты. Теперь понятно, что возмущение орбиты оптического электрона внешним полем может порождать в его движении такие гармонические компоненты, которые отсутствовали в невозмущенном движении; и соответственно этим компонентам в спектре появятся новые линии, которых в отсутствие возмущающего поля не было.

В настоящей работе с этой точки зрения изучается интенсивность но-

---

* *Sopra l'intensità delle righe proibite nei campi magnetici intensi.* Rend. Lincei, 1926, 3, 478—483. Представлена академиком А. Гарбассо на заседании 21 марта 1926 г.

[1] N. Bohr. Zs. f. Phys., 1922, 9, 27.

вых линий, появляющихся в сильных магнитных полях [2]. С этой проблемой тесно связана проблема разрушения метастабильности некоторых квантовых состояний в магнитном поле. Имеются состояния, покинуть которые атом не может никаким другим способом, кроме как путем некоторого запрещенного квантового перехода. Поэтому атом, находящийся в одном из этих состояний, в отсутствие возмущений не имеет никакой возможности покинуть его, так что среднее время жизни атома бесконечно. Если же атом подвергается соответствующему возмущению, например, действию магнитного поля, то среднее время жизни метастабильного состояния становится конечным.

Ограничим наши рассуждения так называемыми термами «первой ступени» [3] (erster Stufe). Как известно, к этому типу принадлежат спектры щелочных металлов, соседней подгруппы металлов и все нормальные термы щелочноземельных металлов. В качестве механической модели термов «первой ступени» можно принять векторное представление Ланде [4]. Согласно этому представлению, стационарная орбита атома характеризуется не только полным квантовым числом n, но и тремя другими квантовыми числами [5] K, R, J, которым приписывают соответственно смысл момента количества движения оптического электрона, момента атомного остатка и их векторной суммы, т. е. полного момента атома. Если атом находится в магнитном поле H, следует ввести еще одно квантовое число M, которое является проекцией J на направление H. Кинематический характер орбиты в отсутствие магнитного поля может быть описан следующим образом [6]. В плоскости, перпендикулярной k, электрон совершает движение типа «розетки», т. е. периодическое движение с равномерной прецессией в своей плоскости. Плоскость орбиты не остается неподвижной в пространстве, поскольку весь атом и, следовательно, векторы k и r равномерно прецессируют вокруг вектора j, который в отсутствие внешних сил сохраняет неизменное (в пространстве) направление вследствие закона сохранения момента количества движения; азимутальный угол этой прецессии, φ_j, представляет собой угловую координату, сопряженную с j. Когда атом помещается во внешнее магнитное поле, направление j уже неостается неизменным, поскольку как k, так и r будут прецессировать вокруг направления магнитного поля. Далее, для объяснения аномального эффекта Зеемана и эффекта Пашена — Бака следует предположить, что

---

[2] Относительно экспериментального наблюдения таких линий см. F. Paschen, E. Back. Physica, 1921, 1, 261.

[3] A. Landé, W. Heisenberg. Zs. f. Phys., 1924, 25, 279.

[4] A. Landé. Zs. f. Phys., 1923, 15, 189. В случае термов «первой ступени» k совпадает с l, так что достаточно рассмотреть взаимодействия между k и r; W. Heisenberg. Zs. f. Phys., 1925, 32, 841; H. N. Russell, F. A. Saunders. Astr. Journ., 1925, 61, 38.

[5] В нашей работе большими буквами R, K, J, M обозначены квантовые числа, а малыми — соответствующие моменты количества движения.

[6] A. Sommerfeld, W. Heisenberg. Zs. f. Phys., 1922, 11, 131.

k прецессирует с нормальной ларморовской частотой

$$\Omega = \frac{eH}{4\pi mc} = 1{,}4\cdot 10^6 H, \tag{1}$$

в то время как r прецессирует с удвоенной частотой. Этот эффект недавно попытались объяснить Уленбек и Гаудсмит [7], которые изменили модельное представление об r и интерпретировали его как полный момент вращательных движений всех электронов; хотя эта гипотеза кажется очень смелой, она позволяет понять значительное количество спектроскопических данных.

Пока H мало, суммарный эффект воздействия поля на k и r состоит просто в том, что целый атом равномерно прецессирует вокруг H с аномальной частотой $g\Omega$, где g — множитель расщепления; азимут φ_m этой прецессии — угловая координата, сопряженная с m. Когда же влияние H на k и r становится такого же порядка величины, что и взаимодействие между r и k, равномерный характер этой прецессии возмущается, поскольку r стремится прецессировать быстрее, чем k; одновременно возмущается и прецессия вокруг j. Неравномерность этих прецессий приводит к тому, что в разложении движения оптического электрона в ряд Фурье появляются новые гармонические компоненты; это и является причиной появления новых линий. Прежде чем перейти к подробному расчету их интенсивности, коротко изложим полученные нами результаты.

Найдено, что в отсутствие магнитных полей или в слабых магнитных полях J и M могут меняться в одном квантовом переходе только на ± 1 или 0. Кроме того, для квантового числа J невозможна комбинация $^1/_2 \to {}^1/_2$, а для квантового числа M невозможна комбинация $0 \to 0$, если одновременно $\Delta J = 0$. В сильных же магнитных полях правила отбора для J уже не справедливы и можно наблюдать как переход $^1/_2 \to {}^1/_2$, так и те переходы, для которых $\Delta J = 2$, $\Delta J = 3$ и т. д. Зависимость интенсивности новых линий от поля H меняется от линии к линии. Первый тип такой зависимости характерен для линий, соответствующих переходам $^1/_2 \to {}^1/_2$ или $\Delta J = 2$, причем интенсивность этих линий приблизительно пропорциональна H^2; второй тип соответствует линиям, для которых $\Delta J = 3$, их интенсивность пропорциональна H^4 и т. д. Для линии первого типа интенсивность равна

$$I = \alpha I_0 \Omega^2/\omega^2, \tag{2}$$

где I_0 — интенсивность мультиплета; ω — его расщепление [8] и α — числовой коэффициент, выражающийся через квантовые числа.

---

[7] G. E. Uhlenbeck, S. Goudsmit. Naturw., 1925, 13, 953.

[8] Точный смысл ω для мультиплетов, подчиняющихся правилу интервалов (Ланде, цит. соч.) таков, что разность двух термов мультиплета с внутренними квантовыми числами J и J' есть $\Delta\nu = \omega\,(J^2 - J'^2)$.

Функцию Гамильтона H нашей модели атома в случае мультиплетов, подчиняющихся правилу интервалов, можно записать в виде [9]

$$\frac{1}{h} H = \omega j^2 + \Omega \left\{ m \left(\frac{3}{2} + \frac{r^2 - k^2}{2j^2} \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\cos \varphi_j}{2j^2} \sqrt{(j^2 - m^2)\left[(r+k)^2 - j^2\right]\left[j^2 - (r-k)^2\right]} \right\}. \qquad (3)$$

В отсутствие поля j, m, φ_j, φ_m — угловые координаты. Когда система испытывает возмущение со стороны поля, от этих координат следует перейти к угловым координатам J, M, Φ_j, Φ_m с помощью канонического преобразования, определяемого функцией

$$S = J\varphi_j + M\varphi_m + \Omega S_1 (J, M, \varphi_j, \varphi_m).$$

Применяя методы теории возмущений [10], находим

$$S_1 = -\frac{\sin \varphi_j}{4\omega J^3} \sqrt{(J^2 - M^2)\left[(K+R)^2 - J^2\right]\left[J^2 - (K-R)^2\right]}\ .$$

Поэтому каноническое преобразование задается формулами

$$\left.\begin{aligned} j &= J - \frac{\Omega}{\omega} A \cos \Phi_j, \qquad & m &= M, \\ \varphi_j &= \Phi_j + \frac{\Omega}{\omega} B \sin \Phi_j, \qquad & \varphi_m &= \Phi_m + \frac{\Omega}{\omega} C \sin \Phi_j, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

где

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{4J^3} \sqrt{(J^2 - M^2)\left[(K+R)^2 - J^2\right]\left[J^2 - (K-R)^2\right]}, \\ B &= \frac{\partial A}{\partial J}, \qquad C = \frac{\partial A}{\partial M}. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Формулы (4) и (5) полностью решают механическую часть нашей задачи. В частности, в них содержится подтверждение того, что в магнитном поле конечной напряженности прецессии вокруг j и H неравномерны. Далее, мы должны разложить в ряд Фурье координаты оптического электрона. Для этого мы используем некоторые формулы, установленные Зоммерфельдом и Гейзенбергом [6] для аналогичного разложения в ряд Фурье (в бесконечно слабых полях). Действительно, эти формулы явно будут справедливы и в нашем случае, если $o_j t$ и $o_m t$ заменить соответственно на

[9] W. Pauli. Zs. f. Phys., 1924, 20, 371; W. Heisenberg. Zs. f. Phys., 1924, 26, 291. Подобный расчет имеется в работе Ланде (Zs. f. Phys., 1924, 30, 329); см. в этой статье некоторые детали последующих расчетов по теории возмущений.

[10] M. Born, W. Pauli. Zs. f. Phys., 1922, 10, 137.

φ_j и φ_m. Коэффициенты C_{srq} и D_{srq} в формулах (9) Зоммерфельда и Гейзенберга, которые в их случае являются постоянными, в нашем случае, естественно, будут зависеть от времени, поскольку они являются функциями полного момента j, который, в свою очередь, вследствие первого из соотношений (4) является функцией времени. Чтобы получить явные выражения C и D как функции j, величины Θ и θ в формулах (10) и (7) Зоммерфельда и Гейзенберга достаточно положить равными

$$\cos\Theta = M/j,\ \cos\theta = (j^2 + K^2 - R^2)/2Kj, \tag{6}$$

как это следует из их геометрического смысла.

Далее, в формулах (9) Зоммерфельда и Гейзенберга следует заменить j, φ_j и φ_m их значениями (4). Тогда в нашем приближении найдем

$$\left.\begin{aligned} X + iY &= \sum_{srq}\left\{C_{srq} - \frac{\Omega A}{\omega}\frac{\partial C_{srq}}{\partial J}\cos\Phi_j\right\}\times \\ &\times\left\{1 + \frac{i\Omega}{\omega}(qB + C)\sin\Phi_j\right\}e^{i(s\omega_n t + r\omega_k t + q\Phi_j + \Phi_m)}, \\ Z &= \sum_{srq}\left\{D_{srq} - \frac{\Omega A}{\omega}\frac{\partial D_{srq}}{\partial J}\cos\Phi_j\right\}\times \\ &\times\left\{1 + \frac{i\Omega}{\omega}qB\sin\Phi_j\right\}e^{i(s\omega_n t + r\omega_k t + q\Phi_j)}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Разлагая предыдущие выражения в ряд Фурье по угловой координате Φ_j и ограничиваясь нашим приближением, находим, что они содержат только члены типа $e^{\pm 2i\Phi_j}$, $e^{\mp i\Phi_j}$, 1; эти члены соответствуют квантовым переходам $J \to J' \pm 2$, $J \to J \pm 1$, $J \to J$. Гармонические компоненты, соответствующие переходам $J \to J \pm 2$ и $^1/_2 \to {}^1/_2$, имеют пропорциональную Ω/ω амплитуду; поэтому соответствующие вероятности перехода будут пропорциональны Ω^2/ω^2, что и оправдывает формулу (2). Если бы мы улучшили наше приближение, включив также члены с Ω^2/ω^2, то мы нашли бы в предыдущем разложении также члены, соответствующие квантовому переходу $J \to J \pm 3$.

Итак, амплитуда соответствующих компонент оказывается пропорциональной H^2, и поэтому интенсивность рассматриваемых линий пропорциональна H^4.

В качестве примера рассмотрим запрещенные переходы $J = {}^1/_2 \to J = {}^1/_2$. Здесь мы имеем только одну зеемановскую компоненту, для которой $M = 0$, $\Delta M = 0$; соответствующие гармонические компоненты поэтому будут содержаться только в разложении Z. Далее, из соотношений (6) следует, что в этом случае $\cos\Theta = 0$. Формулы (10) и (7) Зоммерфельда и

Гейзенберга тогда дают

$$D_{s,\,r,\,0}=0,\qquad D_{s,\,1,\,1}+D_{s,\,1,\,-1}={}^{1}/_{2}\,a_s\cos\theta,$$
$$D_{-s,\,-1,\,1}+D_{-s,\,-1,\,-1}={}^{1}/_{2}\,\bar a_s\cos\theta.$$

Поэтому искомые гармонические компоненты оказываются равными

$$-\frac{\Omega}{4\omega}\left(B\cos\theta+A\frac{\partial\cos\theta}{\partial J}\right)\{a_s e^{i(s o_n+o_k)t}+\bar a_s e^{-i(s o_n+o_k)t}\}.$$

Тогда соответствующая вероятность перехода будет пропорциональна

$$\frac{\Omega^2}{\omega^2}\left(B\cos\theta+A\frac{\partial\cos\theta}{\partial J}\right)^2|a_s|^2. \qquad (8)$$

Аналогично, вероятность незапрещенного перехода между гомологичными термами, для которых $\Delta J=1$, оказывается пропорциональной

$$(1+\cos\theta)^2\,|a_s|^2. \qquad (9)$$

В качестве конкретного примера вычислим среднее время жизни метастабильного состояния $2p_3$ элементов второй группы периодической системы. Единственно возможным переходом из состояния $2p_3$ является запрещенный переход $1S-2p_3$ в нормальное состояние $1S$. Поэтому выражения (8) и (9) будут обратно пропорциональны средним временам жизни τ_3 и τ_2 состояний $2p_3$ и $2p_2$. В качестве значений (8) и (9) примем средние арифметические значения величин, соответствующих начальному и конечному состояниям. Таким образом найдем, что (8) и (9) соответственно пропорциональны 0,006 Ω^2/ω^2 и 1,6; поэтому

$$\tau_3/\tau_2=270\omega^2/\Omega^2.$$

Например, для магния $\omega=3\cdot10^{11}$. В поле с напряженностью 50 000 *гс* $\Omega=7\cdot10^{10}$, и поэтому $\tau_3=50\,000\tau_2$. Если предположить, что τ_2 по порядку величины равно 10^{-7} *сек*, то, наконец, найдем $\tau_3=5\cdot10^{-4}$.

К статье 27

Перечислив ряд успешных приложений гипотезы электронного спина к объяснению атомных спектров, авторы указывают на трудность, связанную с энергетическими соображениями. Если вычислять энергию магнитного поля в предположении, что магнитный диполь электрона имеет радиус порядка величины классического радиуса электрона e^2/mc^2, то получается значение, заметно превышающее mc^2. Поэтому магнитной структуре нужно приписать гораздо больший радиус, чем распределению электрического заряда. Изложенные в этой статье идеи почти целиком были высказаны Ферми.

Ф. Разетти

27

О ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЭЛЕКТРОНЕ *

(Совместно с Ф. Разетти)

Измеряемыми характеристиками электрона являются его электрический заряд и масса; как известно, вторую характеристику классическая электродинамика пыталась интерпретировать с помощью первой. При этом электрон считается неким сферически симметричным распределением электричества — поверхностным или объемным,— электромагнитная масса которого обычно отождествляется с полной массой электрона. Несмотря на эти соображения о существовании структуры у электрона, до сих пор в теории атома он почти всегда рассматривался как материальная точка. Лишь в последнее время Уленбек и Гаудсмит [1] выдвинули гипотезу, согласно которой причину некоторых спектроскопических явлений, в частности, аномального эффекта Зеемана, следует искать в какой-то характеристике структуры электрона. А именно, эти авторы предполагают, что электрон совершает вращательное движение вокруг своей оси и, таким образом, обладает как моментом количества движения, так и магнитным моментом. Настоящая работа посвящена анализу этой гипотезы; если ее подтвердят последующие экспериментальные факты, то, весьма вероятно, окажется необходимым приписать электрону гораздо большие линейные размеры, чем это делалось до сих пор.

Свое качественное объяснение эффект Зеемана находит в так называемой теореме Лармора, которая гласит: однородное магнитное поле напря-

---

* *Sopra l'elettrone rotante* (Con F. Rasetti). Nuovo Cimento, 1926, 3, 226—235.

[1] G. E. Uhlenbeck, S. Goudsmit. Naturw., 1925, 13, 953; Nature, 1926, 117, 264; N. Bohr. Nature, 1926, 117, 265.

женностью H создает возмущение в движении механической системы, состоящей из материальных точек одинаковой массы m и одинакового электрического заряда e, которое в первом приближении сводится к равномерной прецессии всей этой системы с частотой $\nu_L = eH/4\pi mc$ вокруг направления поля. С теоремой Лармора тесно связан результат, согласно которому для системы рассматриваемого типа отношение магнитного и механического моментов зависит только от заряда и массы частиц и равно $e/2mc$.

Если электроны какого-либо атома рассматривать как материальные точки, то теорему Лармора можно применять и в случае атома, поскольку ядро может считаться неподвижным; с этой точки зрения следует ожидать, что частоты линий излучения, испускаемого атомом в магнитном поле, будут комбинацией собственных частот невозмущенного атома и ларморовской частоты. Каждой линии (с частотой ν) невозмущенного атома должны были бы, следовательно, соответствовать три линии с частотами $\nu - \nu_L$, ν, $\nu + \nu_L$. Как известно, эта нормальная форма эффекта Зеемана наблюдается лишь для весьма ограниченного числа линий. В большинстве же случаев происходит расщепление более чем на три компоненты, причем величина расщепления обычно отличается от нормального; в этом и состоит так называемый аномальный эффект Зеемана. Кроме того, оказывается, что в слабых магнитных полях смещение каждой компоненты относительно невозмущенной линии пропорционально H, в то время как с дальнейшим ростом поля обнаруживается деформация картины зеемановского расщепления; в предельном случае очень сильных полей она переходит в нормальный триплет (эффект Пашена — Бака).

Согласно принципу соответствия, в теории Бора частоту линий излучения, которое испускает возмущенный магнитным полем атом, также следует рассматривать как комбинацию собственных частот атома с частотой прецессии; поэтому для понимания аномального эффекта Зеемана нужно предположить, что скорость прецессии атома отличается от нормальной скорости, с которой она должна совпадать в пределе очень сильных полей.

Ланде предложил модель атома, которая — пусть неполным образом и в некоторых пунктах неудовлетворительно — пытается учесть эти особенности. Ланде[2] различает в атоме оптический электрон, ответственный за испускание линий и обычно движущийся по орбите, весьма удаленной от ядра и от всех остальных, более близких к ядру электронов, т. е. от атомного остатка (остова). Каждый из этих двух элементов обладает некоторым моментом количества движения, который Ланде обозначает соответственно через K и R. Результирующая K и R представляет собой момент количества движения J всего атома, сохраняющий неизменным в отсутствие внешних сил свое направление в пространстве. Между электроном и остовом действуют силы, которые зависят от ориентации последнего относительно плоскости электронной орбиты, т. е. от угла между K и R.

[2] A. Landé. Zs. f. Phys., 1923, 15, 189.

Силы эти таковы, что приводят к прецессии всего атома вокруг направления J. Прецессия характерным образом действует на строение спектра невозмущенного атома. В самом деле, частота каждой линии, которую атом испускал бы в отсутствие указанной прецессии, будет комбинироваться с частотой прецессии, что даст кратную линию.

Рассмотрим теперь, каков будет эффект, когда этот атом помещен в магнитное поле. Если предположить, что и оптический электрон и остов вынуждены прецессировать вокруг поля с нормальной частотой Лармора, то эффект сведется к передаче этой прецессии всему атому, и конечным результатом будет нормальный эффект Зеемана. Для объяснения аномального эффекта Зеемана и эффекта Пашена — Бака Ланде предполагает, что оптический электрон вынужден прецессировать с нормальной частотой, а остов — с двойной. Кроме того, для этого необходимо принять, что отношение магнитного и механического моментов оптического электрона является нормальным, тогда как для остова оно в два раза больше. До тех пор пока действующие между электроном и остовом силы велики по сравнению с силами, которые создает поле H, электрон и остов остаются связанными при своем движении, так что весь атом будет прецессировать с промежуточной (между этими двумя) частотой; поэтому в слабых полях возникает одна общая прецессия, и, следовательно, имеет место аномальный эффект Зеемана. Когда же действие поля преобладает над силами между электроном и остовом, каждый из этих элементов будет прецессировать независимо от другого со своей частотой; поскольку же для оптического электрона эта частота является нормальной, то в сильных полях получаем нормальное зеемановское расщепление, т. е. эффект Пашена — Бака. Такая схема не только качественно, но и количественно объясняет основные характеристики наблюдавшегося аномального эффекта Зеемана [3]. Но, несмотря на эти успехи, она обычно считается недостаточной и временной, поскольку не объясняет причины, по которой частота прецессии остова, тоже состоящего из электронов, должна быть вдвое больше нормальной. Другое затруднение теории Ланде состоит в следующем: если R интерпретировать как момент остова, то нужно принять, что его величина совпадает с полным моментом J' иона этого атома, поскольку такой ион как раз и получается при удалении из атома оптического электрона. Но оказывается, что каждому определенному значению J' момента иона могут соответствовать два значения R, отличающиеся от J' на $\pm {}^1/_2$.

Именно для устранения этих трудностей Уленбек и Гаудсмит и предложили гипотезу вращающегося электрона. Заметим, что в теории Ланде интерпретация R как момента остова является несколько произвольной; несмотря на все возникающие при этом трудности, это было сделано, ве-

---

[3] Схема Ланде справедлива лишь в случае так называемых спектров первой ступени. на другие спектры она не обобщается (H. Russel, F. A. Saunders.' Astr. Journ., 1925, 61, 38; W. Heisenberg. Zs. f. Phys., 1925, 32, 841). Для наших целей достаточно ограничиться случаем спектров первой ступени.

роятно, из-за отсутствия других элементов атома, к которым можно было бы отнести R, так как предполагалось априори, что структурой электрона можно пренебречь. Напротив, Уленбек и Гаудсмит именно в этом ищут смысл R; они считают, что электрон вращается вокруг своей оси и обладает, следовательно, как механическим, так и магнитным моментами. Естественно, для системы такого рода отношение магнитного и механического моментов будет зависеть от распределения заряда и массы; чтобы добиться согласия с экспериментальными фактами, принимается, что эти распределения обеспечивают величину отношения, вдвое бóльшую ларморовского. Предполагается, кроме того, что вращательное состояние всех электронов одно и то же и что они различаются лишь разной ориентацией, которая определяется квантованием связей с атомным остатком и с возможными внешними полями. Под R понимается векторная сумма всех моментов электронов в атоме.

Такое объяснение имеет следующие преимущества.

1) Устраняется основная трудность — магнитная аномальность R. В самом деле, поскольку для вращательного движения каждого электрона отношение магнитного и механического моментов вдвое больше ларморовского, во внешнем магнитном поле электрон вынужден будет прецессировать с частотой, вдвое больше нормальной.

2) Становится также понятным, что при добавлении нового электрона к положительному иону и образовании нейтрального атома последний может приобретать, как это и происходит в действительности, разные значения R в зависимости от ориентации этого электрона относительно иона.

3) Вполне объясняется отмеченное Стонером [4] и Паули [5] обстоятельство: они утверждают, что для построения единой схемы последовательного образования элементов, учитывающей их спектроскопические свойства, необходимо приписать электрону дополнительную степень свободы (помимо степеней свободы материальной точки), происхождение которой до сих пор было непонятным.

4) В предшествовавших теориях спектр водорода занимал особое положение в периодической системе; ему было дано объяснение, совершенно отличное от спектров атомов с одним валентным электроном (щелочные металлы). В новой же схеме устанавливается полная аналогия; и действительно, данное в релятивистской теории Зоммерфельда положение термов остается неизменным, их классификация же изменяется [6]. Отсюда следует изменение правил отбора и метода вычисления интенсивностей различных компонент тонкой структуры, которое обеспечивает гораздо лучшее согласие с результатами измерений.

5) Равным образом новая теория объясняет и структуру рентгеновских уровней, в частности, до сих пор не объясненный факт применимости

[4] E. C. Stoner. Phil. Mag., 1924, **48**, 719.

[5] W. Pauli. Zs. f. Phys., 1925, **31**, 765.

[6] G. E. Uhlenbeck, S. Goudsmit. Physica, 1925, 5; 266; A. Sommerfeld, A. Unsöld. Zs. f. Phys., 1926, **36**, 259.

релятивистской формулы для вычисления расщеплений спектральных линий.

Из изложенного здесь видно, что гипотеза вращающегося электрона проливает свет на ряд вопросов теории атома, которые прежде были наиболее неясными. Тем не менее против нее можно выдвинуть различные возражения. Первое из них возникает у самих авторов. Действительно, они исходят из весьма частной модели электрона, рассматривая его как некое распределение заряда по поверхности сферы, масса которого вычисляется так, как если бы она была обусловлена только электростатической энергией заряда; вращательное движение такой системы рассчитывается по обычным правилам квантования ротатора. Таким путем отношение механического и магнитного моментов действительно получается вдвое больше нормального отношения Лармора; однако при этом оказывается, что линейная скорость на экваторе сферы заметно превышает скорость света. Другую трудность гипотезы вращающегося электрона отметил Крониг [7]. Обычно, как он замечает, ядра атомов содержат электроны; исключая частный случай, когда магнитные моменты отдельных электронов компенсируются, ядро должно было бы поэтому обладать результирующим магнитным моментом, который проявлялся бы в связанном с ним парамагнетизме атома; никаких следов этого не найдено.

Однако более серьезное затруднение, чем эти (из которых первое связано с выбором весьма специальной модели электрона, а второе не является непреодолимым, поскольку не составляет особого труда допустить, что магнитные моменты ядерных электронов взаимно компенсируются), возникает из следующих соображений, в значительной мере не зависящих от каких-либо частных предположений о структуре электрона.

Для спектроскопии существенно наличие у вращающегося электрона магнитного момента, равного по порядку величины магнетону Бора. Тогда вокруг электрона существует магнитное поле, которое на расстоянии, много большем линейных размеров структуры электрона, практически будет совпадать с полем обычного точечного диполя; в то же время, если это расстояние порядка линейных размеров структуры электрона, то могут иметь место значительные отклонения. Попробуем получить нижний предел для магнитной энергии электрона, вычисляя ее за пределами сферы, радиус которой R имеет порядок величины линейных размеров электрона, и принимая его поле равным полю точечного диполя.

Напряженность H магнитного поля точечного диполя определяется выражением

$$H^2 = \frac{\mu^2}{r^6}(3\cos^2\theta + 1),$$

в котором r означает расстояние до диполя, θ — полярный угол, а μ — магнитный момент. Следовательно, магнитная энергия, содержащаяся

---

[7] R. de L. Kronig. Nature, 1926, 117, 550.

в элементе объема $d\tau$, равна

$$\frac{H^2}{8\pi}d\tau = \frac{\mu^2}{8\pi r^6}(3\cos^2\theta + 1)\,d\tau. \qquad (1)$$

Энергия W, которая содержится за пределами сферы радиуса R, определяется, таким образом, выражением

$$W = \int_\tau \frac{H^2}{8\pi}d\tau = \frac{\mu^2}{8\pi}\int_0^\pi\int_R^\infty \frac{1}{r^6}(3\cos^2\theta + 1)\,2\pi r^2\sin\theta d\theta dr;$$

выполняя интегрирование, находим

$$W = \frac{\mu^2}{3R^3}.$$

Этой энергии должна соответствовать масса, которая, согласно теории относительности, вычисляется делением W на c^2 (в рамках классической электродинамики получается величина того же порядка). Полная энергия электрона будет, конечно, больше, ибо к предыдущему выражению добавится магнитная энергия, заключенная в сфере радиуса R, а кроме того, и энергия строения электрона.

Найдем теперь нижний предел для массы электрона, полагая μ равным одному магнетону Бора, т. е. $0{,}92\cdot 10^{-20}$:

$$m = \frac{\mu^2}{3c^2R^3}.$$

Вспоминая, что масса электрона равна $0{,}9\cdot 10^{-27}$ *г*, получаем в качестве нижнего предела для радиуса R

$$R = 3{,}3\cdot 10^{-12}. \qquad (2)$$

Это значение примерно раз в 20 больше того, что обычно принимается за радиус электрона. Последний не измерялся в непосредственных опытах, но трудность тем не менее серьезна, поскольку известно, что в ядре содержится весьма значительное число электронов. С другой стороны, линейные размеры ядра известны с достаточной точностью из опытов по отклонению α-частиц, проходящих через вещество, и оказываются порядка 10^{-12} *см*. Эти факты, как видно, находятся в заметном противоречии, если только не предположить, что электрон, становясь частью ядерной структуры, существенно изменяет свои свойства.

Нам кажется, что против предыдущего заключения относительно верхнего предела для радиуса электрона (2) трудно выдвинуть серьезные возражения; чтобы оно было ошибочным, нужно было бы предположить неправомерность вычисления магнитной энергии по формуле (1). Для внутренней области электрона, где само понятие магнитного поля, может

быть, теряет всякий смысл, такое предположение представляется приемлемым; однако гораздо труднее его принять вне этой области. Другим выходом мог бы стать отказ от справедливости релятивистского соотношения между массой и энергией; или же, наконец, предположение, что размеры магнитной структуры значительно больше размеров электрической.

Из этого обсуждения можно, по-видимому, сделать вывод, что несмотря на серьезные энергетические трудности, на которые мы указали, гипотезу вращающегося электрона отвергать не следует. Мы, разумеется, не считаем, что ее надлежит понимать слишком буквально (в том смысле, что нужно действительно представлять себе электрон как некое электрически заряженное микроскопическое тело, вращающееся вокруг своей оси), ибо для приложений существенным является наличие у электрона механического и магнитного моментов — независимо от слишком частных модельных представлений о природе этих моментов.

Во всяком случае, этот вопрос нельзя считать решенным, пока не появятся более прямые экспериментальные данные в подтверждение или против гипотезы вращающегося электрона.

К статье 28

Эта статья демонстрирует очень простое и ясное использование борновской волновой теории столкновений, опубликованной за несколько месяцев до этого. Впоследствии эта статья Ферми была изложена Зоммерфельдом в книге «Строение атома и спектры» («Ergänzungsband», стр. 237, 1928) со следующим комментарием: «Особая элегантность приведенных Ферми примеров состоит в их аналогии с теорией дифракционных решеток, где не требуется каких-либо особых предположений относительно свойств этих решеток (в данном случае о потенциальной энергии V), поскольку не требуется каких либо количественных сведений об относительной интенсивности различных дифракционных картин (в данном случае об эффективности различных упругих и неупругих столкновений)».

Э. Персико

28

О ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКЕ ПРОЦЕССА СТОЛКНОВЕНИЙ *

В этой работе развита теория столкновений материальной точки с ротатором. Эта теория легко может быть сведена к оптической теории дифракционных решеток.

В недавно появившейся статье М. Борн [1] вывел условия применимости волновой механики Шредингера [2] к процессу столкновений. В данной работе мне бы хотелось привести один особенно простой пример столкновения, который, как мне кажется, может послужить некоторому уяснению взглядов на соотношения, характеризующие эти процессы.

Именно, мы исследуем столкновение материальной точки с ротатором, ось которого фиксирована в пространстве.

Чтобы впоследствии можно было воспользоваться наглядным трехмерным представлением, предположим, что сталкивающиеся частицы могут двигаться только в плоскости. Однако обобщение наших рассуждений на случай движения в пространстве будет совершенно очевидным.

Итак, пусть x и y — декартовы координаты материальной точки (начало координат выберем в центре ротатора), а φ — азимут ротатора. Объединим материальную точку и ротатор в единую систему (с тремя

---

* *Zur Wellenmechanik des Stossvorganges.* Zs. Physik, 1926, **40**, 399—402.

[1] M. Born. Zs. f. Phys., 1926, **37**, 863; 1926, **38**, 803.

[2] E. Schrödinger. Ann. d. Phys., 1926, **79**, 361, 489; **80**, 437; **81**, 109. Ср., кроме того, L. de Broglie. Thèse, Paris, 1925.

степенями свободы). За обобщенные координаты такой системы выберем

$$\xi = \sqrt{m}x, \qquad \eta = \sqrt{m}y, \qquad \zeta = \sqrt{J}\varphi,$$

где m — масса материальной точки, J — момент инерции ротатора. Преимуществом такого выбора является то, что в качестве линейного элемента в конфигурационном пространстве можно взять $ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2$, благодаря чему метрика этого пространства оказывается обычной. Волновое уравнение Шредингера в этом случае гласит:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\zeta^2} + \frac{8\pi^2}{h^2}(E - V)\psi = 0. \tag{1}$$

Потенциальная энергия V включает лишь энергию взаимодействия материальной точки и ротатора и обращается в нуль, когда они удалены друг от друга, т. е. отличное от нуля значение V принимает только в окрестности оси ζ; далее, энергия взаимодействия, очевидно, периодически зависит от угла φ (с периодом 2π), т. е. V периодически зависит от ζ (с периодом $2\pi\sqrt{J}$). Равным образом и в нашем случае в качестве граничного условия для ψ нужно положить, согласно Шредингеру, что ψ периодически зависит от φ (с периодом 2π), т. е. с периодом $2\pi\sqrt{J}$ она зависит от ζ.

Чтобы можно было представить себе решение уравнения (1), вспомним об оптической аналогии последнего. В областях, удаленных от оси ζ, где V равно нулю, выражение (1) представляет собой волновое уравнение для оптически однородной среды; в окрестности оси ζ эта среда имеет аномалию показателя преломления, который периодически зависит от ζ. В оптическом смысле такая аномалия есть не что иное, как линейная решетка с периодом $2\pi\sqrt{J}$. Если на нее падает плоская волна, то возникает дифрагировавшее излучение различных порядков; каждый дифракционный порядок, как мы увидим, соответствует различным типам соударений (неупругие столкновения, упругие столкновения, соударения второго рода).

Воспользуемся следующим результатом элементарной теории дифракционных решеток.

Пусть Θ — угол между направлением распространения падающей волны и осью ζ; все направления дифрагировавшего излучения n-го порядка образуют с осью ζ один и тот же угол Θ_n, а именно

$$2\pi\sqrt{J}(\cos\Theta_n - \cos\Theta) = n\lambda. \tag{2}$$

Предположим сначала, что энергия взаимодействия равна нулю, т. е. ограничимся областями, далекими от оси ζ. Для этого случая представим ψ в виде произведения функций $\psi_1(\xi, \eta)$ и $\psi_2(\zeta)$, после чего уравнение (1)

разделяется на два:

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\eta^2}+\frac{8\pi^2}{h^2}E_1\psi_1=0, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\zeta^2}+\frac{8\pi^2}{h^2}E_2\psi_2=0, \qquad (4)$$

где E_1 и E_2 — константы, сумма которых $E_1+E_2=E$. Поскольку в этом случае нет никакого взаимодействия, можно считать E_1 и E_2 энергиями материальной точки и ротатора. Решениями уравнения (4) являются

$$\psi_2=e^{\pm\frac{2\pi i}{h}\sqrt{2E_2}\zeta}. \qquad (5)$$

Поскольку, далее, ψ_2 должна быть периодической функцией ζ (с периодом $2\pi\sqrt{J}$), возникает условие $\frac{1}{h}\sqrt{2E_2}2\pi\sqrt{J}=k$, где k — целое число, т. е.

$$E_2=\frac{h^2k^2}{8\pi^2J} \qquad (6)$$

(квантование ротатора).

Далее, уравнение (3) обладает всюду конечным решением, если $E_1>0$ (кинетическая энергия материальной точки положительна!); в этом случае таким решением будет

$$\psi_1=e^{\pm\frac{2\pi i}{h}\sqrt{2E_1}(\xi\cos\chi+\eta\sin\chi)} \qquad (7)$$

(χ — постоянный угол).

Таким образом, в отсутствие взаимодействия уравнение (1) имеет следующее решение:

$$\psi=\psi_1(\xi,\eta)\psi_2(\zeta)=e^{\pm\frac{2\pi i}{h}\sqrt{2E_1}(\xi\cos\chi+\eta\sin\chi)\pm\frac{2\pi i}{h}\sqrt{2E_2}\zeta}=$$

$$=e^{\pm\frac{2\pi i}{h}\sqrt{2(E_1+E_2)}\{\xi\cos\chi\sin\Theta+\eta\sin\chi\sin\Theta+\zeta\cos\Theta\}}, \qquad (8)$$

где

$$\cos\Theta=\frac{\sqrt{E_2}}{\sqrt{E_1+E_2}},\qquad \sin\Theta=\frac{\sqrt{E_1}}{\sqrt{E_2+E_1}}. \qquad (9)$$

Согласно Борну [1], механический смысл решения (8) соответствует случаю, когда ротатор находится в квантовом состоянии с энергией E_2, а материальная точка движется прямолинейно в направлении, образующем угол χ с осью x, с кинетической энергией E_1. В оптическом же смысле решение (8) представляет собой амплитуду плоской волны в конфигура-

ционном пространстве, длина волны которой

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2(E_1 + E_2)}}, \tag{10}$$

а направляющие косинусы суть $\cos\chi \sin\Theta$, $\sin\chi \sin\Theta$, $\cos\Theta$.

Как отмечалось выше, влияние взаимодействия V в уравнении (1) сказывается в том, что плоская волна будет искривляться, причем отклоненные лучи составляют с осью ζ один из углов Θ_n. Амплитуда отклоненных лучей пропорциональна, следовательно, выражению [с учетом соотношений (2), (6), (9), (10)]:

$$e^{\frac{2\pi i}{\lambda}\{\xi\cos\chi^*\sin\Theta_n + \eta\sin\chi^*\sin\Theta_n + \zeta\cos\Theta_n\}} = e^{\frac{2\pi i}{h}\sqrt{2E_1^*}\,(\xi\cos\chi^* + \eta\sin\chi^*)}\, e^{\frac{2\pi i}{h}\sqrt{2E_2^*}\,\zeta},$$

где

$$\left.\begin{aligned} E_2^* &= \frac{1}{2}\frac{h^2}{\lambda^2}\cos^2\Theta_n = \frac{h^2(n+k)^2}{8\pi^2 J},\\ E_1^* &= \frac{1}{2}\frac{h^2}{\lambda^2}\sin^2\Theta_n = E - E_2^* = E_1 - (E_2^* - E_2). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Если этот результат снова истолковать в механическом смысле, то он будет отвечать следующему.

Ротатор переходит из k-го квантового состояния с энергией E_2 в $(n + k)$-е состояние с энергией $E_2^* = \frac{h^2(n+k)^2}{8\pi^2 J}$. Материальная точка движется в направлении, составляющем с осью x произвольный угол χ^*, а ее энергия равна E_1^*, т. е. ее энергия E_1 уменьшена на величину $E_2^* - E_2$. Но такой процесс есть не что иное, как столкновение, при котором налетающая частица «рассеивается» в произвольном направлении. В дальнейшем нужно различать следующие три случая:

$n = 0$; кинетическая энергия частицы и энергия ротатора остаются неизменными (упругое столкновение);

$n > 0$; за счет кинетической энергии частицы ротатор переходит в квантовое состояние с большей энергией (неупругое столкновение);

$n < 0$; ротатор переходит в состояние с меньшей энергией, а разность энергий проявляется в виде кинетической энергии частицы (удар второго рода).

Согласно Борну, интенсивности рассеянного излучения являются мерой вероятности столкновений различного рода.

К статье 29

Вернувшись из Флоренции в Рим после летнего отпуска 1926 г., Ферми застал своих друзей Понтремоли и Персико за изучением и обсуждением первых работ Шредингера по волновой механике, которые тогда только что появились в «Annalen der Physik». К тому времени он уже глубоко понимал существо этих работ и внес решающий вклад в разъяснение предмета дискуссии. Мы стремились, главным образом, отыскать какую-то, хотя бы и не очень определенную связь столь непривычных идей волновой механики с концепциями, которые еще несколькими месяцами раньше довлели в области атомной физики,— например, с понятиями кинетической и потенциальной энергии электрона, а также адиабатической инвариантности квантовых состояний. В результате одной из таких дискуссий и возникла данная работа, основные идеи которой принадлежат Ферми.

Выражения для $E_{\text{пот}}$ и $E_{\text{кин}}$, которые здесь обосновываются лишь аналогией и без какой бы то ни было детализации их физического смысла, несколько позднее, когда была развита вероятностная интерпретация волновой механики, приобрели точный смысл «математических ожиданий» потенциальной и кинетической энергии.

Э. Персико

29

АДИАБАТИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП И ПОНЯТИЕ ЖИВОЙ СИЛЫ В НОВОЙ ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКЕ *

(Совместно с Э. Персико)

1. Согласно ряду недавних предположений, следствия из которых оказались весьма плодотворными, давно осознанная аналогия между законами механики материальной точки и законами геометрической оптики обусловлена причиной более глубокой и значительной, чем можно было бы предположить до сих пор. Точнее говоря, Э. Шредингер [1] недавно разработал новую механику, опираясь на идею, согласно которой механические явления также обладают волновой природой; он пользовался аналогией с законами геометрической оптики, перестающими действовать в опти-

---

* *Il principio delle adiabatiche e la nozione di forza viva nella nuova meccanica ondulatoria.* (Con E. Persico). Rend. Lincei, 1926, 4(II), 452—457. Представлено членом академии О. М. Корбино на заседании 7 ноября 1926 г.

[1] E. Schrödinger. Ann. d. Phys., 1926, 79, 361, 489, 734: 80, 437; 81, 109.

ческих системах малых размеров, когда необходимо учитывать волновую природу света. По Шредингеру, законы обычной механики являются приближением, справедливым лишь для систем с размерами, большими по сравнению с механической величиной, которая отвечает длине волны, тогда как в случае систем, размеры которых сравнимы с этой длиной, сказываются явления более сложные, аналогичные явлениям оптической дифракции.

Уточнив эту идею, Шредингер сумел естественным и логичным путем достичь таких результатов, какие старая квантовая теория получала с помощью разрозненных и порой противоречивых постулатов, а также строго обосновал новые результаты, которые в старой теории достигались только с помощью принципа соответствия. Такая новая механика была названа волновой механикой.

Цель настоящей работы состоит прежде всего в обобщении адиабатического принципа на волновую механику. В обычной квантовой теории адиабатический принцип утверждает, как известно, что при адиабатическом изменении атомной системы, которая вначале находилась в каком-то квантовом состоянии, она остается на протяжении всего перехода также в квантовом состоянии. В обычной квантовой теории этот принцип находит свое математическое обоснование в одной из теорем аналитической механики (теорема Бюргерса), которая утверждает, что интегралы $\oint pdq$ адиабатически инвариантны. В этой заметке будет показано, что аналогичный принцип можно получить как следствие фундаментальных принципов новой механики. Во второй части работы (раздел 3) классические понятия кинетической и потенциальной энергии будут обобщены на случай волновой механики.

2. Рассмотрим механическую систему с f степенями свободы, на которую действуют силы, обусловленные потенциалом V. Предположим, что эта система находится в определенном квантовом состоянии (k-е состояние), т. е. имеет место всего одна частота колебаний $\nu_k = E_k/h$; при этом скаляр поля [2] ψ, характеризующий состояние системы, определяется равенством

$$\psi = u_k e^{\frac{2\pi i}{h} E_k t}, \tag{1}$$

где u_k есть нормированная k-я собственная функция дифференциального уравнения [3]

$$\Delta u + \frac{8\pi^2}{h^2}(E - V)u = 0, \tag{2}$$

---

[2] Здесь, как и в ряде других статей, Ферми для волновой функции пользуется термином «скаляр поля».— *Прим. ред.*

[3] Как и у Шредингера в его первых работах, в этой работе операторы Δ и grad относятся к пространству, в котором линейным элементом является $ds^2 = 2E_{\text{кин}}dt^2$.— *Прим. ред. итало-амер. издания.*

а E_k — соответствующее собственное значение. Предположим, что все E_k различаются между собой, исключая, таким образом, случай вырожденных систем, к которым адиабатический принцип неприменим. Представим теперь, что система испытывает адиабатическое превращение, т. е. потенциал изменяется от V до V_1; пусть это превращение, однако, происходит бесконечно долго по сравнению с частотой ν_k, с которой изменяется ψ. (Ясно, что к этому можно свести и случай, когда связи системы также изменяются адиабатически.) Покажем, что после такого превращения система все еще обладает одной частотой, а именно k-й (разумеется, отличной от предыдущей), т. е. система по-прежнему находится в k-м квантовом состоянии.

Чтобы показать это, мы можем, очевидно, разложить непрерывное изменение потенциала V в бесконечную последовательность бесконечно малых дискретных изменений δV. Возьмем, например, за δV вариацию потенциала за конечное время T (в предположении бесконечной продолжительности самого превращения она и оказывается бесконечно малой); представим далее, что она происходит в некоторый момент времени, который нужно выбрать в пределах указанного интервала времени *случайным* образом, ибо для применимости адиабатического принципа необходимо отсутствие связи изменений потенциала с собственным движением системы (чтобы исключить резонансные случаи). Выберем T очень большим по сравнению с собственными периодами системы.

Теперь мы рассмотрим, к чему приводит одна из таких вариаций. Ради удобства выберем начальный момент времени в середине интервала T, в пределах которого должна происходить вариация, и пусть τ — есть момент времени, когда она происходит; затем нам нужно взять среднее при изменении τ от $-T/2$ до $+T/2$. Наша задача сводится к доказательству следующего: если до скачка скаляр поля имел форму (1), то после скачка он снова будет обладать всего лишь одной k-й частотой. Те значения, которые различные величины принимают по истечении времени τ, будем отмечать звездочкой; так, например, при $t < \tau$ потенциал будет равен V, а при $t > \tau$ $V^* = V + \delta V$. Собственные функции и собственные значения уравнения (2) также испытывают в момент времени τ резкое изменение, которое можно рассчитать по изменению потенциала с помощью формул, выведенных Шредингером по теории возмущений. Естественно, что, так как δV бесконечно мала, достаточно ограничиться первым приближением. Таким образом, находим

$$u_k^* = u_k + \sum_{1}^{\infty}{}'_i \gamma_{ki} u_i, \qquad E_k^* = E_k + \varepsilon_k,$$

где

$$\gamma_{ki} = \frac{\int \rho u_k u_i \delta V dx}{E_k - E_i}, \qquad \varepsilon_k = \int \rho u_k^2 \delta V dx.$$

(Величины γ и ε являются, очевидно, бесконечно малыми первого порядка, а штрих у знака суммы означает, что в ней отсутствует член, для которого $i = k$.) Обозначения те же, что и у Шредингера.

Решение ψ^* обязательно будет линейной комбинацией частных решений, т. е. будет иметь вид

$$\psi^* = \sum_{1}^{\infty}{}_k\, c_k \overset{*}{u}_k e^{\frac{2\pi i}{h} \overset{*}{E}_k t}.$$

Коэффициенты такой комбинации определяются из условия, что $\psi^* = \psi$ при $t = \tau$ (непрерывность скаляра поля!). Легко проверить, что подобное условие удовлетворяется (с точностью до бесконечно малых высшего порядка), если положить

$$\psi^* = \overset{*}{u}_k e^{\frac{2\pi i}{h}(\overset{*}{E}_k t - \varepsilon_k \tau)} - \sum_{1}^{\infty}{}'_i\, \gamma_{ki} \overset{*}{u}_i e^{\frac{2\pi i}{h}(\overset{*}{E}_i t + [\overset{*}{E}_k - \overset{*}{E}_i]\tau)}.$$

Усредним это выражение по τ в интервале $-\frac{T}{2} < \tau < \frac{T}{2}$. Среднее значение каждой экспоненты, фигурирующей под знаком суммы, равно нулю, поскольку время T предполагается достаточно большим по сравнению с собственными периодами h/E_i системы. Что же касается первого члена в выражении для ψ^*, то заметим, что зависящий от τ множитель $e^{-\frac{2\pi i}{h}\varepsilon_k \tau}$ можно записать с точностью до бесконечно малых высшего порядка, как $1 - \frac{2\pi i}{h}\varepsilon_k \tau$, и, следовательно, его среднее значение между $-T/2$ и $T/2$ равно 1. Поэтому в итоге оказывается, что

$$\psi^* = \overset{*}{u}_k e^{\frac{2\pi i}{h} \overset{*}{E}_k t}.$$

Этим и доказывается адиабатический принцип. Если же, далее, вместо начального решения (1) исходить из более общего

$$\psi = \sum_{1}^{\infty}{}_k\, \lambda_k u_k e^{\frac{2\pi i}{h} E_k t}, \tag{3}$$

то мы пришли бы к заключению, что λ_k не изменяются при адиабатическом превращении системы.

Заметим, кстати, что, в силу однородности уравнения, ψ содержит произвольный постоянный множитель, который мы выберем таким, чтобы $\int \psi\bar{\psi}\rho dx = 1$; при выбранной нормировке это соответствует условию $\sum_{1}^{\infty}{}_k\, \lambda_k^2 = 1$.

3. В случае простого решения (1) приведенное выше выражение для вариации ε_k значения E_k можно, очевидно, представить в форме

$$\varepsilon_k = \int \delta V \psi \bar{\psi} \rho dx,$$

обозначив через $\bar{\psi}$ функцию, комплексно сопряженную ψ. Отсюда естественным образом возникает мысль, что потенциальной энергией системы в данный момент времени следует считать величину

$$E_{\text{пот}} = \int V \psi \bar{\psi} \rho dx. \qquad (4)$$

Это представляется тем более уместным, если вспомнить, что, согласно Шредингеру, в случае отдельного электрона величина $\psi\bar{\psi}$ пропорциональна плотности электричества в каждой точке, и поэтому произведение $V\psi\bar{\psi}$ представляет классическое выражение плотности потенциальной энергии.

Мы будем считать, что потенциальная энергия определяется выражением (4) также и в том случае, когда скаляр поля имеет общую форму (3).

Попытаемся теперь выразить в более удобной форме понятие кинетической энергии. Здесь мы также рассмотрим частный случай; точнее говоря, рассмотрим решение ψ, соответствующее классическому случаю материальной *точки*, на которую не действуют силы ($V = 0$). Это будет решение типа (3), в котором будут представлены только те члены, для которых E_k достаточно близки к значению $^1/_2\, mv^2$ классической кинетической энергии; при этом фазовые соотношения таковы, что результат интерференции равен нулю всюду за исключением некоторой малой области, соответствующей протяженности материальной частицы. Следовательно, функция ψ с достаточной точностью будет удовлетворять уравнению (2), в котором $V = 0$, $E = E_{\text{кин}} = {^1/_2} mv^2$, т. е.

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2}{h^2} E_{\text{кин}} \psi = 0.$$

Умножая это уравнение на $\bar{\psi}\rho dx$ и интегрируя по всему пространству, получаем после несложного интегрирования первого члена по частям

$$-\int \operatorname{grad} \psi \operatorname{grad} \bar{\psi} \rho dx + \frac{8\pi^2}{h^2} E_{\text{кин}} \int \psi \bar{\psi} \rho dx = 0,$$

откуда, предполагая функцию ψ нормированной таким образом, чтобы последний интеграл равнялся 1, находим

$$E_{\text{кин}} = \int \frac{h^2}{8\pi^2} \operatorname{grad} \psi \operatorname{grad} \bar{\psi} \rho dx. \qquad (5)$$

Это соотношение, которое в рассматриваемом частном случае соответствует классическому, мы и будем принимать за общее выражение живой силы.

В обоснование введенных определений мы покажем далее, что для системы в целом сумма определенных таким путем кинетической и потенциальной энергий остается постоянной (закон сохранения энергии). Вычислим величину $E_{\text{пот}} + E_{\text{кин}}$ по формулам (4) и (5), принимая для ψ общее выражение (3). Сразу же находим

$$E_{\text{пот}} + E_{\text{кин}} = \sum_{1}^{\infty}{}_{rs} \lambda_r \lambda_s e^{\frac{2\pi i}{h}(E_r - E_s)t} \int \left\{ V u_r u_s + \frac{h^2}{8\pi^2} \operatorname{grad} u_r \cdot \operatorname{grad} u_s \right\} \rho dx.$$

С помощью теоремы Гаусса этот интеграл преобразуется к виду

$$\int u_r \left\{ V u_s - \frac{h^2}{8\pi^2} \Delta u_s \right\} \rho dx,$$

и если учесть, что u_s удовлетворяет уравнению (2), когда $E = E_s$, то получим

$$E_{\text{пот}} + E_{\text{кин}} = \sum_{1}^{\infty}{}_{rs} \lambda_r \lambda_s e^{\frac{2\pi i}{h}(E_r - E_s)t} E_s \int u_r u_s \rho dx.$$

Поскольку последний интеграл равен 0 или 1 в зависимости от того, имеет ли место $r \neq s$ или $r = s$, находим по определению

$$E_{\text{пот}} + E_{\text{кин}} = \sum_{1}^{\infty}{}_{s} \lambda_s^2 E_s = \text{const}.$$

Таким образом, мы доказали закон сохранения энергии и нашли, кроме того, выражение для полной энергии, соответствующее скаляру поля (3), как функцию коэффициентов λ.

К статье 30

По окончании университета в 1922 г. Ферми, помимо звания физика, получили диплом Высшей нормальной школы в Пизе, защитив работу, в которой со статистической точки зрения исследовалось влияние Юпитера на орбиты комет. Дипломная работа состояла из двух частей; в первой, лемматической по характеру, была дана теорема по теории вероятностей, во второй — эта теорема применялась к астрономической задаче.

При защите дипломной работы некоторые математики — члены комиссии — сделали замечания Ферми по поводу решения одного из уравнений. Быть может, эта критика объясняет, почему, вопреки обычаю, его работа не была опубликована в «Трудах» Пизанской Высшей нормальной школы, хотя, конечно, он получил диплом с отличием.

Впоследствии (1926 г.) Ферми опубликовал с небольшими изменениями лемматическую часть (эта часть приводится ниже.— *Ред.*), а вторая часть осталась неопубликованной.

После смерти Ферми я в течение многих лет безуспешно искал рукопись работы в архиве Пизанской Высшей нормальной школы; наконец, ее нашел в 1959 г. секретарь школы д-р Марио Ненчетти. В настоящее время работа опубликована в Издании редких или неопубликованных трудов «Domus Galilaeana» в Пизе (а также в кн.: E. Fermi. „Collected Papers", v. I, pp. 227—243.— *Ред.*)

Дж. Полвани

30

ОБ ОДНОЙ ФОРМУЛЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ *

Положим, что имеется очень большое число n переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и что для каждой из них известно статистическое распределение, т. е. для каждой из них предполагается известной такая функция $\varphi_i(y_i)$, что величина $\varphi_i(y_i)\,dy_i$ дает вероятность того, что y_i принимает значение в пределах между y_i и $y_i + dy_i$.

Разумеется, имеет место равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(y_i)\,dy_i = 1, \tag{1}$$

выражающее то обстоятельство, что значение y_i заведомо заключено между $-\infty$ и ∞.

---

* *Sopra una formula di calcolo delle probabilità.* Nuovo Cimento, 1926, 3, 313—318.

Допустим далее, что переменные y_i никак не связаны между собой и что среднее значение каждой из них равно нулю, т. е.

$$\bar{y}_i = \int_{-\infty}^{\infty} y_i \varphi_i(y_i)\, dy_i = 0. \tag{2}$$

Положим, наконец, среднее значение квадрата y_i равным

$$\bar{y}_i^2 = \int_{-\infty}^{\infty} y_i^2 \varphi_i(y_i)\, dy_i = K_i^2 \tag{3}$$

и будем считать, что для любого i величина K_i^2 ничтожна по сравнению с $\sum_1^n K_i^2$. В этих предположениях, как известно, выполняется обобщенная формула Лапласа, согласно которой вероятность того, что справедливы неравенства

$$x \leqslant y_1 + y_2 + \ldots + y_n \leqslant x + dx, \tag{4}$$

приближенно выражается величиной $F(x)\, dx$, где

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sum_1^n K_i^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sum_1^n K_i^2}\right). \tag{5}$$

С помощью этой формулы можно сразу же вычислить вероятность того, что

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n \leqslant a. \tag{6}$$

В самом деле, эта вероятность выражается формулой

$$\int_{-\infty}^{a} F(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{a}{\sqrt{2\sum_1^n K_i^2}}} e^{-x^2}\, dx. \tag{7}$$

Вычислим вероятность того, что одновременно имеют силу следующие неравенства:

$$\begin{aligned} y_1 &\leqslant a, \\ y_1 + y_2 &\leqslant a, \\ y_1 + y_2 + y_3 &\leqslant a, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1 + y_2 + \ldots + y_n &\leqslant a. \end{aligned} \tag{8}$$

Оказывается, что такая вероятность приближенно определяется формулой

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{a/\sqrt{2\sum\limits_1^n K_i^2}}^{\infty} e^{-x^2}\,dx, \tag{9}$$

если только a много больше всех K_i.

Поскольку формула (9) находит применение в некоторых областях физики [1] и, насколько нам известно, на нее до сих пор никто не указывал, мы хотим привести здесь ее краткое доказательство [2].

Для этого обозначим через $F(z, x)\,dx$ вероятность того, что первые z неравенств (8) выполняются и, кроме того, имеет место

$$x \leqslant \sum_1^z y_i \leqslant x + dx. \tag{10}$$

Принимая, что $p \leqslant a$, сразу же получаем вероятность того, что первые $z - 1$ неравенств (8) выполняются одновременно и что, кроме того, имеет место неравенство

$$\sum_1^{z-1} y_i < p < \sum_1^z y_i.$$

Эта вероятность дается выражением

$$\int\limits_0^\infty d\xi F(z-1, p-\xi) \int\limits_\xi^\infty \varphi_z(y)\,dy = \int\limits_0^\infty \varphi_z(y)\,dy \int\limits_0^y F(z-1, p-\xi)\,d\xi.$$

Аналогично, вероятность того, что справедливы первые $z - 1$ неравенств (8) и при этом имеет место

$$\sum_1^{z-1} y_i > p > \sum_1^z y_i,$$

---

[1] См., например, следующую статью Дж. Полвани (Nuovo Cimento, 1926, **3**, 319.— *Ред.*).

[2] Данное доказательство аналогично доказательствам обобщенной формулы Лапласа, основанным на замене уравнений в конечных разностях дифференциальными уравнениями; оно справедливо, следовательно, при тех же условиях законности такого метода, которые необходимы в случае формулы Лапласа и которые мы считаем, разумеется, выполненными также и в нашем случае.

есть

$$\int_0^{a-p} d\xi\, F(z-1,\, p+\xi) \int_{-\infty}^{-\xi} \varphi_z(y)\, dy.$$

Разность этих двух вероятностей равна, очевидно, разности вероятностей того, что $\sum_1^{z-1} y_i < p$ и $\sum_1^{z} y_i < p$, причем первые $z-1$ неравенств (8) всегда выполняются. Таким образом, имеет место

$$-\int_{-\infty}^{p} F(z,\, x)\, dx + \int_{-\infty}^{p} F(z-1,\, x)\, dx =$$

$$= \int_0^{\infty} d\xi\, F(z-1,\, p-\xi) \int_{\xi}^{\infty} \varphi_z(y)\, dy - \int_0^{a-p} d\xi\, F(z-1, p+\xi) \int_{-\infty}^{-\xi} \varphi_z(y)\, dy. \quad (11)$$

В рамках сделанных предположений можно заменить разностное уравнение (11) дифференциальным. По этой причине положим, что

$$F(z,\, x) - F(z-1, x) = \frac{\partial F(z,\, x)}{\partial z},$$

$$F(z,\, p \pm \xi) = F(z,\, p) \pm \xi \frac{\partial F(z,\, p)}{\partial p}.$$

Когда $a - p \gg K_i$, соотношение (11) после простых преобразований [с учетом формул (2) и (3)] принимает вид

$$\int_{-\infty}^{p} \frac{\partial F(z,\, x)}{\partial z} dx = \frac{K_z^2}{2} \frac{\partial F(z,\, p)}{\partial p}. \quad (12)$$

Дифференцируя по p и заменяя затем p на x, приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial F(z,\, x)}{\partial z} = \frac{K_z^2}{2} \frac{\partial^2 F(z,\, x)}{\partial x^2}. \quad (13)$$

Чтобы с помощью этого уравнения определить функцию $F(z,\, x)$, нужно найти граничные условия, которым F удовлетворяет. Сразу же заметим, что когда $z = 0$, функция F принимает отличные от нуля значения при бесконечно малых абсолютных значениях x. Однако в этой области ее значение должно быть настолько большим, чтобы выполнялось равенство

$$\int_{-\infty}^{a} F(0,\, x)\, dx = 1. \quad (14)$$

В пределе при $x = -\infty$ должно, кроме того, иметь место

$$F(z, x) = 0. \tag{15}$$

Чтобы найти соответствующее граничное условие в экстремуме $x = a$, заметим, что при $x > 0$ функция $F(z, x)$ равна 0. Поэтому в нашем приближении ($K_i \ll a$) можно положить

$$F(z, a) = 0. \tag{16}$$

Можно легко показать, что эти условия достаточны для полного определения функции $F(z, x)$. Однако до того, как перейти к такому определению $F(z, x)$, удобно заменить переменную z другой переменной

$$t = \sum_1^z K_i^2. \tag{17}$$

В результате такой подстановки уравнение (13) принимает следующую форму (при этом, как обычно, конечные разности заменяются дифференциалами):

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}. \tag{18}$$

Поскольку наши условия достаточны для определения F, следует лишь найти частное решение уравнения (18), удовлетворяющее граничным условиям, чтобы убедиться в том, что оно является искомым решением. Далее, непосредственной проверкой легко установить, что такое решение дается выражением

$$F = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t \frac{u(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left[-\frac{(a-x)^2}{2(t-\tau)}\right], \tag{19}$$

где для краткости мы положили

$$u(\tau) = \frac{a}{\sqrt{2\pi\tau^3}}\exp\left(-\frac{a^2}{2\tau}\right). \tag{20}$$

В частности, функция $F(n, x)$ получается, если в выражение (19) подставить

$$t = \sum_1^n K_i^2. \tag{21}$$

Заметим теперь, что величина $F(n, x)$ представляет вероятность того, что все неравенства (8) справедливы и что, кроме того,

$$x \leqslant y_1 + y_2 + \ldots + y_n \leqslant x + dx.$$

Таким образом, учитывая формулу (19), находим вероятность того, что все неравенства (8) выполняются:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} F(n, x)\, dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{a/\sqrt{2t}}^{\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

Если принять во внимание подстановку (21), то последняя формула оказывается тождественной формуле (9).

Отметим, в частности, случай, когда все K_i равны между собой, и выражение (9) принимает вид

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{a/\sqrt{2nK^2}}^{\infty} e^{-x^2}\, dx, \tag{9*}$$

откуда следует, например, что

$$\lim_{n\to\infty} P = 1.$$

К статье 31

Статья представляет собой одну из ранних попыток Ферми применить квантовую механику. Он показывает, что шредингеровское выражение для средней плотности тока приводит к правильному значению орбитального магнитного момента электрона в центральном потенциальном поле.

По-видимому, это — первая работа Ферми после назначения его профессором теоретической физики Римского университета.

Ф. Разетти

31

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА И МАГНИТНЫЙ МОМЕНТ АТОМА *

В своей недавней работе Э. Шредингер[1] выдвинул гипотезу, связывающую скаляр поля[2] ψ, фигурирующий в его волновой механике, с плотностью электрического тока. Его формулы в случае системы только с одним электроном (j выражается в электромагнитных единицах) сводятся к следующим:

$$\rho = e\psi\bar{\psi}, \tag{1}$$

$$j = \frac{eh}{4\pi i mc}(\psi \operatorname{grad} \bar{\psi} - \bar{\psi} \operatorname{grad} \psi), \tag{2}$$

где ρ и j — соответственно плотность электрического заряда и тока. Скаляр поля нужно нормировать так, чтобы

$$\int \psi \bar{\psi}\, d\tau = 1, \tag{3}$$

где $d\tau$ — элемент объема.

Доводы в пользу такого выражения для ρ следуют из того, что основанные на нем вычисления интенсивности излучения атома согласуются как с экспериментом, так и с результатами квантовой механики Гейзенберга. Выражение (2) для j принимается Шредингером как простейший способ удовлетворить уравнению непрерывности.

---

* *Quantum Mechanics and the Magnetic Moment of Atoms.* Nature (London), 1926, **118**, 876.

[1] E. Schrödinger. Ann. d. Phys., 1926, 81, 109.

[2] См. примечание на стр. 232.— *Прим. ред.*

Желательно поэтому получить еще какие-либо доводы в пользу этого выражения. Я намереваюсь показать, что оно приводит к правильному выражению для магнитного момента водородоподобного атома. При этом будем рассматривать лишь ту часть магнитного момента, которая в старой квантовой теории считалась обусловленной орбитальным движением электрона, и оставим в стороне магнитный момент, обусловленный спином электрона, который может быть рассмотрен отдельно.

Волновое уравнение водородоподобного атома в магнитном поле (без учета спина электрона) было проинтегрировано Фоком [3], и его выражение для ψ можно записать в виде

$$\psi = f(\theta, r)\, e^{in_1\varphi} e^{\frac{2\pi iEt}{h}}, \tag{4}$$

где r, θ, φ — полярные координаты, $f(\theta, r)$ — *вещественная* функция r и θ, а n_1 — целое число, соответствующее магнитному квантовому числу в старой теории.

Из формул (2) и (4) легко видеть, что j представляет собой вектор, который в каждой точке перпендикулярен плоскости, проходящей через эту точку и полярную ось, и величина которого есть

$$j = \frac{he}{4\pi imc}\frac{1}{R}\left(\psi\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\varphi} - \bar{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right) = -\frac{he}{2\pi mc\,R}\,n_1 f^2, \tag{5}$$

где R — расстояние от оси до этой точки. Линиями тока являются окружности, расположенные в плоскостях, перпендикулярных этой оси, и с центрами на этой же оси.

Рассмотрим теперь ток, протекающий через элемент $d\sigma$ меридиональной плоскости; его сила есть $jd\sigma$, а контуром будет окружность радиуса R. Магнитный момент этого тока равен, таким образом, $\pi R^2 jd\sigma$ (в направлении поля).

Если подставить для j выражение (5), то магнитный момент атома принимает вид

$$\mu = \pi\int R^2 jd\sigma = -\frac{hen_1}{2mc}\int Rf^2\,d\sigma. \tag{6}$$

Последний интеграл можно вычислить, подставляя выражение (4) для ψ в соотношение (3) и замечая, что $d\tau = 2\pi Rd\sigma$; после этого находим, что $2\pi\int Rf^2\,d\sigma = 1$. И, наконец, подставляя это значение в формулу (6), получаем

$$\mu = -\frac{he}{4\pi mc}\,n_1. \tag{7}$$

[3] В. А. Фок. Zeit. f. Phys., 1926, 28, 242.

Таким образом, как и ожидалось, компонента магнитного момента в направлении магнитного поля есть произведение магнетона Бора $\left(-\frac{he}{4\pi mc}\right)$ и магнитного квантового числа n_1.

Стоит заметить, что магнитный момент (7) некоторым образом возникает благодаря действию поля. В отсутствие магнитного поля два состояния с n_1, равными по абсолютной величине, но противоположного знака, обладают одинаковой энергией; любая линейная комбинация этих двух состояний является, следовательно, неким квантовым состоянием. Далее, из выражения (4) легко видеть, что эти два состояния можно скомбинировать таким образом, чтобы ψ стала произведением $e^{2\pi i \frac{E}{h} t}$ и вещественной функции переменных r, θ, φ (содержащей в качестве множителя $\cos n_1\varphi$ или $\sin n_1\varphi$). В этом случае плотность тока j всюду устремилась бы к нулю и магнитный момент обратился бы в нуль.

Физический институт Римского университета,
Рим, 14 ноября 1926 г.

1927

К статье 32

Эта статья описывает проверку больцмановского распределения атомов таллия по основному и первому возбужденному состояниям.

Для такой проверки Ферми предложил использовать освоенную ранее Разетти методику измерений аномальной дисперсии в газах, поскольку имевшиеся эксперименты, основанные на измерении поглощения, не очень-то хорошо поддавались количественной обработке.

Несмотря на то, что результаты не достигли высокой точности (больцмановский фактор согласуется с теоретическим значением лишь в пределах 20%), этот эксперимент можно считать первой количественной проверкой формулы Больцмана для распределения находящихся в тепловом равновесии атомов по разным энергетическим уровням.

Это — первая экспериментальная работа, выполненная Ферми в Риме.

Ф. Разетти

32

ИЗМЕРЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ h/k ПО АНОМАЛЬНОЙ ДИСПЕРСИИ ПАРОВ ТАЛЛИЯ *

(Совместно с Ф. Разетти)

При различных температурах измерено отношение коэффициентов аномальной дисперсии линий таллия с $\lambda = 3776$ и 5350. Эти измерения подтверждают больцмановский закон для равновесия между двумя низшими состояниями таллия 6^2P_1 и 6^2P_2. С ошибкой 20% измерено отношение h/k.

Как известно, в квантовой теории принято больцмановское распределение следующего вида:

$$n_i/n_l = (p_i/p_l)\cdot e^{-\frac{w_i-w_l}{kT}} = (p_i/p_l)\cdot e^{-\frac{h\Delta\nu}{kT}}, \qquad (1)$$

где n_i и n_l — плотности атомов в состояниях i и l; p_i и p_l, w_i и w_l — соответственно статистические веса и энергии обоих состояний; $\Delta\nu = (w_i - w_l)/h$ представляет собой разность соответствующих термов.

Цель данной работы состоит в количественном подтверждении закона (1); при этом, конечно, измеряется также и отношение h/k.

---

* *Eine Messung des Verhältnisses h/k durch die anomale Dispersion des Thalliumdampfes.* (Mit F. Rasetti). Zs. f. Phys., 1927, 43, 379—383.

В качестве косвенных подтверждений закона Больцмана следует отметить поведение удельной теплоемкости твердых тел и водорода при низких температурах, распределение интенсивности в полосатых спектрах, а также спектроскопическое определение парамагнетизма некоторых ионов.

Кроме того, закон (1) качественно подтверждается следующим много раз наблюдавшимся фактом: при высоких температурах пары поглощают излучение, соответствующее спектральным линиям, которые при низких температурах проявляются только в спектрах испускания; очень часто это можно наблюдать в дуговом спектре. Более тщательные опыты с нагреваемой трубкой, содержавшей пары таллия, поставил В. Гротриан [1]. Низшим термом таллия является дублет; разность волновых чисел соответствующих уровней 6^2P_1 и 6^2P_2 равна 7792; при низких температурах почти все атомы будут находиться в основном состоянии 6^2P_1, а при высоких — частично и в состоянии 6^2P_2. В холодных парах могут наблюдаться в спектрах поглощения только такие линии, которые соответствуют переходам из основного состояния 6^2P_1 (так, например, линия $6^2P_1 - 7^2S_1$, $\lambda = 3776$); в горячих парах появятся также линии поглощения, связанные с состоянием 6^2P_2 (например, зеленая линия $6^2P_2 - 7^2S_1$, $\lambda = 5350$). Гротриану удалось на опыте наблюдать это явление.

Наша работа также проведена с таллием. Однако для количественного подтверждения закона (1) больше подходит измерение аномальной дисперсии, нежели измерение поглощения. Отношение d_1/d_2 коэффициентов аномальной дисперсии для линий $\lambda = 3776$ и $\lambda = 5350$ пропорционально отношению n_1/n_2 плотностей атомов в состояниях 6^2P_1, 6^2P_2; поэтому нужно ожидать, что

$$d_1/d_2 = Ae^{\frac{h\Delta\nu}{kT}}, \qquad (2)$$

где A — константа.

Для измерения аномальной дисперсии мы воспользовались обычным интерференционным методом Пуччанти. Оба интерферирующих луча в интерферометре Жамена проходят через две кварцевые трубки, концы которых были закрыты стеклянными пластинками. Виток нихромовой проволоки позволял нагревать одну из трубок до 1250° С. В ней находился образец таллия; при давлении воздуха в несколько сантиметров ртутного столба скорость дистилляции была столь мала, что переход таллия к холодным концам трубки занимал около часа.

Для определения температуры измерялась энергия, потребляемая электрической печкой; ранее с помощью платино-платинородиевого термоэлемента, откалиброванного в Государственной физико-технической палате, температура в стационарном состоянии была определена в зависимости от этой энергии.

---

[1] W. Grotrian. Zs. f. Phys., 1922, **12**, 218.

Интерференционные полосы фокусировались на щель спектрографа Хильгера с фокусным расстоянием 3 *м*. В окрестности зеленой линии дисперсия составляла 5,73 Å/*мм*. На эту щель попадал не весь свет; часть его, отраженная от стеклянной пластинки, фокусировалась на щель второго, кварцевого спектрографа Хильгера с целью определения аномальной дисперсии в окрестности линии $\lambda = 3776$, где дисперсия составила 10,5 Å/*мм*.

Зеленая линия фотографировалась пластинкой Хауффа — Флавена; при одновременном определении аномальной дисперсии обеих линий время экспозиции составляло от двух до трех минут (в качестве источника света использовалась дуговая лампа).

Таким путем были сфотографированы дисперсионные картины при шести различных температурах. На рис. 1 дается пример аномальной дисперсии обеих линий, которая измерялась при 1070° С. Картина аномальной дисперсии зеленой линии увеличена при репродукции примерно вдвое.

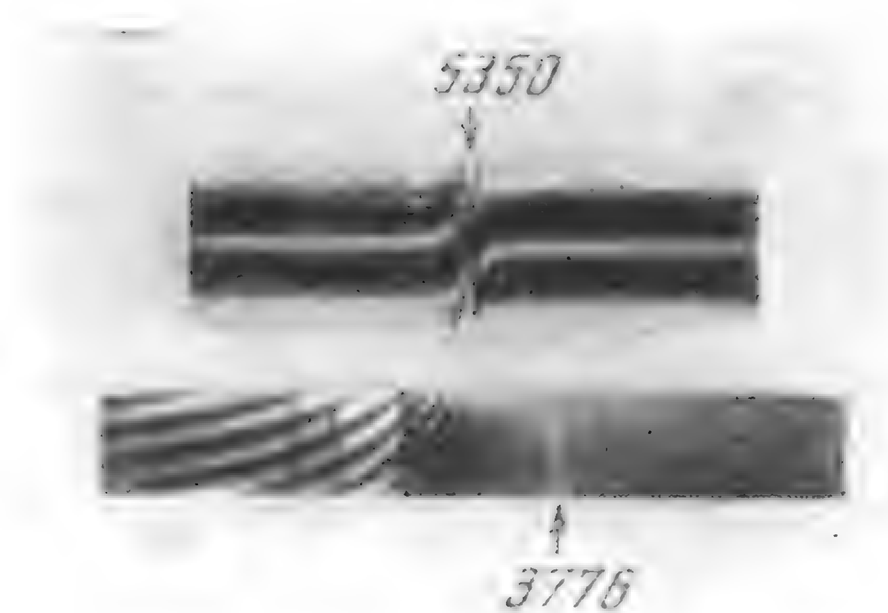


Рис. 1

Для удобства измерения дисперсии было предусмотрено, чтобы полосы на большом расстоянии от линий поглощения были горизонтальны; так проводились измерения для линии 3776, при которых определялись расстояния от линии до точек пересечения следующих друг за другом полос с горизонтальной прямой. Легко понять, что обратные величины этих расстояний составляют арифметическую прогрессию, разность которой обратна коэффициенту d_1 аномальной дисперсии. Согласно классической теории дисперсии, этот коэффициент зависит от плотности N_1 дисперсионных электронов и толщины l слоя паров по следующей формуле:

$$N_1 l = \frac{4\pi mc^2}{e^2} \frac{d_1}{\lambda_1} = 4{,}54 \cdot 10^{21} \frac{d_1 \text{Å}}{\lambda_1^2 \text{Å}} . \qquad (3)$$

Соответствующий коэффициент d_2 аномальной дисперсии зеленой линии можно измерить просто как расстояние до той линии поглощения, для которой наблюдается сдвиг всей полосы.

Результаты измерений даны в следующей таблице:

$T_{погл}$	d_1, Å	d_2, Å	d_1/d_2	$T_{погл}$	d_1, Å	d_2, Å	d_1/d_2
1281	254	0,26 *	978 *	1433	960	2,09	459
1343	552	0,72	768	1463	1680	3,85	436
1383	656	1,03	637	1496	2100	5,01 *	419 *

Значения, отмеченные звездочкой, относятся к случаям минимальной и максимальной температур и являются менее точными по сравнению с другими, так как в одном случае дисперсия зеленой линии была очень мала, а в другом — полосы оказались размазанными (вследствие неизбежных при высоких температурах конвективных токов внутри трубки). Из выражения (2) можно получить, что

$$\lg d_1/d_2 = \lg A + 0{,}4343\,\frac{h\Delta\nu}{k}\,\frac{1}{T}\,. \tag{4}$$

На графике (см. рис. 2) по оси абсцисс отложены обратные значения абсолютной температуры, а по оси ординат — $\lg d_1/d_2$. Исходя из формулы (4), можно ожидать, что точки лежат на прямой.

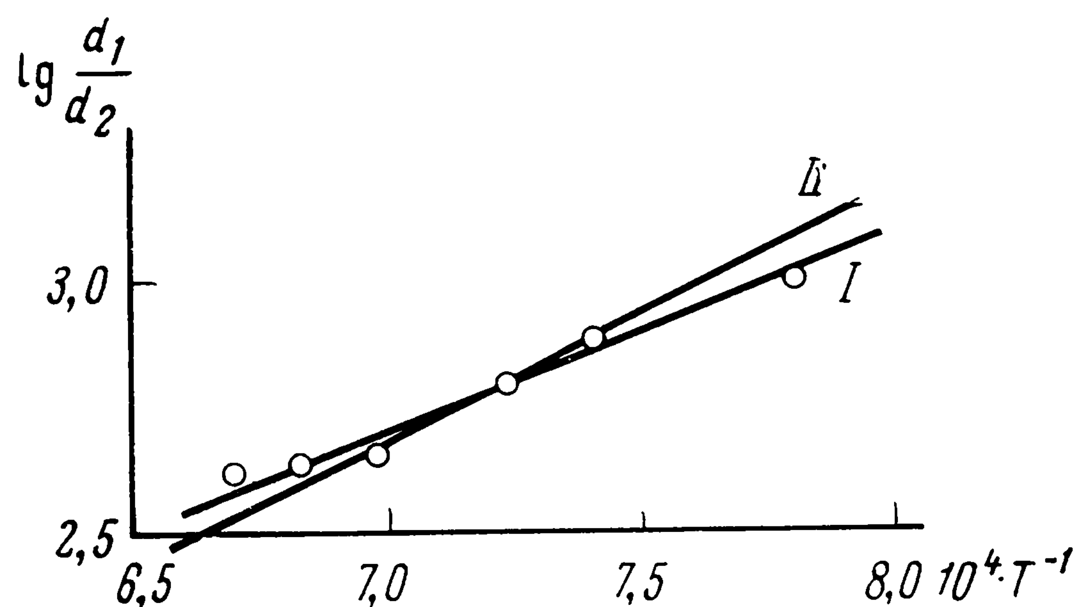


Рис. 2

Отметим, что ошибка в измерении температуры может составить до 10°. Поэтому ясно, что отклонения точек от прямой меньше, чем ошибки измерений. Прямая I на графике получена из экспериментальных данных методом наименьших квадратов. В силу причин, указанных выше, измерениям при крайних температурах приписан вес $^1/_3$. Согласно формуле (4), наклон этой прямой должен равняться $0{,}4343\cdot h\Delta\nu/k$; из наших измерений получается значение

$$h\Delta\nu/k = 9{,}1\cdot 10^3.$$

Поскольку же $\Delta\nu = 7792$, то

$$h/k = 3{,}9 \cdot 10^{-11}.$$

Истинное же значение этого отношения равно

$$h/k = 4{,}8 \cdot 10^{-11}.$$

Ошибка наших измерений составляет, следовательно, меньше 20%, что является удовлетворительным, если учесть характер применявшегося метода.

Наклон прямой *II* на рис. 2 отвечает истинной величине отношения h/k. Ей соответствует уравнение

$$d_1/d_2 = 0{,}22\, e^{11200/T}.$$

Возможная ошибка в значении коэффициента 0,22 составляет $\pm 0{,}04$. Отсюда, а также из формулы (3) и соответствующих выражений для N_2 и d_2, следует, что

$$N_1/N_2 = (0{,}44 \pm 0{,}08)\, e^{11200/T}.$$

Если учесть, что отношение p_1/p_2 статистических весов состояний 6^2P_1 и 6^2P_2 равно $^1/_2$, то в пределах точности наших экспериментов число дисперсионных электронов в обоих состояниях оказывается одинаковым.

Можно также указать нижний предел абсолютного значения этого числа, предполагая, что вся та часть трубки, которая находится в электрической печке, заполнена насыщенными парами при заданной температуре. Находим

$$N_1/n_1 = N_2/n_2 > {}^1/_{10}.$$

Действительное значение вполне может оказаться вдвое бо́льшим или даже еще более высоким.

Воспользуемся этой возможностью для того, чтобы исправить некоторые результаты Макленнана [2], касающиеся величины показателя преломления паров таллия. По данным этого автора, уже при температуре 540° С удельная рефракция паров таллия должна быть того же порядка величины, что и для воздуха при атмосферном давлении; если учесть плотность паров таллия при этой температуре (около $^1/_{1000}$ *мм*), то этот факт соответствовал бы примерно в 100 000 раз большей атомной рефракции, чем в случае паров обычных металлов. Из наших же измерений следует нормальное значение рефракции. Кроме того, Макленнан приводит кривую дисперсии, которая совершенно не согласуется с формой интерференционных полос в наших опытах.

Физический институт Римского университета

---

[2] MacLennan. Proc. Roy. Soc., 1922, **100**, 191.

К статье 33

Эта статья рассчитана на инженеров и физиков, мало знакомых с описываемыми эффектами, и представлена здесь в качестве примера полупопулярных выступлений Ферми.

Б. Понтекорво

33

ЭЛЕКТРО- И МАГНИТООПТИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ И ИХ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ *

Введение

Как показывает история естественных наук, наибольшие успехи в развитии наших фундаментальных представлений очень часто были связаны с объединением областей, ранее считавшихся совершенно различными. Так, кинетическая теория материи, представившая тепло как проявление механических движений молекул, позволила достичь глубокого понимания законов термодинамики, которая и интерпретируется как механика такого огромного числа тел, что к ней можно применить статистические законы. Так, открытие вольтова столба, обнаружившее впервые близкую связь между электрическими и химическими явлениями, было отправным пунктом учения об электрохимических процессах, которое оказалось очень плодотворным и для чистой химии, и для физики строения вещества.

Еще одной областью соприкосновения двух разделов физики является магнито- и электрооптика, т. е. изучение оптических процессов, которые наблюдаются в тех случаях, когда светящееся вещество или тело, через которое распространяется свет, находятся в электрическом или магнитном поле. То, что присутствие электрического или магнитного поля будет влиять на оптические явления, совершенно понятно сегодня при современных представлениях о природе света и структуре материи. В самом деле, уже доказано, что мельчайшими элементами материи являются частицы, часть которых заряжена положительно (ядра и протоны), а часть — отрицательно (электроны). Именно эти частицы своими движениями обусловливают испускание электромагнитных волн, которыми и является свет, и определяют характеристики его распространения через вещество. Итак, силы, обусловленные внешними электрическими или магнитными полями, изменяя движения таких частиц, будут влиять и на

---

* *Gli effetti elettro e magnetoottici e le loro interpretazioni*. Специальный выпуск журнала «L'Energia Elettrica», посвященный 100-летию со дня смерти А. Вольта. UNFIEL, Roma, 1927, 109—120.

световые явления. Интересно заметить, однако, что первое магнитооптическое явление было открыто Фарадеем в 1845 г., т. е. за тридцать лет до утверждения электромагнитной теории света и до начала формирования конкретных представлений об электрической структуре материи. Таким образом, эти явления были одним из первых импульсов, побудивших искать тесную связь между светом и электричеством, с одной стороны, и между электричеством и материей, с другой; они и сегодня дают нам очень мощное средство для изучения структуры атомов и молекул. Прежде чем перейти к систематическому изложению электро- и магнитооптических явлений, хотелось бы дать общее представление об их развитии.

Первые конкретные идеи о возможном влиянии магнетизма на распространение света, видимо, принадлежат Гершелю, который проводил некоторые эксперименты, хотя и безуспешные, с целью обнаружения эффектов этого типа. Фарадей длительное время изучал тот же самый вопрос и после многочисленных попыток в 1845 г. открыл эффект, носящий ныне его имя. Если направить пучок линейно поляризованного света на прозрачное изотропное тело, находящееся в магнитном поле, так чтобы силовые линии были параллельны направлению распространения света, то плоскость поляризации прошедшего через тело света поворачивается вокруг направления распространения света.

Эффект Фарадея в какой-то мере аналогичен явлению, открытому 30 лет спустя Керром, который показал, что поляризация света изменяется при отражении от зеркальной поверхности сильно намагниченного железа (магнитооптический эффект Керра). В это время уже началось развитие спектроскопии и была уже поставлена проблема: не может ли магнитное поле влиять на частоты спектральных линий светящегося газа? В 1896 г. Зееман показал, что спектральные линии света, испускаемого пара́ми, в магнитном поле расщепляются на то или иное число компонент, расстояние между которыми увеличивается с возрастанием магнитного поля. Почти одновременно Лоренцу удалось развить теорию, позволившую интерпретировать основные характеристики явления. Особое значение этой теории состоит в доказательстве того, что электрически заряженные частицы, движения которых обусловливают испускание света, являются теми же самыми электронами, из которых состоят и катодные лучи. Экспериментальное и теоретическое изучение эффекта Зеемана интенсивно продолжается до сих пор; он и сегодня составляет один из самых мощных методов спектроскопических исследований. Два года спустя Макалузо и Корбино открыли явление, которое может рассматриваться как «мост» между эффектами Фарадея и Зеемана и состоит в очень интенсивном магнитном вращении плоскости поляризации, наблюдающемся в пара́х при частотах, близких к частотам линий поглощения.

Последний тип магнитооптического явления — магнитное двойкопреломление — был открыт Коттоном, который показал, что изотропное тело, помещенное в магнитное поле, становится двоякопреломляющим и обладает поведением, аналогичным поведению одноосного кристалла

с осью, параллельной направлению поля. Помимо этих магнитооптических явлений, наблюдаются и электрооптические эффекты. Следует, однако, заметить, что разные свойства симметрии электрического и магнитного поля (полярная симметрия для электрического поля и аксиальная для магнитного) приводят к тому, что не следует ожидать электрического аналога магнитной вращательной способности. Поэтому электрооптические явления, по существу, сводятся к двум типам: электрооптический эффект Керра — электрический аналог магнитного двойного преломления и эффект Штарка — электрический аналог эффекта Зеемана, состоящий в расщеплении спектральных линий в интенсивном электрическом поле.

Теоретические основы магнитооптики

Влияние магнитного поля на оптические явления, в конечном счете, связано с воздействием на заряженные частицы сил, обусловленных магнитным полем. Магнитное поле **H** действует на частицу с зарядом e, движущуюся со скоростью **V**, с силой, которая в векторном обозначении дается выражением

$$\frac{e}{c}\mathbf{V}\times\mathbf{H}. \qquad (1)$$

Простая теорема, принадлежащая Лармору, позволяет оценить влияние силы типа (1) на движение системы частиц, имеющих одинаковый заряд e и массу m и находящихся под действием (кроме кулоновских сил) только одной центральной силы (к такому типу принадлежит фактически большинство атомных систем). Рассмотрим такую систему в отсутствие магнитного поля и отнесем ее движение не к покоящимся осям координат, а к системе трех осей с началом в центре силового поля, вращающейся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг оси, проходящей через тот же центр. Движение системы частиц по отношению к вращающимся осям, как известно, можно описать как движение по отношению к покоящимся осям, если только можно допустить, что на каждую частицу, кроме уже имеющихся, действуют также центробежные силы $m\omega^2 r$ (здесь r — расстояние точки от оси вращения) и кориолисовы силы, имеющие вид

$$2m\mathbf{V}\times\boldsymbol{\omega}. \qquad (2)$$

Если угловая скорость ω достаточно мала, так что ее квадратом можно пренебречь, то центробежные силы можно не учитывать; тогда, кроме действующих на частицы системы сил, следует рассматривать только кориолисовы силы (2). Далее, сравним движение системы частиц в отсутствие магнитного поля с движением при наличии магнитного поля и отнесем первое движение к осям, вращающимся с угловой скоростью ω, а второе — к неподвижным осям. В первом случае на частицы системы будут действовать кориолисовы силы (2), во втором случае — электромагнитные силы (1).

Сразу же видно, что, если положить

$$\omega = \frac{e}{2mc} H, \tag{3}$$

то силы (1) и (2) совпадают и поэтому будут совпадать и два рассматриваемых движения. Итак, приходим к теореме Лармора:

Влияние внешнего магнитного поля на движение материальных точек, имеющих одинаковый заряд e и одинаковую массу m и подверженных действию только центральной силы (кроме сил взаимного отталкивания), сводится к равномерной прецессии всей системы вокруг направления магнитного поля с угловой скоростью (3) (ларморовская прецессия).

Частота, соответствующая угловой скорости (3), т. е.

$$\nu_L = \frac{eH}{4\pi mc}, \tag{4}$$

и называется ларморовской частотой.

Заметим еще, что система движущихся электрических зарядов благодаря этому движению будет окружена магнитным полем, так что она будет вести себя как маленький магнит. Если к системе применима теорема Лармора, то магнитный момент μ связан довольно простым соотношением с моментом количества движения p системы, а именно

$$\mu = \frac{ep}{2mc}. \tag{5}$$

Механизм испускания света

Испускание света раскаленным или вообще светящимся телом зависит от движения электрических частиц, содержащихся в нем. Однако идеи о конкретном механизме испускания изменялись с течением времени. Когда возникла электронная теория материи, считалось, что в телах содержатся электрические частицы, удерживаемые в равновесном положении упругими силами. Если одна из этих частиц выходит из положения равновесия, то она начинает изохронно колебаться около этого положения и, следовательно, излучать в пространство электромагнитную энергию, имеющую частоту таких колебаний. Впоследствии эта теория была отвергнута и заменена теорией атома Бора. Согласно этой теории, атом состоит из положительно заряженного ядра, в котором сконцентрирована практически вся масса атома и которое поэтому неподвижно (если, конечно, не движется атом как целое), и некоторого числа отрицательных электронов, неотличимых друг от друга, которые вращаются вокруг него. Таким образом, атом напоминает миниатюрную планетную систему, в которой ядро выполняет функцию Солнца, а электроны — планет. Согласно Бору, электроны описывают механически возможные орбиты; однако из всех механически возможных движений они могут воспроизвести только дискретную последовательность движений (так называемых стационарных или

квантовых состояний), а процесс испускания связан с переходом атома из одного стационарного состояния в другое. Кстати, природа перехода совсем непонятна с точки зрения классической электродинамики. Разность энергий двух стационарных состояний обычно испускается атомом в виде излучения, частоту которого можно рассчитать, разделив эту разность на универсальную постоянную h (постоянную Планка).

Несмотря на большое различие между механизмами излучения по теории Бора и классической теории, они все же имеют много общего. Более того, справедлив так называемый принцип соответствия Бора, утверждающий, что в первом приближении излучение атома, ожидаемое на основе квантовых принципов, совпадает с излучением, которое система испускала бы согласно классической электродинамике. Этот принцип частично оправдывает тот факт, что целый ряд заключений, выведенных при рассмотрении излучения классического осциллятора, остается вообще справедливым. Это происходит, в частности, в случае эффекта Зеемана: значительная часть результатов теории, предложенной Лоренцом на основе рассмотрения излучения гармонического осциллятора, вновь получается в теории Бора.

Эффект Зеемана

По этой причине при описании эффекта Зеемана вначале мы используем простую модель Лоренца, указав, какие именно результаты теории согласуются с опытом, а какие нет. Для этого рассмотрим движение электрической частицы с зарядом e и массой m, которая с силой, пропорциональной расстоянию, притягивается к неподвижной точке O (начало координат) и, кроме того, испытывает действие магнитного поля H, направление которого предполагается параллельным направлению оси z. Обозначим через ν_0 собственную частоту осциллятора в отсутствие магнитного поля. Согласно теореме Лармора, действие поля приводит к равномерному вращению с частотой (4) всей системы вокруг оси z. Движение невозмущенного осциллятора всегда можно разложить на три: одно — линейное колебание параллельно оси z, а два других — круговые вращения в плоскости, параллельной плоскости xy, из которых одно — в направлении по часовой стрелке, а другое — против часовой стрелки. Ларморовская прецессия, очевидно, не меняет первого из этих движений; частоты же двух круговых движений изменяются, потому что ларморовская частота складывается с собственной частотой для кругового движения по часовой стрелке и вычитается из нее для движения против часовой стрелки. Итак, под влиянием поля движение осциллятора распадается на:

а) линейное колебание с частотой ν_0, параллельное оси z;

б) круговое движение по часовой стрелке с частотой $\nu_0 + \nu_L$, параллельное плоскости xy;

в) круговое движение против часовой стрелки с частотой $\nu_0 - \nu_L$, параллельное плоскости xy.

Рассмотрим теперь оптический эффект этого разложения движения осциллятора. Здесь дело обстоит по-разному в зависимости от направления наблюдения испускаемого осциллятором света. Два самых типичных случая соответствуют наблюдению в продольном направлении, т. е. параллельно магнитному полю и, следовательно, оси z, и в поперечном направлении, т. е. перпендикулярно магнитному полю.

Наблюдатель, расположенный на большом расстоянии от начала координат в точке на оси z, не увидит движения, параллельного направлению наблюдения, а обнаружит только два круговых движения «б» и «в». Поэтому свет, испускаемый в продольном направлении под влиянием магнитного поля, будет расщеплен на две компоненты с частотами $\nu_0 + \nu_L$ и $\nu_0 - \nu_L$, поляризованные по кругу в противоположных направлениях.

«Поперечный» же наблюдатель, находящийся на оси x, будет видеть движение «а» полностью, в то время как проекции двух круговых движений «б» и «в» будут представляться ему как два линейных колебательных движения, параллельных оси y. Итак, свет, испускаемый в поперечном направлении, окажется расщепленным на три линейно поляризованные компоненты: одна — в направлении, параллельном полю [1], с частотой ν_0 невозмущенной линии, а две других — в направлении, перпендикулярном полю, с частотами $\nu_0 + \nu_L$ и $\nu_0 - \nu_L$. При наблюдении в наклонном направлении компонента «а» всегда появляется как линейно поляризованная, компоненты же «б» и «в» — как эллиптически поляризованные. Прежде чем сравнивать эту теорию с опытом, следует дать представление о порядке величины эффекта. Подставляя в формулу (4) вместо e, m, c их численные значения для электрона и полагая $H = 50\,000$ *гс* (трудно достигаемое в настоящее время значение магнитного поля), находим $\nu_L = 7 \cdot 10^{10}$; поэтому для света с длиной волны 5 000 Å смещение крайних компонент от невозмущенной линии составляет приблизительно 0,58 Å.

Итак, даже при очень сильных магнитных полях предсказанный эффект очень мал, и для его наблюдения требуются спектральные средства достаточно высокой разрешающей способности и спектральные линии с малой естественной шириной.

В первых опытах Зеемана с помощью решетки исследовался свет, испускаемый натриевым пламенем, которое располагалось между полюсами мощного электромагнита. Продольные наблюдения осуществлялись через отверстие в полюсах, а поперечные — прямо через зазор. В первой оригинальной установке Зеемана разрешающая способность не была достаточной для того, чтобы обнаружить расщепление линий на компоненты. Зееману удалось только обнаружить, что линия уширяется под влиянием поля и что при наблюдении вдоль поля ее края были поляризованы

---

[1] В соответствии с удачным предложением, используемым в большинстве последних работ, за плоскость поляризации света принимается плоскость колебаний электрического вектора, а не плоскость магнитного вектора, как обычно принималось ранее.

по кругу в противоположных направлениях. Наблюдение же поперек поля обнаруживало, что центральная часть линии поляризована параллельно магнитному полю, а краевые части — перпендикулярно к нему. Однако уже из этих первых результатов Зееман сумел заключить, что порядок величины уширения и общие качественные характеристики явления согласуются с предсказаниями теории Лоренца, если только предположить, что колеблющиеся электрические частицы имеют отрицательный заряд и массу в несколько тысяч раз меньше атомных масс.

Нормальный и аномальный эффект Зеемана

Вскоре экспериментальные средства для изучения эффекта Зеемана были усовершенствованы, так что стало возможным наблюдать отдельные компоненты, на которые расщепляется спектральная линия под влиянием магнитного поля. Итак, было найдено, что некоторые линии обнаруживают эффект Зеемана, похожий на предсказанный теорией Лоренца (нормальный эффект Зеемана), другие же линии обнаруживают более сложное расщепление на компоненты, получившее общее название аномального эффекта Зеемана. В общем случае простые линии демонстрируют нормальный эффект Зеемана, в то время как принадлежащие мультиплету (дублету, триплету и т. д.) линии — аномальный эффект. Так, например, линии бальмеровской серии водорода имеют нормальный эффект, в то время как линии D_1 и D_2 натрия, образующие дублет, дают аномальный эффект; точнее, при наблюдении поперек поля линия D_1 расщепляется на четыре компоненты: две — поляризованные параллельно полю, и две — перпендикулярно; линия D_2 расщепляется на шесть компонент: две — поляризованные параллельно полю и четыре — перпендикулярно. Другие линии могут расщепляться и на большее число компонент. Примеры различных типов эффекта Зеемана приведены на рис. 1.

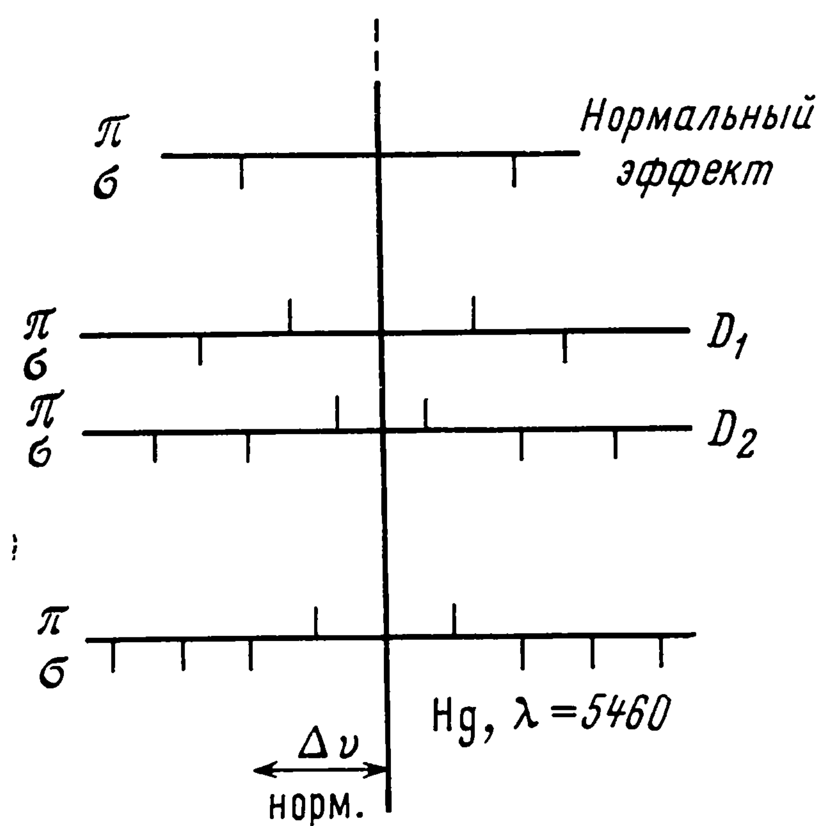


Рис. 1

Способ расщепления спектральной линии под влиянием магнитного поля тесно связан со спектральной серией, которой принадлежит линия. Это положение, полезное для практической спектроскопии, было осознано сразу же после открытия Зеемана. Действительно, Престон установил правило, согласно которому линии, принадлежащие одной спектральной серии, обнаруживают тот же самый тип эффекта Зеемана. Аналогично, тот же самый тип эффекта Зеемана демонстрируют гомологичные

линии различных химических элементов, принадлежащих одному вертикальному столбцу периодической системы Менделеева (правило Престона).

Фогту принадлежит первая теория аномального эффекта Зеемана, основанная на расчете магнитного возмущения системы из двух осцилляторов. Такая теория дала для дублетных спектров результаты, согласующиеся с опытом в случае линий D натрия; однако мы уже знаем, что такое согласие более или менее случайно, и поэтому теории Фогта следует приписать только феноменологическую ценность.

Квантовая теория эффекта Зеемана

Чтобы составить представление о современных идеях, позволяющих интерпретировать нормальный и аномальный эффекты Зеемана, следует исходить из квантовой теории и атомной модели Бора — Резерфорда.

Первая квантовая теория нормального эффекта Зеемана принадлежит Дебаю. Она может быть кратко описана следующим образом.

Рассмотрим атом Бора в магнитном поле H. Из условий Зоммерфельда следует, что момент количества движения электронов относительно оси, параллельной полю и проходящей через ядро, должен быть кратным $h/2\pi$; иными словами, если s — целое число (магнитное квантовое число), то момент количества движения должен быть $sh/2\pi$.

С другой стороны, мы видели [см. соотношение (5)], что момент количества движения и магнитный момент пропорциональны друг другу. Поэтому можно заключить, что компонента магнитного момента атома, параллельная H, будет

$$\mu = s\frac{eh}{4\pi mc}, \qquad (6)$$

т. е. она является целым кратным универсальной константы

$$\frac{eh}{4\pi mc} = 0{,}91\cdot 10^{-20}, \qquad (7)$$

которая называется магнетоном Бора. Магнитная энергия атома в поле H определяется выражением

$$W_{\text{магн}} = \mu H = sH\frac{eh}{4\pi mc}. \qquad (8)$$

Рассмотрим теперь квантовый переход атома, приводящий к испусканию линий, частоту которых можно рассчитать, разделив на h разность энергий начального и конечного квантовых состояний; обозначая через s и s' магнитные квантовые числа начального и конечного состояний,

для магнитного члена в разности энергий находим

$$\Delta W_{\text{магн}} = (s - s')\, H \frac{eh}{4\pi mc}\ ;$$

поэтому вследствие наличия поля к частоте ν_0 линий в отсутствие магнитного поля следует прибавить член $\Delta W_{\text{магн}}/h$. Итак, частота будет

$$\nu_0 + (s - s') \frac{eH}{4\pi mc}\ . \tag{9}$$

Поскольку из правил отбора следует, что $(s - s')$ может принимать лишь значения 0, +1, —1, наша линия будет расщепляться на три компоненты, одна из которых имеет частоту невозмущенной линии, а две других — эту частоту, увеличенную или уменьшенную на ларморовскую частоту (4). Этот результат совпадает с предсказанным теорией Лоренца; состояния поляризации трех компонент, которые можно вывести с помощью принципа соответствия, также совпадают с лоренцовыми.

Проблема интерпретации аномального эффекта Зеемана представляет гораздо более серьезные трудности. Действительно, если пренебречь структурой электрона и рассматривать его как материальную точку, то к атому Бора можно непосредственно применить теорему Лармора, так что обязательно получается нормальный эффект Зеемана. На первой стадии исследований Ланде и Гейзенбергом были высказаны некоторые гипотезы, которые, несмотря на их произвольность, все-таки позволили получить важные результаты. По существу, ими было предложено разделить атом на две части: оптический электрон, т. е. самый внешний электрон атома, благодаря которому испускается свет, и атомный остаток, куда входят все остальные части атома. Кроме того, было сделано допущение, что оптический электрон имеет нормальное магнитное поведение, в то время как остаток обладает аномальным поведением в магнитном поле, непонятным в рамках механики и состоящим в том, что он стремится прецессировать в магнитном поле с угловой скоростью, в два раза большей предсказываемой теоремой Лармора. Тогда понятно, что влияние магнитного поля на весь атом состоит, в первом приближении, в прецессии с частотой, промежуточной между нормальной ларморовской (типичной для оптического электрона) и удвоенным значением нормальной частоты, типичным для атомного остатка. Итак, атом будет обладать скоростью прецессии, отличающейся от нормальной, а это и обусловливает аномальный эффект Зеемана. Ланде удалось на основании этих идей создать полную теорию аномального эффекта. Такая теория позволяет полностью рассчитать эффект Зеемана, если положение линий в спектральных сериях атома задано; при этом подобное утверждение остается в силе даже в случае весьма сложных спектральных мультиплетов, которые встречаются, например, в спектрах железа и хрома. В теории Ланде объясняется также выведенное эмпирически Рунге правило, которое утверждает,

что разность частот одной зеемановской компоненты и невозмущенной линии всегда выражается через ларморовскую частоту, умноженную на рациональный коэффициент.

Эффект Пашена — Бака

С помощью теории Ланде можно также интерпретировать открытое Пашеном и Баком явление, состоящее в следующем: в то время как в слабых магнитных полях смещение каждой зеемановской компоненты от невозмущенной линии пропорционально полю H, в сильных полях, напротив, такой пропорциональности нет; при этом различные компоненты постепенно смещаются таким образом, что в конечном счете эффект Зеемана для очень сильных полей становится нормальным.

Чтобы понять, как этот эффект можно объяснить в рамках теории Ланде, заметим, что если магнитное поле очень сильное, разница между магнитными силами, действующими на оптический электрон и на остов, становится такой, что как электрон, так и остов начинают независимо прецессировать вокруг поля с собственной частотой (нормальной для электрона и вдвое большей нормальной для остатка). Но, поскольку испускание света обусловливается движением оптического электрона, понятно, почему эффект Зеемана должен определяться прецессией электрона и, следовательно, становиться нормальным в очень сильных магнитных полях.

Вращающийся электрон

Теория Ланде неудовлетворительна в том отношении, что она оставляет необъясненной магнитную аномальность атомного остатка. Действительно, остов состоит из электронов, находящихся в центральном поле ядра, и поэтому теорема Лармора должна бы быть применима и к нему, что подразумевает нормальное магнитное поведение остова. Ключ к преодолению этого противоречия дает недавняя гипотеза, предложенная Уленбеком и Гаудсмитом. Согласно этим авторам, электрон, кроме электрического заряда, обладает также и магнитным моментом, по абсолютной величине равным магнетону Бора (7). Кроме того, предполагается, что электрон имеет момент количества движения относительно собственного центра, равный по величине $h/4\pi$ и имеющий направление магнитного момента. Поскольку все это формально можно интерпретировать, представляя электрон как электрически заряженную частицу, вращающуюся вокруг своей оси, то такое предположение и называется гипотезой вращающегося электрона. Теперь, если поместить электрон в магнитное поле H, то на его магнитный момент будет действовать пара сил. Поскольку электрон благодаря своему моменту количества движения будет вести себя как маленький гироскоп, такая пара сил будет вызывать прецессию оси электрона вокруг направления магнитного поля.

Как показывает расчет, скорость прецессии оказывается в два раза больше ларморовского значения (3), так что теорию эффекта Зеемана теперь можно развивать вполне аналогично теории Ланде, но, отказавшись от предположения о магнитной аномальности остова, и вместо этого приписывая аномалию эффекта Зеемана внутренней структуре электрона.

Гипотеза вращающегося электрона позволяет совершенно естественно объяснить не только аномальный эффект Зеемана, но и многие другие явления атомной физики и спектроскопии, которые ранее казались непонятными; поэтому является общепринятым мнение, что гипотеза вращающегося электрона соответствует действительности, хотя прямых подтверждений этому нет.

Опыт Штерна и Герлаха

Как мы видели, квантовая теория позволяет вполне удовлетворительно объяснить все разновидности эффекта Зеемана, от простейших до самых сложных. Справедливость квантового объяснения была убедительно продемонстрирована опытом Штерна и Герлаха, который мы сейчас и опишем. Согласно квантовой теории, атом, обладающий магнитным моментом, ориентируется в магнитном поле таким образом, что компонента момента, параллельная полю, может принимать только некоторые дискретные значения, которые в случае нормального эффекта Зеемана отличаются между собой на магнетон Бора [см. формулу (6)], а в других случаях — на рациональную часть магнетона Бора.

Штерну и Герлаху удалось прямым образом проверить это предсказание квантовой теории. Рассмотрим помещенный в магнитное поле H атом и обозначим через μ компоненту магнитного момента атома, параллельную полю. Если поле H однородно, то магнитные силы, действующие на атом, будут иметь нулевую результирующую и поэтому не будут стремиться изменять его движения как целого. Это уже неверно, когда поле неоднородно; в самом деле, легко видеть, что в этом случае на атом будет действовать сила

$$\mu \frac{\delta H}{\delta z}, \tag{10}$$

где z означает направление поля в точке, занятой атомом.

В опыте Штерна и Герлаха тонкий пучок атомов пропускается через очень неоднородное магнитное поле.

Атомный пучок можно получить, медленно испаряя вещество в сосуде при столь большом разрежении, что испаряющиеся атомы могут проходить через весь сосуд, не претерпевая соударений; подходящие диафрагмы позволяют получить очень тонкий пучок. Неоднородное поле создавалось электромагнитом, один из полюсов которого имел вид борозды, а другой — форму клина. Благодаря такой конфигурации полюсов маг-

нитное поле принимало довольно большое значение вблизи острия клина и быстро уменьшалось вдали от него. Заметим теперь, что согласно квантовой теории магнитный момент μ (10) может принимать только некоторые дискретные значения; поэтому силы, действующие на различные атомы пучка, будут обладать различными дискретными значениями. Это приводит к тому, что различные атомы пучка отклоняются по-разному, так что пучок расщепляется на несколько отдельных пучков, каждый из которых соответствует одному из значений μ. Штерну и Герлаху на самом деле удалось наблюдать такое расщепление пучка. Таким образом, они сумели не только качественно подтвердить квантовую теорию эффекта Зеемана, но также найти значение μ, количественно согласующееся с теоретическими предсказаниями для элементов, исследованных в опытах.

Влияние магнитного поля на оптический резонанс

Даже в магнитных полях очень большой напряженности эффект Зеемана невелик и его наблюдение требует спектроскопических средств высокой разрешающей способности. В магнитных полях в несколько гаусс он будет настолько мал, что ни один из существующих приборов не обладает достаточным разрешением для того, чтобы его обнаружить. Однако Вуду удалось косвенно наблюдать эффект Зеемана, обусловленный полями даже в доли гаусса, например, магнитным полем Земли. Соответствующие исследования были выполнены при наблюдении влияния слабого магнитного поля на резонансное рассеяние. Опыты Вуда легко интерпретировать на основе классической модели, согласно которой свет испускается изотропным гармоническим осциллятором. При их описании мы и используем такую модель.

Если осветить кварцевый сосуд, содержащий пары ртути, светом с длиной волны 2536 Å от ртутной лампы, то можно констатировать очень интенсивное рассеяние его ртутными парами (явление оптического резонанса). Классическое толкование этого явления состоит в следующем: атом ртути содержит осцилляторы с частотой, соответствующей линии 2536 Å; при освещении светом этой частоты такие осцилляторы резонируют и поэтому становятся, в свою очередь, центрами испускания света той же самой частоты, который как раз и является рассеянным излучением.

Если предположить, что падающий свет поляризован и что его электрический вектор колеблется по направлению, параллельному оси z, то и атомные осцилляторы также будут вынуждены колебаться в том же направлении и, следовательно, их резонансное излучение также будет иметь плоскость поляризации, параллельную оси z. Вуд констатировал, что действительно в некоторых случаях результаты соответствовали этим теоретическим предсказаниям, в то время как в других случаях

этого не было, хотя, казалось бы, условия эксперимента не изменялись. После нескольких безуспешных попыток Вуду, наконец, удалось обнаружить причину возникновения этих противоречивых результатов. Она состояла в различной ориентации его установок по отношению к магнитному полю Земли или к очень слабым магнитным полям, обусловленным присутствием железа в его аппаратуре. Чтобы понять это, рассмотрим, как проявится явление резонанса в том случае, когда резонирующий атом находится в магнитном поле. Как мы видели в связи с лоренцовой теорией эффекта Зеемана, магнитное поле «разлагает» движение осциллятора на три гармонических движения несколько различных частот: одно — прямолинейное, параллельное магнитному полю, и два — круговых движения вокруг направления поля по часовой и против часовой стрелки. Если электрический вектор возбуждающего света колеблется по направлению, параллельному полю, то из этих трех компонент будет возбуждаться только линейное колебание, и поэтому все будет происходить так же, как в отсутствие поля; если же электрический вектор света колеблется по направлению, перпендикулярному полю, то возбуждаться будут две круговые компоненты. Таким образом, при наблюдении поперек поля будет обнаруживаться линейно поляризованный свет. Наблюдение же вдоль поля позволяет обнаружить две поляризованные по кругу компоненты (если прибор может их разрешить); при недостаточной же разрешающей способности (что практически всегда имеет место в слабых магнитных полях) две циркулярно поляризованные компоненты накладываются друг на друга, так что будет наблюдаться неполяризованный свет.

Опыт полностью подтверждает выводы теории о деполяризующем действии магнитного поля, представляя таким образом способ обнаружения эффекта Зеемана даже в том случае, когда величина зеемановского расщепления значительно меньше ширины спектральной линии.

Магнитное вращение плоскости поляризации

Как отмечалось во введении, плоскость поляризации света, распространяющегося сквозь прозрачную изотропную среду по направлению, параллельному силовым линиям магнитного поля, вращается вокруг направления распространения по мере проникновения луча света в среду (эффект Фарадея).

Угол α, на который поворачивается плоскость поляризации, для ферромагнитных тел выражается формулой

$$\alpha = ClH,$$

где l — длина пути, пройденного светом в магнитном поле, H — напряженность поля и C — постоянная (называемая постоянной Верде). Эта постоянная зависит не только от природы вещества, но и от длины волны.

Ей приписывают знак плюс или минус в зависимости от того, как вращается плоскость поляризации: в направлении тока, создающего магнитное поле, или наоборот. Если выражать вращение в минутах, то постоянная Верде для воды и линии D натрия имеет значение 0,0013, для сероуглерода — 0,04.

Мы можем теоретически объяснить это явление таким же образом, как объясняли и эффект Зеемана, а именно — на основе теоремы Лармора. Не останавливаясь на количественном рассмотрении, мы можем интерпретировать это явление следующим образом. Прежде всего напомню, что существование вращательной способности — естественной или магнитной — равносильно различию в скоростях распространения света, поляризованного по кругу в двух противоположных направлениях, вдоль оси, относительно которой исследуется вращение. Если луч линейно поляризованного света распространяется параллельно оси, то его всегда можно разложить на два луча одинаковой амплитуды, поляризованных по кругу в двух противоположных направлениях. Если показатель преломления этих двух лучей одинаков, то они в каждой точке оси имеют одинаковую разность фаз, так что, интерферируя между собой, они вновь образуют прямолинейное колебание, параллельное начальному направлению. Если же два циркулярно поляризованных луча имеют разные показатели преломления, то разность их фаз по мере продвижения по оси постепенно меняется, так что два луча, интерферируя, образуют попрежнему линейное колебание, направление которого, однако, меняется от точки к точке оси; в этом как раз и состоит вращательная способность.

Итак, для объяснения существования магнитной вращательной способности требуется лишь доказать, что поле обусловливает разные показатели преломления двух лучей, поляризованных по кругу. В этой связи заметим, что дисперсия вещества объясняется изменением амплитуды смещения его электронов под действием электрического поля света с изменением частоты поля. Такое изменение происходит особенно быстро в том случае, когда частота света близка к частоте линии или полосы поглощения вещества, поскольку именно тогда возникает резонанс (аномальная дисперсия). Далее, напомню, что возмущение магнитным полем движения системы электронов состоит в ее вращении вокруг направления поля, которое, по крайней мере в самых простых случаях, можно рассчитать с помощью теоремы Лармора. Поэтому, если движение электронов отнести к системе осей, вращающейся с частотой ларморовской прецессии, то движение электронов будет происходить так, будто оси неподвижны, а магнитное поле отсутствует. Если на наши электроны действует циркулярно поляризованный свет с частотой ν, то частота, с которой вращается электрический вектор по отношению к системе вращающихся осей, будет $\nu - \nu_L$ или $\nu + \nu_L$, в зависимости от того, совпадают или противоположны направления вращения плоскости поляризации и прецессии Лармора. В зависимости от того, какой из этих двух случаев осуществляется,

частота электронов будет равна $\nu \mp \nu_L$, и поэтому они будут реагировать на свет по-разному, обусловливая различие показателей преломления двух циркулярно поляризованных лучей света, т. е. обусловливая магнитную вращательную способность.

В случае парамагнитных веществ может существовать также вращение плоскости поляризации, обусловленное ориентированием молекул в магнитном поле.

Эта теория позволяет также интерпретировать открытое Макалузо и Корбино в 1898 г. явление, состоящее в магнитной вращательной способности исключительной интенсивности, быстро меняющейся с частотой; этот эффект наблюдается вблизи линий поглощения паров. В этих условиях удалось наблюдать магнитное вращение вплоть до 700° (Макалузо и Корбино в своих первых наблюдениях использовали дифракционную решетку; при этом свет пропускался сквозь пламя натрия, помещенное между двумя николями). Это явление представляет собой следствие аномальной дисперсии, существующей вблизи линии поглощения; возникает значительная разница в показателях преломления двух частот $\nu - \nu_L$, $\nu + \nu_L$, т. е. интенсивная вращательная способность.

Прохождение света через ферромагнитные тела

Также значительная, но обусловленная иными причинами магнитная вращательная способность наблюдается в случае, когда свет пропускается через намагниченную пластинку (столь тонкую, что она становится прозрачной) из железа или других ферромагнитных веществ. В намагниченном до насыщения железе таким образом можно наблюдать вращение плоскости поляризации, достигающее 200 000 *град/см*.

Еще одно явление тесно связано с только что описанным — это магнитооптическое явление Керра, которое состоит в изменении поляризации света при отражении от зеркальной поверхности сильно намагниченного железа.

Это явление, очевидно, выглядит по-разному в зависимости от угла падения, поляризации света и ориентации магнитного поля; в общем случае эффект превращает линейно поляризованный свет в эллиптически поляризованный. Самый простой случай встречается при изучении нормального отражения линейно поляризованного света от зеркал из железа, намагниченного перпендикулярно его поверхности. В этом случае отраженный свет, как это было доказано исследованиями Риги, оказывается эллиптически поляризованным, причем большая ось эллипса повернута по отношению к плоскости поляризации падающего света. Этот факт обусловлен различным показателем преломления намагниченного железа, а также различным поглощением в нем света, поляризованного по кругу в двух противоположных направлениях.

Электрическое и магнитное двойное лучепреломление

В электрическом или магнитном поле изотропное тело становится двоякопреломляющим и ведет себя в оптическом отношении как одноосный кристалл, оптическая ось которого направлена по полю.

Электрическое двойное преломление было открыто Керром в 1875 г. и поэтому часто называется эффектом Керра. Первые опыты были выполнены со стеклом. Пластинка из стекла помещалась между двумя скрещенными николями; к пластинке прикладывались два электрода, так что внутри нее создавалось электрическое поле, силовые линии которого составляли угол 45° с плоскостями поляризации обоих николей. В отсутствие электрического поля два николя не пропускают свет; электрическое же поле, делая стекло двоякопреломляющим, допускает прохождение небольшого количества света через систему.

Вначале полагали, что явление электрического двойного преломления по существу не отличается от процесса двойного преломления, обусловленного сжатием, т. е. интерпретировали электрическое двойное преломление деформацией стекла, возникающей вследствие электрострикции. Впоследствии эта интерпретация была отброшена, так как электрическое двойное преломление было найдено также в жидкостях и газах, для которых, конечно, не может идти речи об анизотропной электрострикции.

Электрическое двойное преломление может быть измерено по разности показателей преломления n_0 и n_s обыкновенных и необыкновенных лучей. Такая разность пропорциональна квадрату электрического поля, так что можно записать

$$n_s - n_0 = B\lambda E^2,$$

где E — поле (в электростатических единицах), λ — длина волны, а B — так называемая постоянная Керра. Величина B зависит от природы вещества, а также от длины волны. Для сероуглерода $B = 3{,}7 \cdot 10^7$.

Магнитное двойное лучепреломление, открытое Коттоном, описывается тем же самым законом. Его постоянная для нитробензола равна $2{,}53 \cdot 10^{-12}$.

Согласно Ланжевену, как электрическое, так и магнитное двойное преломление обусловлены в большинстве случаев ориентирующим действием электрического или магнитного поля на молекулы тела. Магнитная ориентация парамагнитных молекул определяется тем, что такие молекулы имеют магнитный момент, который стремится ориентироваться параллельно полю; но тепловое движение ведет к равномерному распределению молекул по всевозможным направлениям, так что при каждом значении температуры устанавливается статистическое равновесие между этими двумя тенденциями, что и приводит к некоторому группированию магнитных осей около направления поля.

Ориентирующее действие электрического поля может быть обуслов-

лено двумя разными причинами: действительно, молекулы некоторых веществ (например, воды) имеют электрический момент, так что для них механизм электрической ориентации вполне аналогичен механизму магнитной ориентации парамагнитных молекул; но даже в том случае, когда у молекул нет постоянного электрического момента, все же электрическая ориентация иногда может иметь место.

В самом деле, предположим, что молекулы рассматриваемого тела электрически анизотропны и имеют три различные главные оси электрической поляризуемости. Если такая молекула находится в электрическом поле, то ее энергия будет зависеть от ориентации и будет минимальной или максимальной в зависимости от того, параллельно ли электрическое поле оси максимальной или минимальной поляризуемости молекулы.

Поэтому электрическое поле стремится расположить все молекулы так, чтобы оси максимальной поляризуемости их были параллельны полю. Вследствие теплового движения и в этом случае устанавливается статистическое равновесие, которое приводит к некоторому группированию осей максимальной поляризуемости около направления поля. Благодаря такой ориентации (независимо от ее природы) диэлектрическая постоянная тела будет зависеть от направления; такой анизотропии диэлектрической постоянной соответствует, конечно, и анизотропия показателя преломления, т. е. двойное лучепреломление.

Эта теория ориентирования объясняет и электрическое двойное преломление, наблюдавшееся Блоком в туманах, и наблюдавшееся Майораной магнитное двойное преломление в суспензиях коллоидного железа.

Эффект Штарка

После открытия Зееманом расщепления спектральных линий в магнитном поле представлялись естественными поиски возможного расщепления линий под действием электрического поля. И все-таки только в 1913 г. Штарку впервые удалось обнаружить такое явление. Это связано главным образом с трудностью создания сильного электрического поля в испускающем свет газе или паре, поскольку они почти всегда являются также электрическими проводниками. Такая трудность была преодолена почти одновременно, но различными методами Штарком и Ло Сурдо.

Установка Штарка состояла из наполненной водородом трубки для каналовых лучей; в непосредственной близости к катоду с отверстием помещался дополнительный электрод. Между катодом и этим электродом прикладывалось высокое напряжение, которое не возбуждало искрового разряда вследствие очень малого расстояния между двумя электродами. Каналовые лучи, выходя из отверстия в катоде, попадали в сильное электрическое поле, обусловленное разностью потенциалов между катодом и дополнительным электродом, так что на каналовых лучах и можно было наблюдать электрическое расщепление спектральных линий.

Аппаратура же Ло Сурдо — просто наполненная водородом трубка типа Плюкера, которая, однако, вблизи катода сужается до тонкого капилляра. Это обусловливает резкое падение потенциала вблизи катода, где как раз и наблюдается явление.

Выполненные с помощью этих методов исследования показали, что линии серии Бальмера водорода расщепляются в электрическом поле на многочисленные компоненты, поляризованные параллельно и перпендикулярно полю.

Эффект Штарка значительно больше эффекта Зеемана; с помощью сильных электрических полей легко можно получить такое расщепление линий, когда расстояние между крайними компонентами превышает 20 Å.

Как и эффект Зеемана, эффект Штарка оказал значительное влияние на развитие наших знаний о структуре атома, главным образом потому, что с помощью теории Бора стало возможным полностью объяснить как качественно, так и количественно эффект Штарка в водороде.

Общий принцип такой интерпретации, принадлежащий Эпштейну и Шварцшильду, заключается в следующем: атом водорода, находящийся во внешнем электрическом поле, суть механическая система, состоящая из электрона, который движется под действием кулоновского притяжения к ядру (которое обычно в хорошем приближении может рассматриваться как неподвижное), и постоянной силы, обусловленной внешним электрическим полем. Уравнения движения этой системы легко интегрируются (в системе параболических координат с осью, направленной по внешнему полю), и к атому можно применить условия Зоммерфельда для определения стационарных состояний. Тогда окажется, что энергетический уровень, который в отсутствие поля проявлялся как простой, под действием электрического поля расщепляется на несколько уровней, расстояние которых до начального уровня в первом приближении пропорционально полю. Поскольку частоты спектральных линий пропорциональны (коэффициент пропорциональности $1/h$) разностям энергий стационарных состояний, то и линии будут расщепляться на несколько компонент. Интенсивность всех этих компонент позволяет оценить принцип соответствия.

Чтобы представить характер влияния электрического поля на спектр водорода более наглядным образом, следует рассмотреть возмущение кеплеровского движения электрона, обусловленное внешним электрическим полем. В отсутствие внешнего поля кеплеровский эллипс сохранял бы неизменное положение в пространстве (здесь пренебрегается крайне медленной прецессией, обусловленной релятивистским эффектом). Электрическое поле сообщает эллипсу сравнительно медленное периодическое движение. Рассмотрим второй (т. е. не занятый ядром) фокус эллипса. В плоскости, перпендикулярной внешнему полю, он описывает окружность, двигаясь с частотой, пропорциональной электрическому полю. При гармоническом анализе движения электрона найдем, что частоты гармонических компонент являются комбинациями основной частоты кеплеровского движения и частоты секулярного возмущения; как раз

этой комбинации двух частот и соответствует расщепление линий на компоненты. (Однако следует заметить, что без квантования орбит во внешнем поле эффект Штарка приводил бы к уширению линий, а не расщеплению их на компоненты.) На рис. 2 приведена схема компонент, на которые

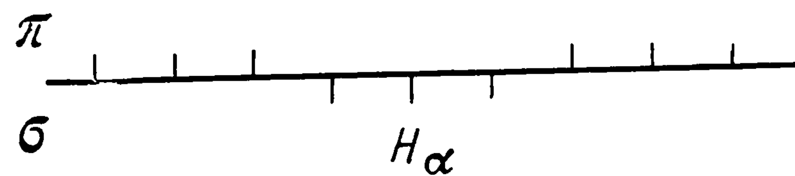


Рис. 2

расщепляется линия H_α водорода. Последующие линии бальмеровской серии расщепляются на число компонент, которое увеличивается вместе с порядковым номером линии.

Эффект Штарка для других элементов

Действие электрического поля на спектр атома водорода значительно отличается от влияния поля на спектры других атомов. В последнем случае эффект Штарка может состоять в расщеплении линий на компоненты (аналогичном случаю атома водорода), в смещении линий по отношению к занимаемому ими в отсутствие поля положению и, наконец, в появлении новых линий. Однако во всех этих случаях расстояние компонент от невозмущенной линии (или, в случае линий, которые возникают под влиянием поля, расстояние от их предельного положения при нулевом поле) пропорционально квадрату напряженности поля, а не первой ее степени, как это было для водорода.

Это отличное от других элементов поведение водорода объясняется следующим обстоятельством. Если рассмотреть кеплеровскую орбиту, описываемую электроном атома водорода, то сразу видно, что она обладает отличным от нуля средним электрическим моментом во всех случаях, когда ее эксцентриситет отличен от нуля. Напротив, движение валентных электронов в других атомах в первом приближении может быть описано как плоское периодическое движение, на которое наложена прецессия с частотой, сравнимой с частотой периодического движения, так что средний электрический момент атома оказывается равным нулю. Далее, заметим, что увеличение энергии атома во внешнем электрическом поле равно скалярному произведению напряженности поля на электрический момент атома. Поэтому в среднем эта энергия будет равна нулю для всех атомов, кроме атома водорода. Но как раз этой энергии обязан в первом приближении эффект Штарка; итак, отличное от других элементов поведение водорода становится понятным. Строго говоря, можно заметить, что благодаря релятивистскому возмущению орбите водорода также свойственна прецессия; но, поскольку такое движение крайне медленно, вы-

зываемое им уменьшение эффекта пренебрежимо мало даже для довольно низких напряженностей электрических полей.

Предыдущие рассуждения позволяют также предсказать, что влияние электрического поля должно быть тем сильнее, чем меньше скорость прецессии электронной орбиты. Частота такой прецессии соответствует разности частоты рассматриваемого спектрального терма и частоты бальмеровского терма, соответствующего ему. Поэтому мы должны ожидать, что влияние поля будет тем больше, чем меньше разность между термами спектра и соответствующими термами спектра водорода.

Такое теоретическое предсказание полностью подтверждается опытом. Действительно, в гелии, термы которого довольно близки термам водорода, наблюдается эффект Штарка, немного меньший, чем в водороде, в то время, как, например, в натрии эффект Штарка настолько незначителен, что наблюдать его удалось только в последнее время Ланденбургу, причем с помощью весьма деликатных средств.

Мы уже отметили, что в некоторых случаях электрическое поле может вызывать появление новых спектральных линий. Этот факт впервые наблюдался Брунетти в спектре гелия. Чтобы понять теоретически это явление, заметим, что согласно теории Бора частоты линий атома рассчитываются как разности спектральных термов. Но не всем разностям термов соответствуют линии, которые атом действительно может испускать. Для того чтобы линия появилась в спектре, гармоническая компонента, соответствующая ей в разложении в ряд Фурье движения оптического электрона, должна быть представлена отличной от нуля амплитудой.

Далее, электрическое поле, слегка возмущая движение оптического электрона, меняет разложение в ряд Фурье так, что некоторые компоненты, которые в невозмущенном движении имели нулевую амплитуду, появляются в возмущенном движении. Возникновению этих гармонических компонент как раз и соответствует появление новых линий.

Наконец, следует коснуться характерного проявления эффекта Штарка: линии, испускаемые пара́ми, уширяются или смещаются при увеличении давления, под которым находится излучающий газ. Согласно Штарку, это объясняется тем, что атомы излучающего газа, сталкиваясь с другими атомами, одновременно попадают в электрическое поле этих атомов; это поле и вызывает эффект Штарка. Конечно, непостоянство этих электрических молекулярных полей приводит к тому, что эффект проявляется как уширение, а не расщепление линий. Естественно ожидать, что присутствие ионов, окруженных довольно интенсивным электрическим полем, способствует особенно значительному уширению линий. Это подтверждено тем фактом, что самое значительное уширение наблюдается в плотном разряде. Итак, при некоторых условиях можно получить столь большое уширение линий бальмеровской серии, что они накладываются друг на друга, образуя нечто вроде непрерывного спектра.

Для линий, у которых эффект Штарка слабее, чем в водороде, влияние давления проявляется более слабо.

К статье 34

В этой короткой статье Ферми пытается в рамках волновой механики учесть реакцию излучения на излучающий атом. Процедура, которой он пользуется, остроумна, но, по его собственному признанию, довольно произвольна. Такого рода попытки очень скоро утратили актуальность благодаря дираковой теории излучения (Proc. Roy. Soc., 1927, **114**, 243), которая появилась почти в то же самое время, когда писалась эта статья, и в которую позднее Ферми внес весьма заметный вклад (см. статьи 38, 46—48).

Э. Персико

34

О МЕХАНИЗМЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКЕ *

Целью данной работы является исследование механизма излучения света в волновой механике; подобное исследование приводит, в частности, к определению естественной ширины линий испускания и их формы.

Как известно из теории Шредингера [1], при одновременном возбуждении в атоме двух квантовых состояний i и l его электрический момент содержит компоненту, которая меняется во времени с частотой $(E_i - E_l)/h$; согласно классической электромагнитной теории, такое изменение электрического момента приводит к излучению света, обладающему той же частотой. Как будет показано в этой работе, реакция испущенного излучения влияет на изменение интенсивности возбуждения этих двух квантовых состояний таким образом, что по истечении определенного времени возбужденным останется лишь состояние с меньшей энергией; при этом прекращается также и процесс излучения. Следовательно, механизм квантового перехода можно описать следующим образом. Допустим, что вначале в рассматриваемом атоме возбуждается только одно квантовое состояние с энергией E_i. В этих условиях электрический момент атома постоянен, и, таким образом, атом не может излучать энергию. Предположим теперь, что малое внешнее возмущение приводит к слабому возбуждению другого состояния с энергией E_l, меньшей E_i. Тогда сразу же начнется слабое излучение с частотой $(E_i - E_l)/h$, и его реакция вызовет увеличение интенсивности возбуждения состояния l за счет состояния i. Этот процесс продолжается до тех пор, пока атом полностью не перейдет из состояния i в состояние l.

---

* *Sul meccanismo dell'emissione nella meccanica ondulatoria*. Rend. Lincei, 1927, 5, 795—800. Представлено членом академии О. М. Корбино на заседании 1 мая 1927 г.

[1] E. Schrödinger. Ann. d. Phys., 1926, **79**, 361, 489, 734; **80**, 437; **81**, 109.

Обозначим через ψ скаляр поля[2] в теории Шредингера, а через $\bar{\psi}$ — комплексно сопряженную ей величину. Тогда плотность электрического заряда будет выражаться, согласно Шредингеру, величиной

$$e\psi\bar{\psi}, \tag{1}$$

где e — заряд электрона, а ψ нормируется так, чтобы

$$\int_\tau \psi\bar{\psi}\,d\tau = 1. \tag{2}$$

При этом электрический момент системы выражается равенством

$$p = e\int_\tau \mathbf{r}\psi\bar{\psi}\,d\tau, \tag{3}$$

в котором через $\mathbf{r}$ обозначен радиус-вектор элемента объема $d\tau$.

Если потенциал V_0 этой системы не зависит от времени, то уравнение Шредингера

$$\Delta\psi - \frac{8\pi^2 m}{h^2}V_0\psi - \frac{4\pi i m}{h}\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0 \tag{4}$$

в качестве общего решения допускает линейную комбинацию (с постоянными коэффициентами) частных решений типа

$$u_k \exp(2\pi i \nu_k t), \qquad \nu_k = E_k/h; \tag{5}$$

здесь функции u_k не зависят от t, являются решениями уравнения

$$\Delta u_k + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E_k - V_0)u_k = 0 \tag{6}$$

и удовлетворяют условиям нормировки

$$\int u_k^2\,d\tau = 1.$$

Величины E_k представляют собой собственные значения уравнения (6). Таким образом, в этом частном случае ψ приобретает вид

$$\varphi = \sum\lambda_k u_k \exp(2\pi i\nu_k t), \qquad \sum\lambda_k\bar{\lambda}_k = 1, \tag{7}$$

где λ — постоянные параметры. Тогда электрический момент (3) будет описываться выражением

$$\mathbf{p} = e\sum\bar{\lambda}_k\lambda_s\mathbf{r}_{ks}\exp 2\pi i(\nu_k - \nu_s)t, \tag{8}$$

---

[2] См. примечание на стр. 232.— *Прим. ред.*

где через $\mathbf{r}_{ks}$ обозначены векторы

$$\mathbf{r}_{ks} = \int \mathbf{r} u_k u_s \, d\tau. \tag{9}$$

Из этого, в частности, следует, что электрический момент становится постоянным и, как следствие, излучение отсутствует, если все λ, за исключением одного, равны нулю. В общем же случае он оказывается суммой синусоидальных функций времени, имеющих частоты $\nu_k - \nu_r$; такое изменение p вызывает излучение света, обладающего теми же частотами, с интенсивностью, которая, согласно классической электродинамике, задается выражением

$$2\ddot{p}^2/3c^3. \tag{10}$$

В развивавшихся до сих пор рассуждениях мы пренебрегли реакцией испущенного излучения; чтобы учесть ее, предположим, что в соответствии с классической электродинамикой реакция излучения описывается силой

$$\frac{2}{3}\frac{e}{c^3}\dddot{\mathbf{p}}. \tag{11}$$

Чтобы эту силу можно было ввести в уравнение Шредингера, она, разумеется, должна быть потенциальной; этот потенциал, очевидно, имеет вид

$$V = -\frac{2}{3}\frac{e}{c^3}\mathbf{r}\cdot\dddot{\mathbf{p}} = \frac{16\pi^3 i}{3}\frac{e^2}{c^3}\sum_{ks}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_{ks})(\nu_k - \nu_s)^3 \exp 2\pi i(\nu_k - \nu_s)t. \tag{12}$$

Следовательно, для учета реакции излучения мы должны в уравнении (4) к потенциалу V_0 добавить V. Такая добавка приводит к тому, что при записи ψ в форме (7) (такая запись всегда возможна) параметры λ перестают быть постоянными и становятся медленно меняющимися во времени. Чтобы найти, каким образом происходит такое изменение [3], подставим в уравнение (4) вместо ψ выражение (7), а вместо V_0 сумму $V_0 + V$. Принимая во внимание уравнение (6), находим

$$\sum \dot{\lambda}_k u_k \exp 2\pi i\nu_k t = \frac{2\pi i}{h} V \sum_s \lambda_s u_s \exp 2\pi i\nu_s t. \tag{13}$$

Умножим обе части этого уравнения на $u_k d\tau$ и проинтегрируем по всему пространству; учитывая, что u_k представляют собой систему ортогональных функций, находим

$$\dot{\lambda}_k = \frac{2\pi i}{h}\sum_s \lambda_s \exp[2\pi i(\nu_s - \nu_k)t]\int V u_k u_s \, d\tau. \tag{14}$$

[3] Подобный подход к использованию в квантовой механике классического понятия реакции излучения является, несомненно, несколько произвольным; тем не менее, получаемые результаты в значительной мере оправдывают его.

Подставляя вместо V его выражение (12), получаем

$$\dot{\lambda}_k = -\frac{32\pi^4}{3}\frac{e^2}{c^3h}\sum_{\alpha\beta s}\lambda_\alpha\bar{\lambda}_\beta\lambda_s(\nu_\alpha-\nu_\beta)^3 r_{\alpha\beta}\cdot r_{sk}\exp 2\pi i(\nu_\alpha-\nu_\beta+\nu_s-\nu_k)\,t. \tag{15}$$

Секулярное возмущение значений λ определяется, очевидно, лишь членами второго порядка, для которых $\alpha \neq \beta$ и экспоненциальный множитель сводится к константе, т. е. оно определяется членами, для которых $\nu_\alpha - \nu_\beta + \nu_s - \nu_k = 0$. Если же мы предположим, что между частотами ν_i не существует рациональных соотношений, то последнее равенство будет эквивалентно тому, что $\alpha = k$, $\beta = s$, и с учетом одних только секулярных возмущений уравнение (15), следовательно, записывается в виде

$$\dot{\lambda}_k = -\frac{32\pi^4}{3}\frac{e^2}{c^3h}\sum_s\lambda_k\lambda_s\bar{\lambda}_s(\nu_k-\nu_s)^3 r_{ks}^2. \tag{16}$$

Наиболее интересный для нас случай соответствует испусканию какой-либо одной спектральной линии, когда равны нулю все λ за исключением двух, например λ_1 и λ_2. В этом случае, обозначив через A вещественную постоянную

$$A = \frac{32\pi^4}{3}\frac{e^2}{c^3h}(\nu_2-\nu_1)^3 r_{12}^2, \tag{17}$$

из уравнений (16) и из уравнений, которые получаются из (16) путем замены i на $-i$, найдем

$$\dot{\lambda}_1 = A\lambda_1\lambda_2\bar{\lambda}_2, \qquad \dot{\lambda}_2 = -A\lambda_2\lambda_1\bar{\lambda}_1, \tag{18}$$

$$\dot{\bar{\lambda}}_1 = A\bar{\lambda}_1\lambda_2\bar{\lambda}_2, \qquad \dot{\bar{\lambda}}_2 = -A\bar{\lambda}_2\lambda_1\bar{\lambda}_1. \tag{19}$$

Отсюда сразу же следует первый интеграл $\lambda_1\bar{\lambda}_1 + \lambda_2\bar{\lambda}_2 = \text{const}$; в силу второго равенства (7) эта константа должна равняться 1, так что

$$\lambda_1\bar{\lambda}_1 + \lambda_2\bar{\lambda}_2 = 1. \tag{20}$$

После этого из соотношений (18), (19) легко получается, что аргументы комплексных величин λ_1, λ_2 не изменяются со временем и что для их модулей справедливо уравнение

$$\frac{d}{dt}|\lambda_1|^2 = 2A|\lambda_1|^2(1-|\lambda_1|^2),$$

из которого следует

$$2At = \int\frac{d\,|\lambda_1|^2}{|\lambda_1|^2(1-|\lambda_1|^2)} = \ln\frac{|\lambda_1|^2}{1-|\lambda_1|^2} + \text{const}. \tag{21}$$

Далее, выбрав начальный момент времени так, чтобы постоянная интегрирования была равна нулю, и приняв во внимание соотношение (21), находим

$$|\lambda_1|^2 = \frac{e^{2At}}{e^{2At}+1}, \qquad |\lambda_2|^2 = \frac{1}{e^{2At}+1}, \tag{22}$$

откуда немедленно следует равенство

$$|\lambda_1\lambda_2| = {}^1/_2 \operatorname{ch} At. \tag{23}$$

Если в соотношениях (22) положить $t = -\infty$, то $\lambda_2 = 1$, $\lambda_1 = 0$; когда же $t = +\infty$, $\lambda_2 = 0$ и $\lambda_1 = 1$. Таким образом, как мы и утверждали, действие реакции излучения таково, что вынуждает атом перейти из квантового состояния 2 в состояние 1; эти соображения разъясняют, следовательно, механизм квантового перехода.

Для большей простоты допустим теперь, что в начальный момент параметры λ являются вещественными; тогда из сказанного выше следует, что они остаются вещественными на протяжении всего процесса, и соответствующее излучению выражение (8) для компоненты электрического момента в этом случае принимает вид

$$p_{12} = er_{12}\frac{\cos 2\pi(\nu_2-\nu_1)t}{\operatorname{ch} At}. \tag{24}$$

Теперь мы сможем вычислить ширину и форму эмиссионных линий. В самом деле, с этой целью достаточно предыдущее выражение для электрического момента разложить с помощью интеграла Фурье на составляющие гармоники. После этого сразу же находим

$$p_{12} = 2er_{12}\int_0^\infty d\nu\cos 2\pi\nu t\int_0^\infty \frac{\cos 2\pi(\nu_2-\nu_1-\nu)t + \cos 2\pi(\nu_2-\nu_1+\nu)t}{\operatorname{ch} At}\,dt =$$

$$= \frac{2er_{12}}{A}\int_0^\infty d\nu\cos 2\pi\nu t\left\{F\left[\frac{2\pi(\nu_2-\nu_1-\nu)}{A}\right] + F\left[\frac{2\pi(\nu_2-\nu_1+\nu)}{A}\right]\right\}, \tag{25}$$

где через $F(\omega)$ обозначена функция

$$F(\omega) = \int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{\operatorname{ch} x}\,dx. \tag{26}$$

График функции $F(\omega)$ приведен на рисунке; были численно определены следующие ее значения:

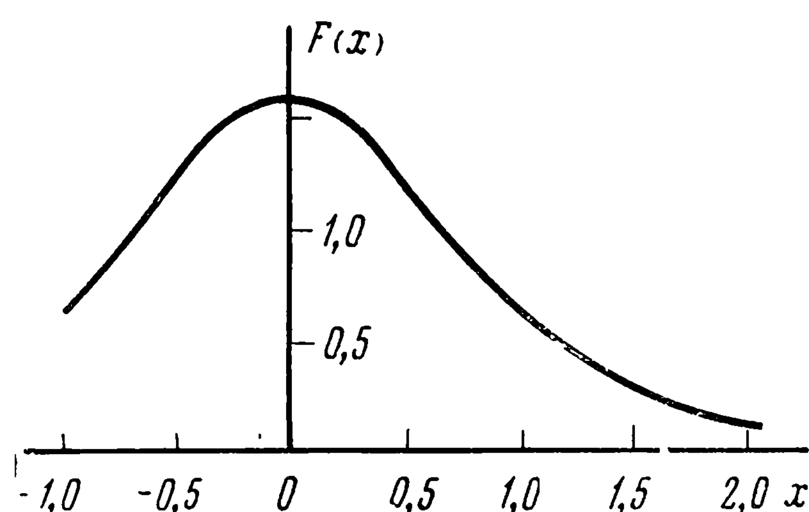
$$F(0) = 1{,}57 = \pi/2;\quad F(0{,}2) = 1{,}50;\quad F(0{,}5) = 1{,}18;$$

$$F(1) = 0{,}62;\quad F(2) = 0{,}12;\quad F(3) = 0{,}02;\quad F(0{,}56) = \pi/2\sqrt{2}.$$

Отметим, в частности, что при сравнительно больших абсолютных значениях аргументов функция $F(\omega)$ довольно мала. Благодаря этому формулу (25) можно с большой точностью представить в виде

$$p_{12} = \frac{2er_{12}}{A}\int\limits_0^\infty F\left(\frac{2\pi\Delta\nu}{A}\right)\cos 2\pi\nu t\, d\nu, \tag{27}$$

где через $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1 - \nu$ обозначено расстояние между рассматриваемой частотой и центром линии испускания. Таким образом, интенсивность



линии испускания на расстоянии $\Delta\nu$ от ее центра оказывается пропорциональной

$$F^2\left(\frac{2\pi\Delta\nu}{A}\right).$$

Этот результат определяет форму линии. Если за ширину линии принимать удвоенное значение такого расстояния от ее центра, при котором интенсивность уменьшается наполовину, то ширина будет определяться выражением

$$\delta\nu = \frac{0{,}56}{\pi}A = 0{,}18\,A. \tag{28}$$

Конечно, для реальных спектральных линий помимо естественного уширения, которое обусловлено рассмотренной в этой работе причиной, нужно учитывать уширение, связанное с эффектом Допплера и давлением. Более того, подобные эффекты вызывают уширение линий, вообще говоря, гораздо больше их естественной ширины, так что непосредственное измерение последней в случае линий испускания представляется практически невозможным, и ее значение получается лишь косвенно — через измерение константы A.

Из дисперсионной теории Шредингера можно получить, что

$$r_{12}^2 = \frac{h}{8\pi^2 m}\,\frac{D}{\nu_2 - \nu_1},$$

где D — число электронных осцилляторов на каждый атом, которое, как известно, может быть найдено из измерений аномальной дисперсии[4] и которое в общем случае по порядку величины оказывается равным единице. Подставляя это значение в формулу (17), находим величину константы A, которая, в свою очередь, будучи подставлена в соотношение (28), дает ширину линии

$$\delta\nu = 0{,}18\frac{4\pi^2}{3}\frac{e}{c^3 m}D(\nu_2 - \nu_1)^2, \qquad \delta\lambda = 6{,}7\cdot10^{-5}D\ \text{Å}.$$

Например, для линии D_2 натрия $D = {}^2/_3$ и, следовательно, $\delta\lambda = 4{,}5\cdot10^{-5}$ Å.

---

[4] Значение D можно также получить по ширине линий поглощения; для D-линий натрия эта величина приводится в работе Минковского (Zs. f. Phys., **1926**, **36**, 839).

К статьям 35, 36

После того как Ферми разработал статистику газа частиц, подчиняющихся принципу Паули, он подумал о применении этого метода для описания полностью вырожденного состояния электронов в атоме, учитывая при этом, что не следует ожидать от результатов высокой точности, поскольку число электронов все же не достаточно велико. Подобного рода соображения намечаются уже в дискуссии на конференции в Комо (она цитируется во вводных замечаниях к статье 25), а к осени 1927 г. они принимают законченную форму. Ему удалось легко получить дифференциальное уравнение для среднего потенциала в атоме как функции расстояния. Поскольку его решение, удовлетворяющее соответствующим граничным условиям, нельзя выразить в замкнутой форме, Ферми решил уравнение численно с помощью небольшого примитивного арифмометра. Такая вычислительная работа заняла у него, вероятно, неделю. Э. Майорана, который умел молниеносно считать и был человеком скептическим, решил проверить вычисления Ферми. Он проделал это, преобразовав исследуемое уравнение в уравнение Риккати, и решил последнее численно. Результат оказался в полном согласии с результатом Ферми.

Ферми ничего не подозревал об аналогичных, по существу, выводах, к которым ранее пришел Томас (L. H. Thomas. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1927, *23*, 542). Статья Томаса была представлена в Кембриджское философское общество 6 ноября 1926 г., в то время как заметка Ферми была представлена на заседании Академии Линчей 4 декабря 1927 г. Таким образом, Томас примерно на год опередил Ферми, который узнал о статье Томаса лишь в конце 1928 г., когда ему указал на нее один из иностранных теоретиков (не установлено, кто именно), побывавших в Риме. Это обстоятельство объясняет отсутствие каких-либо ссылок на работу Томаса даже в последующих статьях Ферми.

Эта статистическая модель, ныне называемая обычно моделью Томаса — Ферми, оказалась очень полезной при оценке различных свойств атомов (в частности, при вычислении приближенных одноэлектронных собственных функций) всякий раз, когда можно было пожертвовать высокой точностью ради простоты и легкости вычислений. Среди других важных приложений метода можно упомянуть его использование в разработанной Блохом, Бете и другими теории тормозной способности вещества по отношению к быстрым заряженным частицам.

Первые приложения этого метода принадлежат Ферми; некоторые другие — его помощникам. Эти приложения описаны в следующих статьях.

В статье 36 автор вычисляет среднее число электронов с заданной величиной момента импульса в зависимости от атомного номера. Теоретические кривые сравниваются с экспериментальными данными. Теория довольно точно предсказывает значения Z, при которых начинают заполняться орбиты с моментом импульса 0, 1, 2, а следовательно, и начало ряда редкоземельных элементов — состояний $4f$. Гораздо позже, когда Ферми уже был в Колумбийском университете, этим же методом воспользовалась М. Гепперт-Майер (M. G. Mayer. Phys. Rev., 1941, **60**, 184), чтобы предсказать начало заполнения состояний $5f$.

В работе [Б46] статистический потенциал используется для расчета поправки Ридберга к s-уровням всех элементов; ее можно получить из приближенного решения

уравнения Шредингера для s-электрона нулевой энергии. Экспериментальные значения флуктуируют вблизи теоретической кривой.

Работа [Б47] представляет собой короткую заметку, в которой резюмируются результаты, подробно описанные в статье 36. Работы [Б48] и [Б49] являются немного измененными вариантами (на немецком языке) статей 35, 36 и [Б46].

Ф. Разетти

35

СТАТИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВ АТОМА*

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы получить некоторые сведения о распределении электронов в тяжелом атоме, рассматривая эти электроны, число которых предполагается большим, с помощью статистического метода, или, иными словами, считая их электронным газом, окружающим ядро.

Этот электронный газ, разумеется, находится в условиях полного вырождения, так что классическая статистика к нему неприменима; вместо нее нужно пользоваться статистикой в той форме, которую предложил автор [1] и которая основывается на применении принципа исключения Паули в теории газов. Благодаря этому кинетическая энергия электронов в тех условиях, когда они находятся внутри атома, оказывается гораздо больше, чем это следовало бы из принципа равномерного распределения энергии, и практически не зависит от температуры, по крайней мере до тех пор, пока последняя не превысит определенный предел.

В этой заметке мы покажем прежде всего, каким образом можно статистически вычислить распределение электронов вокруг ядра, и рассчитаем с его помощью энергию, необходимую для полной ионизации атома, т. е. для отрыва от него всех электронов. Расчет распределения электронов вокруг ядра позволяет, кроме того, установить поведение потенциала на различных расстояниях от ядра и, следовательно, найти электрическое поле, в котором находятся электроны атома. Впоследствии я надеюсь продемонстрировать это, использовав такое распределение для приближенного вычисления энергии связи отдельных электронов и для решения некоторых вопросов, касающихся структуры периодической системы элементов.

---

* *Un metodo statistico per la determinazione di alcune proprietà dell'atomo.* Rend. Lincei, 1927, 6, 602—607. Представлено членом Академии О. М. Корбино на заседании 4 декабря 1927 г.

[1] E. Fermi. Zs. f. Phys., 1926, 36, 902 (статья 25).

Чтобы получить распределение электронов, нужно найти прежде всего в каждой точке связь их плотности с электрическим потенциалом. Если V — потенциал, то энергия электрона будет равна $-eV$, и, таким образом, в соответствии с классической статистикой плотность электронов была бы пропорциональна $e^{eV/kT}$. Согласно же новой статистике связь плотности с температурой имеет следующий вид:

$$n = \frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} F\left(\alpha e^{\frac{eV}{kT}}\right), \tag{1}$$

где α постоянна для всего газа; функция F в нашем случае (полное вырождение) имеет асимптотическое выражение

$$F(A) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\ln A)^{3/2}. \tag{2}$$

Поэтому в нашем случае

$$n = \frac{2^{7/2}\pi m^{3/2} e^{3/2}}{3h^3} v^{3/2}, \tag{3}$$

где

$$v = V + \frac{kT}{e} \ln \alpha \tag{4}$$

представляет собой потенциал с точностью до аддитивной постоянной. Заметим теперь, что, поскольку в нашем случае речь идет об электронном газе, нужно принять во внимание тот факт [2], что статистический вес электронов равен 2 (соответственно двум возможным ориентациям вращающегося электрона); таким образом, в действительности для плотности электронов следует принять значение, равное удвоенному значению (3), т. е. имеет место равенство

$$n = \frac{2^{9/2}\pi m^{3/2} e^{3/2}}{3h^3} v^{3/2}. \tag{5}$$

Если бы в нашем случае была справедлива классическая статистика, средняя кинетическая энергия электронов равнялась бы $(^3/_2)\, kT$. Согласно же новой статистике она задается выражением

$$L = \frac{3}{2} kT\, G\left(\alpha e^{\frac{eV}{kT}}\right) / F\left(\alpha e^{\frac{eV}{kT}}\right),$$

где G — функция, которая в случае полного вырождения имеет следующее асимптотическое выражение:

$$G(A) = \frac{8}{15\sqrt{\pi}} (\ln A)^{5/2}.$$

---

[2] W. Pauli. Zs. f. Phys., 1927, 41, 81.

Поэтому оказывается, что в нашем случае

$$L = \frac{3}{5} ev. \tag{6}$$

Вспомним теперь, что плотность электрического заряда в некоторой точке равна, очевидно, $-ne$ и, следовательно, потенциал v удовлетворяет уравнению

$$\Delta v = 4\pi ne = \frac{2^{13/2}\pi^2 m^{3/2} e^{5/2}}{3h^3} v^{3/2}. \tag{7}$$

Далее, в нашем случае плотность будет, очевидно, функцией только расстояния r до ядра; поэтому уравнение (7) можно записать в виде

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dv}{dr} = \frac{2^{13/2}\pi^2 m^{3/2} e^{5/2}}{3h^3} v^{3/2}. \tag{8}$$

Ясно, что если через Z обозначить атомный номер нашего атома, то будут иметь место равенства

$$\lim_{r=0} rv = Ze, \tag{9}$$

$$\int n d\tau = 4\pi \int_0^\infty r^2 n dr = Z \quad (d\tau \text{ — элемент объема}).$$

Учитывая соотношение (5), последнее равенство можно записать в виде

$$\frac{2^{13/2}\pi^2 m^{3/2} e^{5/2}}{3h^3} \int_0^\infty v^{3/2} r^2 dr = Ze. \tag{10}$$

Таким образом, отыскав функцию, которая удовлетворяет уравнению (8) с двумя условиями (9) и (10), получим потенциал v.

Решение этой задачи упрощается, если заменить переменные r, v пропорциональными им переменными x, ψ, положив

$$r = \mu x, \qquad v = \gamma\psi, \tag{11}$$

где

$$\mu = \frac{3^{2/3} h^2}{2^{13/3}\pi^{4/3} m e^2 Z^{1/3}}, \qquad \gamma = \frac{2^{13/3}\pi^{4/3} m Z^{4/3} e^3}{3^{2/3} h^2}. \tag{12}$$

После этого соотношения (8), (9) и (10) принимают вид

$$\psi'' + \frac{2}{x}\psi' = \psi^{3/2}, \qquad \lim_{x=0} x\psi = 1, \qquad \int_0^\infty \psi^{3/2} x^2 dx = 1. \tag{13}$$

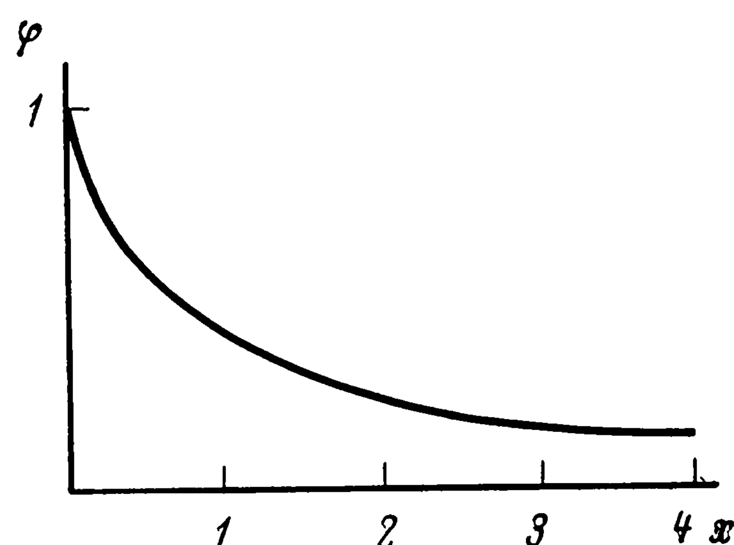
Далее и эти соотношения упрощаются, если положить

$$\varphi = x\psi. \tag{14}$$

Действительно, они переходят в следующие соотношения:

$$\varphi'' = \varphi^{3/2}/\sqrt{x}, \qquad \varphi(0) = 1, \qquad \int\limits_0^\infty \varphi^{3/2}\sqrt{x}dx = 1. \tag{15}$$

Легко видеть, что последнее условие сразу же выполняется, если φ обращается в нуль при $x = \infty$. Остается найти, следовательно, решение первого уравнения (15) при двух предельных условиях $\varphi(0) = 1$, $\varphi(\infty) = 0$.



Поскольку мне не удалось проинтегрировать это уравнение в общем виде, я решил его численно. На рисунке функция $\varphi(x)$ представлена графически; для значений x вблизи нуля

$$\varphi(x) = 1 - 1{,}58x + \frac{4}{3}x^{3/2} + \ldots \tag{16}$$

Таким образом, задача определения электрического потенциала атома на заданном расстоянии от ядра решена. Он определяется выражением

$$v = \gamma\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{\gamma\mu}{r}\varphi(x) = \frac{Ze}{r}\varphi\left(\frac{r}{\mu}\right). \tag{17}$$

Поэтому можно сказать, что в любой точке величина потенциала такова, как если бы он был обусловлен эффективным зарядом

$$Ze\varphi\left(\frac{r}{\mu}\right).$$

Перейдем теперь к вычислению полной энергии атома; ее следует вычислять как сумму кинетической энергии всех электронов и потенциальной энергии ядра и электронов. Проще, однако, учесть то обстоятельство, что в атоме полная энергия равна (с точностью до знака) кинетической (что, впрочем, в нашем случае можно проверить простым вычислением).

Следовательно, имеет место равенство

$$W = -\int L n d\tau;$$

принимая во внимание соотношения (5), (6), (11), (12) и (14), находим

$$W = -\frac{3}{5}\int_0^\infty r^2 n v dr = -\frac{2^{13/3}3^{1/3}\pi^{4/3}me^4Z^{7/3}}{5h^2}\int_0^\infty \frac{\varphi^{5/2}}{\sqrt{x}}dx.$$

Последний интеграл можно вычислить, если вспомнить, что φ удовлетворяет равенствам (15) и (16); тогда получаем

$$\int_0^\infty \frac{\varphi^{5/2}}{\sqrt{x}}dx = -\frac{5}{7}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x=0} = \frac{5}{7}1{,}58.$$

Таким образом, имеем

$$W = -1{,}58\,\frac{2^{13/3}3^{1/3}\pi^{4/3}me^4Z^{7/3}}{7h^2} = -1{,}58\,\frac{2^{7/3}3^{1/3}}{7\pi^{2/3}}RhZ^{7/3},$$

т. е.

$$W = -1{,}54RhZ^{7/3}, \qquad (18)$$

где через R обозначена постоянная Ридберга, так что $-Rh$ представляет собой энергию основного состояния атома водорода.

Равенство (18) определяет энергию, необходимую для отрыва от атома всех его электронов. Поскольку формула (18) выведена на основе статистических предположений, она, разумеется, становится справедливой лишь при больших Z; в самом деле, для атома водорода формула (18) дает $W = -1{,}54\,Rh$, тогда как в действительности $W = -Rh$, т. е. расхождение составляет 54%. Для полной ионизации атома гелия энергия должна, очевидно, равняться сумме энергий ионизации He и He^+, т. е.

$$-W = (1{,}8 + 4)\,Rh = 5{,}8\,Rh,$$

а из теории получается $1{,}54\cdot 2^{7/3}\,Rh = 7{,}8\,Rh$. В этом случае, следовательно, расхождение с опытом уменьшается до 35%. Для элементов, которые следуют непосредственно за гелием (Li, Be, B, C), почти вся энергия атома обязана всего лишь двум K-электронам (в углероде около 86%), и, таким образом, статистический метод наверняка еще даст значительные отклонения от опыта. Действительно, для C оно оказывается около 34%.

Для элементов же большого атомного веса следует ожидать, что расхождения статистической теории с эмпирическими данными станут гораздо меньше. К сожалению, для точного сопоставления не хватает таких данных и можно основываться только на грубых оценках постоянных экранирования для различных орбит; тем не менее даже такие оценки обнаруживают гораздо лучшее согласие.

См. вводные замечания к статье 35.

36

О СТАТИСТИЧЕСКОМ ВЫВОДЕ НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВ АТОМА. ПРИЛОЖЕНИЕ К ТЕОРИИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЭЛЕМЕНТОВ *

В заметке, недавно опубликованной в этих «Rendiconti» (статья 35.— *Ред.*), мне представилась возможность показать, каким образом можно получить усредненные данные о распределении электронов вокруг ядра тяжелого атома; при этом предполагалось, что электроны образуют вокруг ядра своего рода газовую атмосферу, для описания которой можно воспользоваться статистическими соображениями. Так как плотность такого электронного газа велика, то при обычных температурах он находится в условиях полного вырождения. Цель этой второй заметки состоит в том, чтобы показать приложение статистического метода к теории периодической системы элементов.

Теория периодической системы основывается, как известно, на предложенной Бором [1] и Стонером [2] классификации атомных электронов по группам и принципе Паули. Электроны классифицируются с помощью двух квантовых чисел — главного и азимутального, n и k; при этом n может принимать все целые значения от 1 до ∞, k принимает, согласно первоначальной классификации Бора, целые значения от 1 до n, а в соответствии с новой механикой — значения от 0 до $n-1$. С другой стороны, известно, что результаты новой механики можно получить в первом приближении с помощью обычной квантовой теории, если только вместо целых значений $0, 1, 2, \ldots, n-1$ квантовому числу k приписать те же значения, но увеличенные на $^1/_2$.

Поскольку в данной работе мы воспользуемся методами старой квантовой теории, для k будут взяты значения $^1/_2$, $^3/_2$, $^5/_2$, $^7/_2$, ..., соответственно s-, p-, d-, f-, ..., -электронам. Из принципа Паули следует, что в каждом полностью определенном квантовом состоянии атома может находиться не более одного электрона. Далее, при фиксированных n и k существует $4k$ полностью определенных квантовых состояний, имеющих главное и азимутальное квантовые числа n и k, и в атоме, следовательно, могут находиться максимум $4k$ электрона n_k.

---

* *Sulla deduzione statistica di alcune proprietà dell'atomo. Applicazione alla teoria del sistema periodico degli elementi.* Rend. Lincei, 1928, 7, 342—346. Представлено членом Академии О. М. Корбино на заседании 8 января 1928 г.

1 N. Bohr. Zs. f. Phys., 1922, 9, 1.

2 E. C. Stoner. Phil. Mag., 1924, 48, 719.

В основном состоянии атома его Z электронов (Z — атомный номер) занимают Z свободных состояний, которым отвечает наименьшая энергия. Если бы каждый электрон двигался под действием одиночного электрического заряда, сосредоточенного в ядре, как в случае водорода, то энергия зависела бы только от главного квантового числа n (с точностью до малых поправок, связанных с релятивистскими эффектами и вращением электрона). В действительности же каждый электрон движется в поле ядерного заряда Ze, уменьшенного вследствие экранирующего действия окружающих ядро электронов. Можно считать, таким образом, что электрон подвержен действию эффективного заряда $Z_{эфф}$, который изменяется с расстоянием r электрона до ядра, а именно: он уменьшается от Ze до e при увеличении r от 0 до ∞. Это приводит к тому, что при равных n электроны, имеющие меньшие k (такие электроны движутся по орбитам с большим эксцентриситетом и проникают внутрь атома, подходя близко к ядру), оказываются под действием большего эффективного заряда и имеют, следовательно, наибольшие энергии связи.

Часто бывает даже так, что электроны с большим k связаны слабее, чем электроны, у которых n больше, но k меньше. Этот факт приводит к важным последствиям в строении периодической системы; в самом деле, он позволяет качественно учесть то обстоятельство, что в последовательности элементов некоторые электронные группы, которые отвечают бóльшим значениям k, начинают заполняться позже других групп, имеющих бóльшие n и меньшие k. Так, например, 14 состояний $4f$ ($n = 4$, $k = {}^7/_2$) начинают последовательно заполняться у элементов с атомными номерами от 58 до 71, составляющих группу редких земель; состояния s с $n = 6$ у этих элементов уже заняты. Точно так же у скандия ($Z = 21$) состояния $3d$ ($n = 3$, $k = {}^5/_2$) начинают заполняться, когда уже заняты положения $4s$. Как известно, с этими обстоятельствами связаны различные особенности, которые встречаются в периодической системе.

Чтобы точно предсказывать такие особенности, нужно знать характер изменения эффективного заряда на различных расстояниях от ядра; развитая в предыдущей заметке статистическая теория позволяет, по крайней мере приближенно, решить эту задачу. Посмотрим теперь, каким образом ее результатами можно воспользоваться для того, чтобы рассчитать образование в атоме различных электронных групп. Самый прямой путь решения этой задачи состоял бы в вычислении энергии различных электронных орбит в силовом поле, обусловленном действием ядра и остальных электронов атома. Этот подход, однако, ведет к значительным трудностям, и я предпочел пойти другим путем, который хотя и приводит к менее полным результатам, но позволяет быстрее достичь цели. В предыдущей заметке было вычислено статистическое распределение электронов на различных расстояниях от ядра; исходя из теории вырождения газа, легко вычислить также и распределение тех же электронов по скоростям, и, таким образом, можно установить, сколько электронов имеет определенную величину момента импульса, т. е. заданное азимутальное квантовое число k.

Из результатов предыдущей заметки следует (в тех же обозначениях), что плотность электронов n на расстоянии r от ядра равна

$$n = \frac{2^{9/2}\pi m^{3/2}e^{3/2}}{3h^3} V^{3/2} = \frac{2^{9/2}\pi m^{3/2}Z^{3/2}e^3}{3h^3}\frac{1}{r^{3/2}}\varphi^{3/2}\left(\frac{r}{\mu}\right). \tag{1}$$

С другой стороны, учитывая, что статистический вес электронов равен 2, из теории вырождения [3] легко получить плотность электронов со скоростями в пределах от v до $v + dv$ для случая полного вырождения:

$$n(v)\,dv = \begin{cases} \dfrac{8\pi m^3}{h^3} v^2 dv & \text{при} \quad v < \left(\dfrac{3}{8\pi}\right)^{1/3}\dfrac{hn^{1/3}}{m}, \\ 0 & \text{при} \quad v > \left(\dfrac{3}{8\pi}\right)^{1/3}\dfrac{hn^{1/3}}{m}; \end{cases} \tag{2}$$

отсюда следует, что число электронов, момент импульса которых заключен в пределах от p до $p + dp$ и находящихся в объеме $d\tau$, равно

$$dN = 8\pi d\tau \frac{m^3}{h^3}\frac{p\,dp}{m^2r^2}\sqrt{\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{2/3}\frac{h^3n^{2/3}}{m^2} - \frac{p^2}{m^2r^2}}. \tag{3}$$

Вспоминая, что $p = (h/2\pi)k$, и подставляя вместо n его выражение (1), а вместо $d\tau$ — величину $4\pi r^2 dr$, находим

$$dN = 4k\,dk\,dr\sqrt{\frac{8mZe^2}{h^2}\frac{1}{r}\varphi\left(\frac{r}{\mu}\right) - \frac{k^2}{\pi^2r^2}}.$$

Чтобы получить число N_k электронов с азимутальным квантовым числом в интервале dk, достаточно проинтегрировать предыдущее выражение по r при всех значениях, для которых корень является вещественным. Полагая $\xi = \mu r$ и учитывая, кроме того, выражение для μ (ср. предыдущую заметку), сразу же находим, что

$$N_k = \left(\frac{48}{\pi^2}\right)^{1/3} Z^{1/3} k\,dk\,\Phi\left(\frac{2^{4/3}k^2}{3^{2/3}\pi^{2/3}Z^{2/3}}\right), \tag{4}$$

где

$$\Phi(x) = \int \frac{d\xi}{\xi}\sqrt{\xi\varphi(\xi) - x}, \tag{5}$$

причем интегрирование проводится по всем положительным значениям ξ, для которых корень вещественен. Функцию $\Phi(x)$ можно определить численно, исходя из значений φ, уже рассчитанных в предыдущей заметке; оказывается, что ее значения равны

$\Phi(0{,}49) = 0$; $\Phi(0{,}4) = 0{,}36$; $\Phi(0{,}3) = 0{,}87$;
$\Phi(0{,}2) = 1{,}48$; $\Phi(0{,}1) = 2{,}20$; $\Phi(0) = 3{,}2$

и для $x > 0{,}49$ $\Phi(x) = 0$.

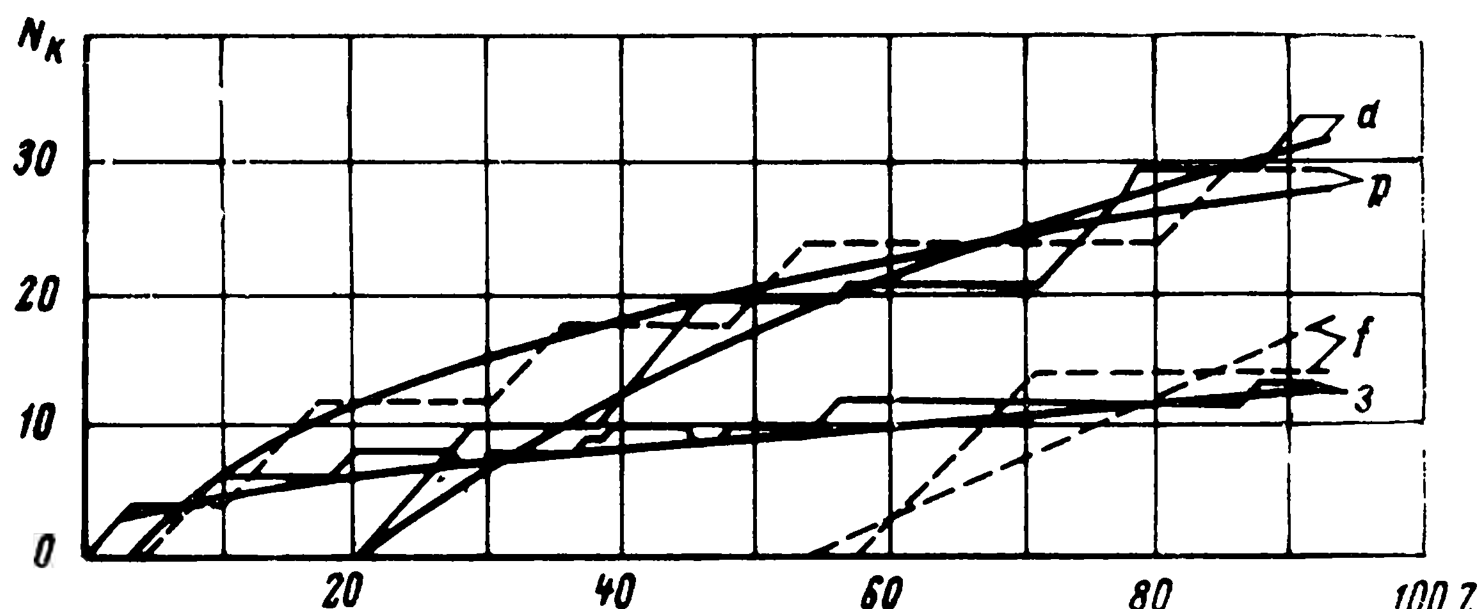
---

[3] E. Fermi. Zs. f. Phys., 1926, 36, 902. (Статья 25).

Таким образом, решена также и задача определения количества электронов, обладающих заданным азимутальным квантовым числом k, в зависимости от атомного номера Z; действительно, полагая в формуле (4) $dk = 1$, находим

$$N_k = \left(\frac{48}{\pi^2}\right)^{1/3} Z^{1/3} k \Phi \left(\frac{2^{4/3} k^2}{3^{2/3} \pi^{2/3} Z^{2/3}}\right). \qquad (6)$$

Результаты теории и их сравнение с опытом представлены на рисунке; на нем имеется четыре пары кривых. Каждая пара состоит из гладкой



кривой и из ломаной линии и относится к некоторому значению азимутального квантового числа (эти пары соответствуют: $k = {}^1/_2, {}^3/_2, {}^5/_2, {}^7/_2$, т. е. s-, p-, d-, f-электронам). Полученная теоретически гладкая кривая описывает количество электронов атома, обладающих указанными азимутальными квантовыми числами, в зависимости от Z (отложенного по оси абсцисс); ломаная же линия описывает действительный ход той же самой величины. Как видно, согласие удовлетворительное, по крайней мере, в общих чертах; разумеется, в силу все той же статистической природы развитой нами теории не следует ожидать, что она отразит, в частности, различные зигзаги эмпирических кривых. Однако их общий ход теория действительно передает достаточно верно. Отметим, в частности, что из теории следует значение атомного номера, при котором в атоме впервые появляются s-, p-, d-, f-электроны. Такими атомными номерами являются те, при которых четыре теоретические кривые на графике имеют абсциссу, равную 1, т. е. 1, 5, 21, 58 соответственно. В самом деле, s-электроны появляются уже у водорода ($Z = 1$); p-электроны — у бора ($Z = 5$), d-электроны — у скандия ($Z = 21$), отмечая начало аномалии первого большого периода. Наконец, f-электроны впервые появляются у церия ($Z = 58$), указывая на начало аномальной группы редких земель. Таким образом, мы видим, что эта теория позволяет предсказывать с хорошей точностью атомные номера, при которых начинаются различные аномалии периодической системы элементов.

К статье 37

В 1928 г. Ферми был приглашен в Лейпциг для участия в конференции, проходившей в узком составе под председательством П. Дебая. Это приглашение считалось знаком уважения и давало возможность сообщить избранной интернациональной аудитории о работах, выполняемых в Риме. Для своего доклада Ферми избрал обзор статистической модели атома и ее приложений (которые разрабатывались им и его сотрудниками) к различным атомным задачам.

Это направление являлось основным в деятельности римского Института физики за 1928 г.

Ф. Разетти

37

О ПРИМЕНЕНИИ СТАТИСТИЧЕСКОГО МЕТОДА В ПРОБЛЕМЕ СТРОЕНИЯ АТОМА *

В нескольких недавно опубликованных заметках я предложил метод расчета различных свойств атомов: электроны атома рассматриваются статистически как электронный газ, образующий своего рода атмосферу вокруг ядра. В этой работе я бы хотел сообщить о результатах, достигнутых к настоящему времени мною и моими сотрудниками[1], и о возможном развитии использованного метода.

Итак, мы откажемся от точного решения задачи о строении атома со многими электронами, заменив индивидуальное рассмотрение каждой переменной статистической трактовкой совокупности электронов. Таким образом, мы будем считать электроны вырожденным газом (плотность атомных электронов столь велика, что при обычных температурах условие вырождения всегда выполняется), который вблизи ядра удерживается в равновесии за счет притяжения к ядру и отталкивания электронов друг от друга.

В качестве первой задачи определим распределение плотности такого газа вокруг ядра и ход электрического потенциала внутри атома в зависимости от расстояния r до ядра. Зная этот потенциал, можно вычислить значение любого терма, причем оказывается, что теория вполне удовлет-

---

* *Über die Anwendung der statistischen Methode auf die Probleme des Atombaues.* Falkenhagen, Quantentheorie und Chemie, Leipziger Vortraege, 1928, 95—111. Hirzel, Leipzig, 1928.

[1] E. Fermi. Rend. Lincei, 1927, **6**, 602; 1928, **7**, 342; 726; Zs. f. Phys., 1928, **48**, 73; **49**, 550; F. Rasetti. Rend. Lincei, 1928, **7**, 915; Zs. f. Phys., 1928, 49, 546. G. Gentile, E. Majorana. Rend. Lincei, 1928, **8**, 229.— *Прим. ред.*

ворительно описывает не только рентгеновские, но также и оптические термы. В этом обзоре мы остановимся на следующих вопросах:

§ 1. Теория образования электронных групп в периодической системе.
§ 2. Вычисление рентгеновских термов.
§ 3. Вычисление оптических термов.
§ 4. Вычисление интервалов оптических и рентгеновских мультиплетов.
§ 5. Соотношение интенсивностей линий в спектральных сериях.
§ 6. Теория группы редких земель.
§ 7. Теория сродства галогенов к электрону.
§ 8. Возможное развитие статистического метода.

Обозначим через n и V плотность электронов и электрический потенциал на расстоянии r от ядра. Между этими двумя функциями существует два соотношения; первое из них — уравнение Пуассона: $\Delta V = -4\pi\rho = 4\pi n e$. Поскольку V зависит только от r, это уравнение можно записать в виде

$$\Delta V = \frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} = 4\pi n e, \tag{1}$$

где e — элементарный заряд.

Второе соотношение между n и V дает статистическая связь плотности с потенциальной энергией; при этом классическая статистика приводила бы к больцмановскому соотношению между этими двумя величинами

$$n = n_0 e^{\frac{eV}{kT}}.$$

Поскольку же электронный газ, как мы уже говорили, полностью вырожден, между n и V существует следующая связь:

$$n = \frac{2^{9/2}\pi m^{3/2} e^{5/2}}{3h^3} V^{3/2}, \tag{2}$$

где m — масса электрона.

Отметим, что температура в это соотношение уже не входит; таким образом, следствием вырождения электронного газа является независимость распределения электронов от температуры. Исключив n из формул (1) и (2), находим

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} = \frac{2^{13/2}\pi^2 m^{3/2} e^{5/2}}{3h^3} V^{3/2}. \tag{3}$$

Это уравнение определяет потенциал как функцию r. Для V имеется два граничных условия

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{r=0} rV = Ze, \\ &\int n\,d\tau = Z \quad (d\tau \text{ — элемент объема}). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Таблица 1

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
0,00	1,000	0,8	0,485	8	0,037	38	0,0013
0,01	0,985	0,9	0,453	9	0,029	40	0,0011
0,02	0,972	1,0	0,425	10	0,024	45	0,00079
0,03	0,959	1,2	0,375	12	0,017	50	0,00061
0,04	0,947	1,4	0,333	14	0,012	55	0,00049
0,05	0,935	1,6	0,297	16	0,0093	60	0,00039
0,10	0,882	1,8	0,268	18	0,0072	65	0,00031
0,15	0,836	2,0	0,244	20	0,0056	70	0,00026
0,20	0,793	2,5	0,194	22	0,0045	75	0,00022
0,25	0,758	3,0	0,157	24	0,0037	80	0,00018
0,30	0,721	3,5	0,130	26	0,0031	85	0,00015
0,35	0,691	4,0	0,108	28	0,0026	90	0,00012
0,40	0,660	4,5	0,093	30	0,0022	95	0,00011
0,5	0,607	5,0	0,079	32	0,0019	100	0,00010
0,6	0,562	6	0,059	34	0,0017		
0,7	0,521	7	0,046	36	0,0015		

Здесь интеграл берется по всему пространству. Порядковый номер атома обозначается через Z. Первое равенство показывает, что вблизи ядра, где экранировки электронами нет, потенциал имеет форму Ze/r. Второе равенство выражает то обстоятельство, что полное число электронов равно Z; с помощью формулы (2) второе равенство можно записать как условие для V.

Если ввести новые переменные

$$x = r/\mu, \qquad \varphi = xV/\gamma, \tag{5}$$

где

$$\mu = \frac{3^{2/3}h^2}{3^{13/3}\pi^{4/3}me^2Z^{1/3}}, \qquad \gamma = \frac{2^{13/3}\pi^{4/3}me^3Z^{4/3}}{3^{2/3}h^2}, \tag{6}$$

то соотношения (3) и (4) принимают вид

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{\varphi^{3/2}}{\sqrt{x}}, \tag{7}$$

$$\varphi(0) = 1, \qquad \int_0^\infty \varphi^{3/2}\sqrt{x}\,dx = 1. \tag{8}$$

Нетрудно показать эквивалентность последнего условия тому, что функция φ должна обращаться в нуль при $x = -\infty$. Таким образом, из уравнения (7) с граничными условиями $\varphi(0) = 1$, $\varphi(\infty) = 0$ нужно определить функцию $\varphi(x)$. Численные значения $\varphi(x)$ приведены в табл. 1.

Зная функцию $\varphi(x)$, можно определить потенциал внутри атома; а именно, из формул (5) и (6) получаем

$$V = \frac{Ze}{r}\varphi\left(\frac{r}{\mu}\right). \tag{9}$$

Кроме того, из соотношений (2) и (9) находим плотность электронов n:

$$n = \frac{2^{9/2}\pi m^{3/2} Z^{3/2} e^3}{3h^3}\frac{1}{r^{3/2}}\varphi^{3/2}\left(\frac{r}{\mu}\right). \tag{10}$$

Теперь мы коротко остановимся на применениях изложенного метода.

§ 1. Теория образования электронных групп в периодической системе. Как известно, согласно Бору и Стонеру, в атоме с атомным номером Z, находящемся в нормальном состоянии, можно указать число электронов, которые относятся к некоторой заданной квантовой орбите. Если в этот атом добавить новый электрон, чтобы получился последующий элемент, то этот электрон будет располагаться на тех еще оставшихся свободными (в смысле запрета Паули) квантовых орбитах, которые обладают наименьшей энергией. В случае легких атомов орбиты с наименьшей энергией оказываются в то же время и орбитами с наименьшим главным квантовым числом n, так что в первом ряду периодической системы с ростом главного квантового числа электронные группы заполняются совершенно регулярно одна за другой. У тяжелых же атомов очень часто случается так, что орбита с бóльшим главным квантовым числом связана сильнее, чем орбита с меньшим n. Это, как известно, влечет за собой нерегулярности периодической системы; бывает, например, что электронная оболочка с заданным главным квантовым числом начинает заполняться, когда нижние оболочки застроены еще не полностью. Чтобы эти факты можно было предсказать теоретически, нужно уметь вычислять энергию любой орбиты. Но на энергию этой орбиты влияет экранировка других электронов; статистическая же теория дает приближенное распределение электронов и допускает, таким образом, приближенную оценку их экранирующего действия. Например, можно очень легко подсчитать количество электронов с заданным азимутальным квантовым числом k, имеющихся в атоме с атомным номером Z в нормальном состоянии.

Исходя из формулы (10), можно вывести плотность электронного газа на любом расстоянии от ядра. Из теории вырождения следует, что по известной в какой-либо точке плотности газа может быть определено

также и распределение электронов по скоростям (в той же точке). Отсюда можно без труда вычислить количество имеющихся в элементе объема электронов, моменты которых лежат в пределах от p до $p + dp$. Если измерять моменты в единицах $h/2\pi$, полагая, следовательно, $p = \frac{h}{2\pi}k$, то после интегрирования по всему объему атома получим полное число электронов, моменты которых лежат между двумя заданными значениями k и $k + dk$:

$$dN_k = \left(\frac{48}{\pi^2}\right)^{1/3} Z^{1/3} k\,dk\,\Phi\left(\frac{2^{4/3}k^2}{3^{2/3}\pi^{2/3}Z^{2/3}}\right); \tag{11}$$

здесь функция Φ определяется формулой

$$\Phi(A) = \int \sqrt{x\varphi(x) - A}\,\frac{dx}{x}, \tag{12}$$

а интеграл следует брать по всем вещественным значениям корня. Значения функции $\Phi(A)$ даются в табл. 2. При $A > 0{,}49$ всегда $\Phi(A) = 0$, поскольку в этом случае корень не имеет вещественных значений.

Таблица 2

A	0,49	0,4	0,3	0,2	0,1	0,0
$\varphi(A)$	0,00	0,36	0,88	1,48	2,2	3,2

Как известно, наилучшее согласие старой квантовой теории с опытом достигается, когда азимутальное квантовое число k принимает полуцелые значения, а именно $k = {}^1/_2,\ {}^3/_2,\ {}^5/_2,\ {}^7/_2$ для s-, p-, d-, f-электронов. Таким образом, мы получаем количество электронов атома, обладающих заданным азимутальным квантовым числом, подставив в формулу (11) полуцелое значение для k и 1 вместо dk:

$$N_k = \left(\frac{48}{\pi^2}\right)^{1/3} Z^{1/3} k\,\Phi\left(\frac{2^{4/3}k^2}{3^{2/3}\pi^{2/3}Z^{2/3}}\right). \tag{13}$$

На рис. 1 проводится сравнение представленных графически теоретических и экспериментальных результатов. На нем приведены четыре пары кривых; каждая пара относится к определенному значению k. (Эти четыре пары кривых относятся к s-, p-, d-, f-электронам, т. е. к $k = {}^1/_2,\ {}^3/_2,\ {}^5/_2,\ {}^7/_2$.) Каждая пара содержит гладкую кривую, которая описывает число N_k k-электронов согласно теории [формула (13)] в зависимости от порядкового номера элемента, и зигзагообразную линию, представляющую экспериментально найденные N_k из таблицы Стонера.

Разумеется, теория в силу своего статистического характера может и не передать тонких особенностей эмпирических кривых; тем не менее вид-

но, что общий ход соответствующих теоретических и экспериментальных кривых совершенно одинаков.

Из теории можно получить значения порядковых номеров элементов, с которых начинается новая группа периодической системы. Так, например, порядковыми номерами элементов, при которых, согласно теории, в атоме должны в первый раз появиться *s*-, *p*-, *d*-, *f*-электроны, являются те, для

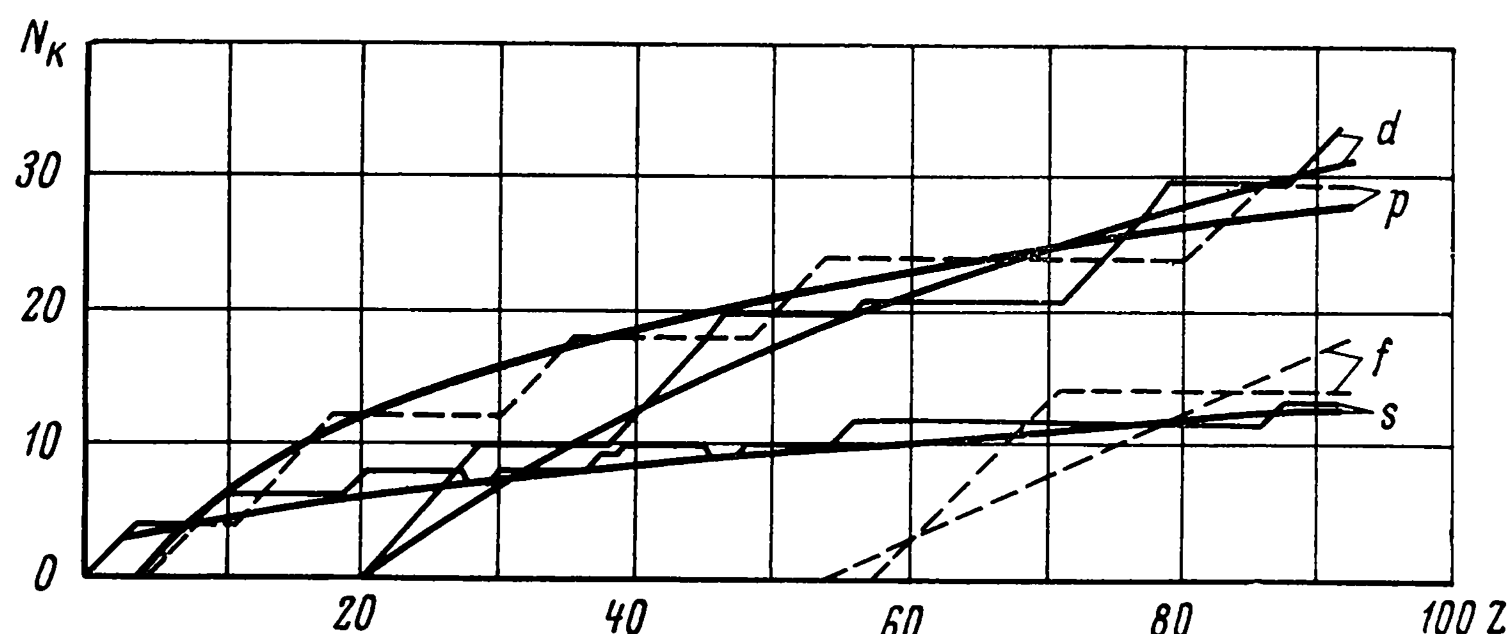


Рис. 1

которых ординаты четырех теоретических кривых принимают значение 1; на рис. 1 для этих порядковых номеров можно найти значения: 1, 5 21, 55. Действительно, *s*-электрон появляется уже у водорода ($Z = 1$); *p*-электроны впервые появляются у бора ($Z = 5$); *d*-электроны — у скандия ($Z = 21$), с которого начинается аномалия первого большого периода; *f*-электроны в первый раз появляются у церия ($Z = 58$), с которого начинается группа редких земель. Кроме того, теория приближенно указывает значения порядковых номеров, при которых появляются различные аномалии периодической системы.

§ 2. Вычисление рентгеновских термов. Информация об электрическом потенциале внутри атома позволяет вычислять энергии связи электронов в различных квантовых состояниях. При этом, вообще говоря, следует заметить, что квантовомеханическое вычисление терма для атома с Z электронами является $3Z$-мерной задачей (или, точнее, $4Z$-мерной, если при этом учитывать по Дираку и собственный момент электронов [2]). В первом приближении, однако, эту задачу можно свести к трехмерной, принимая в качестве модели первого приближения, что на каждый электрон действуют по отдельности потенциалы ядра и остальных $Z - 1$ электронов, для которых справедливо статистическое пространственное распределение. В соответствии с формулой (9) для атома с порядковым номером

Ср. Falkenhagen, Quantentheorie und Chemie, 1928, доклад П. А. М. Дирака, стр. 85 и далее.

$Z-1$ электрический потенциал на расстоянии r от ядра есть

$$\frac{(Z-1)\,e}{r}\,\varphi\left(\frac{r}{\mu}\right). \qquad (14)$$

Чтобы перейти от этого атома к атому с порядковым номером Z, заряд ядра нужно увеличить на один элементарный заряд, а к электронному облаку добавить один электрон. В первом приближении потенциальная энергия этого электрона будет равна сумме энергий

$$-\frac{(Z-1)\,e^2}{r}\,\varphi\left(\frac{r}{\mu}\right),$$

обусловленной потенциалом (14), и

$$-\frac{e^2}{r},$$

которая связана с увеличением заряда ядра. Таким образом, потенциальная энергия электрона равна

$$V(r) = -\frac{e^2}{r}\left\{1+(Z-1)\,\varphi\left(\frac{r}{\mu}\right)\right\}. \qquad (15)$$

В рамках этого метода будет сделано два приближения. Во-первых, не будет учитываться поляризуемость остова атома; однако это существенно главным образом для термов, орбиты которых проходят вне остова (см. в связи с этим § 8). Во-вторых, мы пренебрежем резонансными эффектами [3] (в смысле гейзенберговой теории двух тел.) Но резонанс возникает в основном благодаря квантовым орбитам, которым отвечают почти такие же разности энергий, что и для оптического электрона; таким образом, резонанс не очень велик для оптических орбит с большими главными квантовыми числами, а также и для рентгеновских термов, так как ни в одном из этих случаев потенциал возмущения не является большим по сравнению с потенциалом (15).

Благодаря статистическому характеру теории можно ожидать, что она лучше согласуется с опытом для электронных орбит, расположенных в глубоких областях атома, поскольку статистическое распределение электронов в этих областях лучше представляет истинное распределение. Поэтому для рентгеновских термов можно ожидать лучшего согласия, чем для оптических; впрочем, статистическая теория может дать точное описание лишь тех свойств атома, которые регулярным образом зависят от атомного номера.

Что касается рентгеновских термов, то наибольший интерес представляет вычисление тех из них, для которых характерно большое экранирование, так как при малом экранировании можно хорошо оценить зна-

---

Ср. там же, доклад Лондона, стр. 59 и далее.

чение, например, K-термов, даже не зная точного распределения электронов. Напротив, в случае, например, M-термов экранировка очень велика; у многих атомов она даже превышает эффективный заряд ядра. Ее величина в большой степени зависит от распределения электронов.

В рамках статистической теории Разетти рассчитал M_3-термы. Вычисления проводились следующим методом. Скаляр поля [4] ψ волнового уравнения Шредингера для M_3-терма водорода имеет (как функция r) очень резкий максимум, так что практически все значения ψ сконцентрированы в довольно тонком сферическом слое. Если ньютоновский потенциал водорода заменить потенциалом вида (15), распределение остается качественно тем же самым. Поэтому в первом приближении волновая функция и значение терма будут определяться ходом потенциала в некотором тонком сферическом слое. В таком слое потенциал (15) можно всегда приближенно представить в форме

$$V(r) = A + \frac{B}{r} + \frac{C}{r^2}, \qquad (16)$$

где A, B, C — константы, которые должны быть определены так, чтобы выражение (16) возможно точнее представляло бы потенциал (15) в указанном слое. Но для потенциала вида (16) волновое уравнение можно решить точно и получить, следовательно, значение энергии в первом приближении. По теории возмущений можно легко получить и второе приближение; однако поправка к терму всегда очень мала.

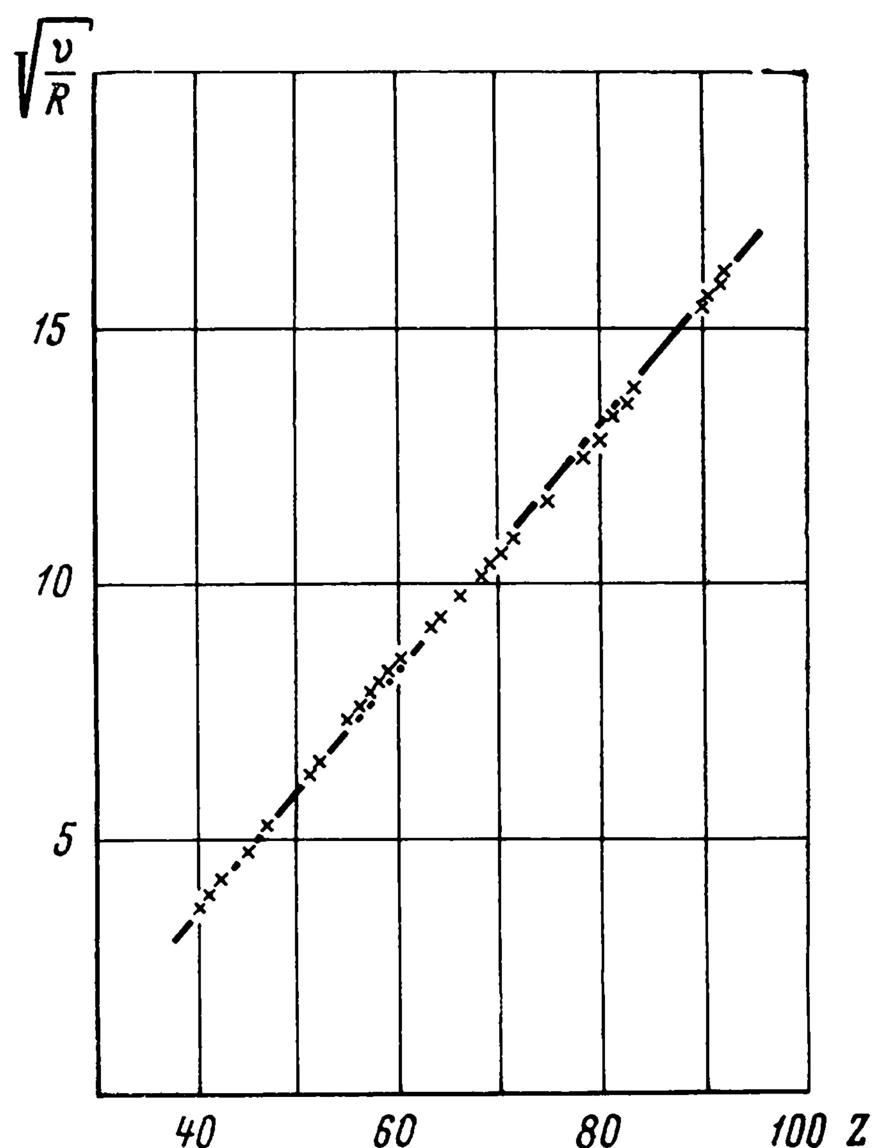


Рис. 2

Свои результаты Разетти представил графически. На рис. 2 по оси абсцисс отложен порядковый номер атомов, а по оси ординат, как обычно, — корень квадратный из величины M_3-терма. Крестики представляют экспериментальные значения, кривая — теоретические. Поскольку в теории не учитывалось влияние релятивистских эффектов и собственного момента электрона, в теоретические результаты введена соответствующая поправка. Как видно, едва ли можно ожидать лучшего согласия теории с опытом.

§ 3. Вычисление оптических термов. Как известно, регулярность оптических энергетических уровней в зависимости от атомного номера прояв-

---

[4] См. примечание на стр. 232.— *Прим. ред.*

ляется гораздо слабее, чем у рентгеновских термов. На рис. 3 по оси абсцисс отложен атомный номер, а по оси ординат — поправка Ридберга к s-терму. Точки представляют эмпирические значения поправки Ридберга; для атомов, обладающих более чем одним рядом s-термов, указывается среднее значение. Мы видим, что экспериментальные точки распределены довольно нерегулярно, однако все они лежат вблизи гладкой кривой [5]. Сплошная кривая на графике описывает теоретические значения поправки Ридберга к s-терму, полученные с помощью статистического потенциала (15). Как видно, теория вполне верно воспроизводит общий ход; но и в этом случае статистическое рассмотрение не передает тонких различий при переходе от атома к атому. Причиной этого является то, что некоторая часть s-орбиты, выражаясь языком старой квантовой

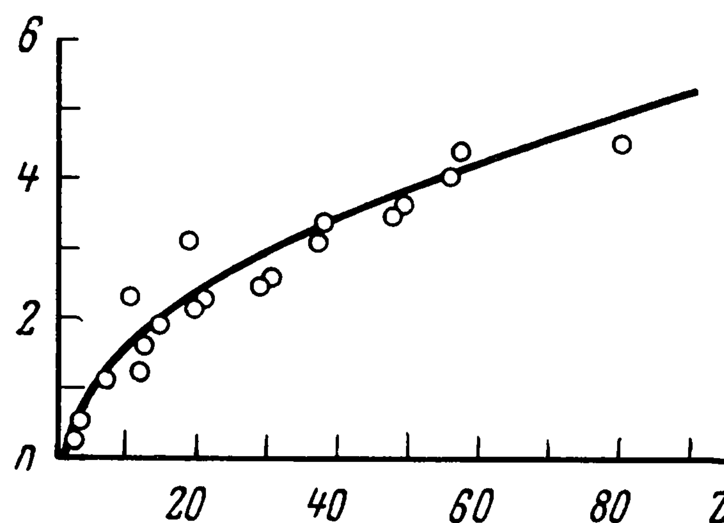


Рис. 3

теории, проходит вне атома, а другая ее часть подходит близко к ядру. Таким образом, поправка Ридберга частично зависит от того отрезка орбиты, который проходит внутри атома, а частично определяется тем ее отрезком, который расположен во внешнем слое. Нерегулярности будут, следовательно, возникать в этом внешнем слое, поскольку при переходе от атома к атому он изменяется нерегулярно в соответствии с их химическим характером. Естественно, что статистическая теория может лишь приближенно передать подобные нерегулярности.

Теоретическая кривая на рис. 3 получена следующим методом: исходя из выражения (15) для потенциала отыскивают решение волнового уравнения Шредингера для s-терма, соответствующее нулевому значению энергии, т. е. главному квантовому числу $n = \infty$. Это решение можно получить без большого труда, вычислив с помощью асимптотического выражения его первую часть (r мало) и продолжить ее в область больших r, преобразовав, согласно Вентцелю [6], волновое уравнение в уравнение

---

[5] Экспериментальные точки, относящиеся к благородным газам Ne ($Z = 10$) и Ar ($Z = 18$) — ошибочны. Правильные значения 1,36 и 2,20 соответственно лежат несколько ниже теоретической кривой, а не намного выше ее.— *Прим. ред. итало-амер. издания.*

[6] G. Wentzel. Zs. f. Phys., 1926, 38, 518.

Риккати. Полученное таким путем решение сравнивается с соответствующим решением для случая водорода. Поскольку при больших r потенциал (15) переходит в ньютоновский, частота узловых точек при таких r для обоих решений одна и та же. При малых же r узлы первого решения группируются плотнее, чем узлы второго, так как потенциал внутри нашего атома нарастает быстрее, чем в случае водорода. Разность чисел корней у этих двух решений сразу же дает разность их (бесконечно больших) квантовых чисел, т. е. поправку Ридберга.

§ 4. **Вычисление интервалов оптических и рентгеновских мультиплетов.** Статистическую теорию мультиплетных интервалов развили Дж. Джентиле и Э. Майорана. Они рассчитали для цезия интервалы рентгеновского дублета M_3 и дублетов 6^2P и 7^2P. Метод состоял в следующем: сначала нужно было численно решить волновое уравнение со статистическим потенциалом. Эта часть работы довольно длинна, поскольку неизвестны собственные значения; поэтому их следует пытаться искать вблизи значений энергии, известных из опыта. Как только вычислена собственная функция, сразу же можно рассчитать обусловленное собственным моментом электрона расщепление, пользуясь известной формулой

$$\Delta\nu = \frac{e^2h\left(k+\frac{1}{2}\right)}{8\pi^2m^2c^2}\overline{\frac{1}{r^3}},$$

где

$$\overline{\frac{1}{r^3}} = \int\frac{1}{r^3}\,\psi^2 d\tau$$

есть среднее значение $1/r^3$, которое можно сразу же получить численным интегрированием.

Эмпирические значения M_3-дублетов теория дает с большой точностью: ошибка никогда не была более 10%. В случае оптического дублета цезия согласие хуже. Оказалось, что интервал этого дублета очень сильно зависит от поведения потенциала во внешнем слое атома. Если расщепление вычислить с потенциалом (15), то оно оказывается примерно вдвое больше экспериментального значения. Но ошибка будет гораздо меньше, если потенциал во внешних областях атома немного изменить, чтобы этим учесть, что остов щелочного металла подобен атому благородного газа и стянут, следовательно, сильнее, чем остовы других атомов (ср. также § 8).

§ 5. **Соотношение интенсивностей сериальных линий.** Джентиле и Майорана рассчитали также и соотношение интенсивностей двух первых линий главной серии цезия. Эта задача интересна тем, что на опыте отношение интенсивностей двух первых линий главных серий щелочных металлов оказывается по порядку величины равным 100, тогда как согласно обычной теории оно должно быть много меньше.

Это отношение Джентиле и Майорана определяют следующим путем: с помощью потенциала (15) численно рассчитываются собственные функции ψ_1, ψ_2, ψ_3 трех термов $6S$, $6P$, $7P$. Отношение интенсивностей вычисляется затем, как известно, по двум матричным элементам

$$\int \psi_1\psi_2 x d\tau \quad \text{и} \quad \int \psi_1\psi_3 x d\tau,$$

которые определяют амплитуды колебаний.

Вычисленное этим методом отношение интенсивностей двух линий $6S - 6P$ и $6S - 7P$ оказывается примерно равным 125. Это значение хорошо согласуется с экспериментальным.

§ 6. Теория группы редких земель. Группа редкоземельных элементов возникает, как мы знаем, при заполнении 14 электронных орбит $4f$; она характерна чрезвычайно близким химическим сходством своих 14 элементов. Это сходство, как известно, объясняется тем, что два редкоземельных элемента различаются числом электронов в N-оболочке — внутренней оболочке атома, которая на его внешние (химические) свойства оказывает лишь небольшое влияние. Но такое объяснение требует некоторого дополнения; неясно, например, в каком смысле орбиты $4f$ именуются внутренними. Если, к примеру, обратиться к элементам, которые в периодической системе находятся перед редкими землями ($_{55}$Cs, $_{56}$Ba, $_{57}$La), то оказывается, что для них орбиты $4f$ являются оптическими; их энергия связи мала, а радиус — больше атомного. Таким образом, следовало бы предположить, что с увеличением атомного номера с 57 (лантан) до 58 (церий) радиус $4f$-орбиты сокращается сильно, а ее энергия возрастает не намного; поэтому добавленный электрон занимает орбиту $4f$. Можно было бы, напротив, предположить, что $4f$-электроны редкоземельных элементов, хотя они и имеют очень малое главное квантовое число (N-оболочка!), должны описывать орбиту, которая связана слабо и проходит во внешнем слое атома; но тогда, разумеется, ничего не осталось бы от объяснения химического сходства редких земель.

Для атомных номеров от 55 до 60 я исследовал поведение орбит $4f$, численно рассчитав их со статистическим потенциалом (15); это исследование естественным образом объясняет обсуждаемую трудность.

Из сравнения собственных функций $4f$-орбит для различных значений Z видно, что эти функции изменяются очень быстро при возрастании атомного номера всего с 55 до 60. Так, для $Z = 55$ собственная функция принимает существенно отличные от нуля значения в области за пределами атома, тогда как собственная функция для $Z = 60$ отлична от нуля внутри атома и притом лишь в непосредственной близости к ядру (на расстоянии около 0,3 Å от ядра). Точнее говоря, ситуация такова: обе собственные функции, рассматриваемые как функции r, имеют два максимума; первый максимум — вблизи ядра, второй — за пределами атома. Но для собственной функции при $Z = 55$ первый максимум очень мал, а второй велик;

для другой же собственной функции ($Z = 60$) положение обратное, т. е. первый максимум велик, а второй мал. Энергия связи $4f$-электронов увеличивается с ростом Z, но не очень быстро. Я не могу указать точно ее величину, так как в случае $Z = 60$ (редкие земли) очень сильное влияние оказывают релятивистские эффекты.

Таким образом, резюмируя, можно сказать, что $4f$-орбиты редких земель отнюдь не являются очень сильно связанными; поскольку же они проходят очень глубоко внутри атома, то на химические свойства они оказывают лишь небольшое влияние.

Эту ситуацию можно, по-видимому, представить несколько яснее, если вспомнить о боровских орбитах; согласно Бору, орбиты $4f$ являются круговыми. Для атома $Z = 55$ орбита $4f$ представляет собой окружность, которая проходит вне атома, вблизи самого внешнего края остова. При увеличении Z радиус орбиты сокращается, так что окружность оказывается внутри остова; при этом увеличивается эффективный заряд ядра, поскольку электронная экранировка становится меньше. Это приводит к дальнейшему сокращению орбиты и, следовательно, к дальнейшему росту эффективного заряда ядра и т. д. Таким путем, как мы видим, осуществляется быстрое сжатие орбиты $4f$, соответствующее формированию редкоземельных элементов.

§ 7. Теория сродства галогенов к электрону. Если к какому-либо нейтральному атому добавить еще один электрон, чтобы образовался отрицательный ион, то действующая на него сила весьма отличается от той, которая действует на оптический электрон нейтрального атома. В первом случае (нейтральный атом + электрон) остов системы не заряжен; во втором (ион + электрон = нейтральный атом) — остов имеет заряд 1. Когда электрон находится на большом удалении от атома, действующая на него сила в первом случае связана лишь с поляризацией атома; во втором же случае остов электрически заряжен и его действие, следовательно, намного сильнее. Если же электрон приближается к ядру, проникая внутрь остова, то увеличивается эффективный ядерный заряд, который в обоих случаях при $r = 0$ достигает величины Ze.

Обсудим случай сродства галогенов к электрону; к нейтральному атому добавляется электрон и образуется отрицательный ион галогена. Таким образом, этот электрон удерживается благодаря силе, обусловленной поляризацией атома, с одной стороны, и с другой — притяжению ядра, которое не полностью экранируется действием остальных электронов, когда наш электрон находится внутри атома. Это притяжение очень легко рассчитать. В самом деле, его потенциал дается формулой (9), если пренебречь деформацией атома, которую вызывает добавленный электрон; следовательно, потенциальная энергия электрона равна

$$-\frac{Ze^2}{r}\varphi\left(\frac{r}{\mu}\right). \qquad (17)$$

Влияние поляризации гораздо труднее рассчитать, и сначала я им пренебрег (ср. § 8), так как возможность образования отрицательного иона галогена можно понять без учета поляризации. Но именно вследствие пренебрежения поляризацией теория дает значение сродства к электрону, несколько меньшее экспериментального.

Я провел вычисления для иода ($Z = 53$). У иода имеется незаполненная электронная оболочка, подобная оболочке благородного газа, в которой не хватает одного электрона. Точнее, она состоит из двух $5s$- и пяти $5p$-электронов; имеется, таким образом, еще одно место на орбите $5p$. И если добавляется новый электрон, он попадает на это свободное место $5p$, для которого я численно рассчитал собственную функцию с помощью потенциала (17); оказалось, как и должно быть, что его энергия отрицательна, т. е. электрон связан с атомом. Здесь следует заметить, что при попытке рассчитать орбиты $6s$, $6p$ или $5d$ оказывается, что ни одна из них не обладает отрицательной энергией, т. е. орбита $5\,p$ единственная, на которой может быть связан электрон. Значение энергии связи, которая является мерой сродства к электрону, из теории получается несколько заниженным; теория дает 2,2 *в*, тогда как экспериментальное значение сродства к электрону составляет для атома иода около 3,6 *в*. Причину малого теоретического значения следует искать в том, что не была учтена поляризация.

§ 8. Возможное развитие статистического метода. В предыдущих параграфах я попытался представить ряд приложений статистического рассмотрения электронного газа, окружающего ядро атома.

Такое рассмотрение может быть усовершенствовано в следующем отношении. Я часто указывал на то, что статистическое распределение электронов (10) довольно неточно описывает свойства внешнего слоя атома. По этой причине, если средний потенциал в какой-то точке задается величиной V, потенциальная энергия электрона в той же точке не равна точно $-eV$, а несколько больше, так как при вычислении его энергии нужно учитывать только влияние ядра и остальных электронов, но не самого рассматриваемого электрона. Так, например, когда электрон находится на самой границе атома, то на него действует эффективный ядерный заряд единица, а не нуль, как это получилось бы, если следовать выражению для энергии $-eV$. Это приводит к тому, что электронный газ оказывается сжатым несколько сильнее, чем в соответствии с законом распределения (10). Так, согласно (10), электронное облако с быстро спадающей плотностью расширилось бы до бесконечности. Если же эту теорию усовершенствовать — в том смысле, как мы здесь разъяснили,— то оказывается, что электронная «атмосфера» остается ограниченной. Я надеюсь, что продолжение этих расчетов позволит вычислить поляризацию атома через посредство поля оптического электрона; благодаря этому усовершенствуется теория расщепления термов и сродства к электрону.

До сих пор мы пользовались статистическим методом только для описания атомов; однако в принципе можно перенести его и на сложные системы, например, на молекулы или твердое тело. Разумеется, математические трудности в этих задачах намного больше, главным образом вследствие того, что система теряет сферическую симметрию. Например, в случае двухатомной молекулы нужно решить уравнение (1), причем потенциал имеет два точечных источника в двух ядрах. Эту задачу можно очень сильно упростить, замечая, что потенциал уже известен вблизи обоих ядер (где он совпадает с потенциалом отдельного атома) и на большом удалении от них (где он тождествен потенциалу атома, заряд ядра которого равен сумме зарядов обоих ядер данной молекулы). Если бы можно было вычислить статистическое распределение электронов в молекуле, сразу же появилась бы возможность оценить электронные термы ее полосатого спектра.

В случае твердого тела сферическая симметрия также, естественно, теряется. И здесь, по крайней мере для простейших типов решетки, вероятно, можно будет получить функцию распределения электронов. Я надеюсь, что это позволит теоретически вычислять многие константы твердого тела.

1929

К статьям 38, 46—49

Зимой 1928—1929 гг. Ферми начал заниматься квантовой теорией излучения. Прежде всего он решил ознакомиться со статьями Дирака (Proc. Roy. Soc., 1927, **A114**, 243, 710) по этому вопросу и понять полученные им результаты. Использованный Дираком метод не нравился Ферми, который предпочел переформулировать теорию — он делал это очень часто — так, чтобы привести ее к более знакомому ему математическому виду. Он это и проделал с помощью метода, указанного в первой из этих статей; получив гамильтониан и общие формулы, он опробовал их на бесчисленных примерах и приложениях, наиболее значительные из которых наряду с новой формулировкой теории составили предмет курса, прочитанного в апреле 1929 г. в Институте Анри Пуанкаре в Париже (статья [Б67]) и, в более полной форме, летом 1930 г. в Летней школе по теоретической физике в Анн Арбор, штат Мичиган (статья 48). Ферми не изучал, по крайней мере тогда, статьи Паули и Гейзенберга по квантовой электродинамике, и в то время не был хорошо знаком с формализмом вторичного квантования.

Он очень старался найти решение известных трудностей, связанных с расходимостями квантовой электродинамики, исписав несколько блокнотов в попытках получить гамильтониан такого вида, который бы был удовлетворителен в этом смысле. Он не добился успеха, но в статьях 46—49 можно найти ряд интересных результатов.

Выполняя эту работу, Ферми знакомил с ее результатами некоторых своих учеников и друзей, включая Амальди, Майорану, Рака, Разетти и Сегре. Каждый день по окончании работы он собирал вокруг себя упомянутых выше сотрудников и начинал развивать перед нами сначала общие принципы квантовой электродинамики, а затем — одно за другим — длинный ряд приложений к частным проблемам физики. Поразительной чертой умения Ферми решать теоретическую задачу, так сказать, на людях, и в то же самое время обучать их, была его манера, рассуждая вслух, размеренно и неуклонно продвигаться к цели; это продвижение не было очень быстрым, но всегда было безостановочным. Блокноты с оригинальными рукописями его работ по квантовой электродинамике хранятся в «Domus Galilaeana» в Пизе.

Э. Амальди

38

О КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ *

В настоящей работе записывается квантовая форма уравнений электродинамики для того случая, когда в поле имеются электрически заряженные частицы, причем данная работа ограничивается рассмотрением частиц малой скорости. В последующих работах будут изложены основные применения.

---

* *Sopra l'elettrodinamica quantistica*. Rend. Lincei, 1929, 9, 881—887. Представлено членом Академии О. М. Корбино на заседении 5 мая 1929 г.

1. В недавней работе Паули и Йордана [1] была сформулирована в почти исчерпывающей форме квантовая электродинамика в отсутствие электрических зарядов. Эти авторы разложили поле излучения на гармонические компоненты и для каждой компоненты применили правила квантования, подобные правилам, справедливым для осциллятора; им удалось также получить законы некоммутативности произведения компонент электрического и магнитного полей, которые по их внешнему виду также удовлетворяют условию релятивистской инвариантности.

Сложнее проблема формулирования квантовой электродинамики в том, более важном случае, когда в поле присутствуют также электрические заряды. Частное решение этой проблемы было найдено Дираком [2] в его фундаментальной работе по теории излучения. Однако электродинамика Дирака неполна, поскольку она рассматривает только электромагнитное поле излучения, т. е. поле, которое может быть представлено как сумма плоских электромагнитных волн. На самом деле электромагнитное поле, образующееся вблизи движущейся электрически заряженной частицы, заметно более сложно, так что теория Дирака соответствует действительности только в областях пространства, достаточно далеких от зарядов, порождающих поле. Например, с помощью этой теории было бы невозможно рассмотреть взаимодействие между двумя электронами одного и того же или близких атомов с учетом того, что распространение поля от одного электрона к другому описывается запаздывающими потенциалами; аналогично, в теории Дирака нельзя сформулировать проблему квантовой теории электромагнитной массы и т. д.

В настоящей работе мы укажем один из путей формулирования некоторой возможной формы полной квантовой электродинамики; пока мы запишем уравнения только для случая, когда скорость электрически заряженных частиц, образующих поле, мала по сравнению со скоростью света; в последующих работах мы укажем применения этих уравнений к квантовой теории электромагнитной массы и некоторым другим явлениям.

В том случае, когда электрически заряженные частицы обладают большими скоростями, можно использовать релятивистскую теорию вращающегося электрона Дирака; таким образом, становится возможным записать уравнения электродинамики в форме, удовлетворяющей условию релятивистской инвариантности, хотя пока мне не удалось полностью выяснить, к каким последствиям приведут полученные таким образом уравнения.

2. Чтобы записать уравнения квантовой электродинамики, вначале мы должны попытаться придать уравнениям классической электродинамики форму, удобную для их преобразования в квантовую форму. С этой

---

[1] W. Pauli, P. Jordan. Zs. f. Phys., 1928, 47, 151.
[2] P. A. M. Dirac. Proc. Roy. Soc., 1927, A114, 243.

целью в качестве переменных, описывающих электромагнитное поле, мы возьмем не значения скалярного и векторного потенциалов в каждой точке пространства, а коэффициенты разложения их в интеграл Фурье. Эти коэффициенты, которые, естественно, суть функции лишь времени, описывают скалярный и векторный потенциалы для каждого момента времени во всем рассматриваемом поле.

Для простоты удобно предположить, что рассматриваемое электромагнитное поле заключено внутри полости конечного объема Ω. При удалении стенок полости на бесконечное расстояние мы возвращаемся к случаю свободного излучения (во всем пространстве).

Пусть V и $\mathbf{U}$ — скалярный и векторный потенциалы, удовлетворяющие уравнениям

$$\Delta V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -4\pi\rho \tag{1}$$

$$\Delta \mathbf{U} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = -4\pi\rho\frac{\mathbf{v}}{c}, \tag{2}$$

где ρ и $\mathbf{v}$ — соответственно плотность электрических зарядов и их скорость.

Предположим, что $\mathbf{U}$ и V внутри пространства Ω могут быть представлены в виде суммы синусоидальных компонент по координатам x, y, z следующим образом:

$$V = \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}}\, c\sum_s Q_s \cos\left(\frac{2\pi\alpha_s\cdot\mathbf{X}}{\lambda_s} + \beta_s\right), \tag{3}$$

$$\mathbf{U} = \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}}\, c\sum_s \mathbf{q}_s \sin\left(\frac{2\pi\alpha_s\cdot\mathbf{X}}{\lambda_s} + \beta_s\right), \tag{4}$$

где Q_s и $\mathbf{q}_s$ — соответственно скаляр и вектор, зависящие только от времени; α_s — вектор с направлением s-й волны; $\mathbf{X}$ — вектор, компоненты которого суть три координаты x, y, z произвольной точки пространства; β_s — фазовая константа; наконец, нормировочный множитель $\sqrt{8\pi/\Omega}\,c$ выбран таким образом, чтобы максимально упростить формулы, которые встретятся нам далее.

Известно, что при стремлении Ω к очень большим значениям, число гармонических компонент предыдущего типа с длиной волны, заключенной в интервале от λ до $\lambda + d\lambda$, будет

$$\frac{2\pi\Omega}{\lambda^4}\, d\lambda. \tag{5}$$

Вводя вместо длины волны соответствующую частоту

$$\nu = c/\lambda, \tag{6}$$

можно записать (5) в эквивалентной форме

$$\frac{4\pi\Omega}{c^3}\, \nu^2 d\nu. \tag{7}$$

Из соотношений (3) и (4) обычным способом можно найти коэффициенты разложения Q_s и $\mathbf{q}_s$; получаем

$$c\sqrt{2\pi\Omega}\, Q_s = \int V \cos \Gamma_s d\tau, \tag{8}$$

$$c\sqrt{2\pi\Omega}\, \mathbf{q}_s = \int \mathbf{U} \sin \Gamma_s d\tau, \tag{9}$$

где для краткости мы положили

$$\Gamma_s = \frac{2\pi \alpha_s \cdot \mathbf{X}}{\lambda_s} + \beta_s \tag{10}$$

и

$$d\tau = dx dy dz. \tag{11}$$

Теперь мы хотим установить эквивалентное уравнениям Максвелла (1) и (2) дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют Q_s и $\mathbf{q}_s$. С этой целью умножим обе части уравнения (1) на $\cos \Gamma_s d\tau$ и проинтегрируем по всему объему Ω. Предполагая, что на ограничивающей Ω поверхности потенциал обращается в нуль, а также что электромагнитное поле обращается в нуль таким образом, что некоторыми интегралами по этой поверхности можно пренебречь, очевидными преобразованиями находим

$$-4\pi \int \rho \cos \Gamma_s d\tau = \int \Delta V \cos \Gamma_s d\tau - \frac{1}{c^2}\int \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \cos \Gamma_s d\tau =$$
$$= + \int V \cdot \Delta \cos \Gamma_s d\tau - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int V \cos \Gamma_s d\tau;$$

поскольку, далее, из равенства (10) следует

$$\Delta \cos \Gamma_s = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \cos \Gamma_s,$$

с учетом соотношений (8) и (6) получим

$$\ddot{Q}_s + 4\pi^2 \nu_s^2 Q_s = \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}}\, c \int \rho \cos \Gamma_s d\tau. \tag{12}$$

Если предположить, что электрические заряды e_1, e_2, e_3, ... сконцентрированы в точках с координатами $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, $\mathbf{X}_3$, ..., то интегрирование в правой части (12) можно выполнить, и уравнение (12) принимает вид

$$\ddot{Q}_s + 4\pi^2 \nu_s^2 Q_s = \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}}\, c \sum_i e_i \cos\left(\frac{2\pi \alpha_s \cdot \mathbf{X}_i}{\lambda_s} + \beta_s\right) = \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}}\, c \sum_i e_i \cos \Gamma_{si}, \tag{13}$$

где сумма должна быть распространена на все электрические заряды, находящиеся в поле.

Выполняя аналогичные операции с компонентами $\mathbf{q}_s$ разложения векторного потенциала, находим для них уравнение

$$\ddot{\mathbf{q}}_s + 4\pi^2\nu_s^2\mathbf{q}_s = \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}}\sum_i e_i\mathbf{X}_i \sin\Gamma_{si}. \tag{14}$$

Обозначая через χ_s, w_{s1}, w_{s2} компоненты вектора $\mathbf{q}_s$ соответственно по направлению $\boldsymbol{\alpha}_s$ и по двум другим направлениям $\mathbf{A}_{s1}$ и $\mathbf{A}_{s2}$, перпендикулярным между собой и направлению $\boldsymbol{\alpha}_s$, можем записать

$$\mathbf{q}_s = \boldsymbol{\alpha}_s\chi_s + \mathbf{A}_{s1}w_{s1} + \mathbf{A}_{s2}w_{s2}, \tag{15}$$

где через $\mathbf{A}_{s1}$ и $\mathbf{A}_{s2}$ обозначены единичные векторы двух соответствующих направлений. Уравнение (14) теперь может быть заменено тремя эквивалентными скалярными уравнениями

$$\ddot{\chi}_s + 4\pi^2\nu_s^2\chi_s = \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}}\sum_i e_i(\boldsymbol{\alpha}_s\cdot\mathbf{X}_i)\sin\Gamma_{si}, \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{w}_{s1} + 4\pi^2\nu_s^2 w_{s1} &= \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}}\sum_i e_i(\mathbf{A}_{s1}\cdot\mathbf{X}_i)\sin\Gamma_{si} \\ \ddot{w}_{s2} + 4\pi^2\nu_s^2 w_{s2} &= \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}}\sum_i e_i(\mathbf{A}_{s2}\cdot\mathbf{X}_i)\sin\Gamma_{is} \end{aligned}\right\}. \tag{17}$$

Из уравнений (13) и (16) сразу следует некоторое соотношение между Q_s и χ_s. Для этого достаточно дифференцировать (13) по времени, а затем суммировать почленно с умноженным на $2\pi\nu_s$ уравнением (16). Таким образом найдем

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 4\pi^2\nu_s^2\right)(2\pi\nu_s\chi_s + \dot{Q}_s) = 0. \tag{18}$$

Это уравнение, очевидно, будет удовлетворено, если положить

$$2\pi\nu_s\chi_s + Q_s = 0. \tag{19}$$

Как сразу можно проверить, это уравнение тождественно известному соотношению

$$\operatorname{div}\mathbf{U} + \frac{1}{c}\frac{\partial V}{\partial t} = 0, \tag{20}$$

которое связывает скалярный и векторный потенциалы; благодаря (18) такое уравнение, хотя оно и не является следствием дифференциальных уравнений, все-таки остается справедливым для всех моментов времени при условии, что оно, вместе с его первой производной, выполняется в начальный момент времени.

3. Теперь мы сможем записать уравнения движения электрических зарядов и уравнения электромагнитного поля в такой форме, которая позволяет немедленно преобразовать их в уравнения квантовой механики. В настоящей работе мы ограничиваемся, как уже сказано, развитием нерелятивистской теории, т. е. мы предполагаем, что скорости электрических зарядов всегда малы по сравнению со скоростью света.

В качестве координат для определения положений зарядов возьмем

$$\mathbf{X}_1,\ \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_i, \ldots,$$

а в качестве определяющих электромагнитное поле координат

$$Q_s,\ \chi_s,\ w_{s1},\ w_{s2}.$$

Последние через уравнения (3), (4) и (15) определяют во всех точках поля скалярный и векторный потенциалы. Между координатами Q_s и χ_s имеется соотношение (19). Однако эти две переменные можно считать независимыми, так как мы видели, что уравнение (19) является следствием дифференциальных уравнений по крайней мере при принятом нами допущении, что оно вместе со своей производной справедливо в начальный момент времени. Соотношение (19) поэтому сводится только к условию, которому должны удовлетворять постоянные интегрирования.

Совместно с координатами

$$\mathbf{X}_i,\ Q_s,\ \chi_s,\ w_{s1},\ w_{s2}$$

мы рассмотрим также и переменные

$$\mathbf{p}_i,\ P_s,\ \tilde{\omega}_s,\ \omega_{s1},\ \omega_{s2},$$

которые являются сопряженными с ними импульсами.

Далее, можно проверить, что в нашем нерелятивистском приближении уравнения движения зарядов и уравнения электромагнитного поля могут быть выведены из следующей гамильтоновой функции

$$\begin{aligned} H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + \sum_s \Big\{ \frac{1}{2} [\omega_{s1}^2 + \omega_{s2}^2 + \tilde{\omega}_s^2 - P_s^2] + \\ + 2\pi^2\nu_s^2 [w_{s1}^2 + w_{s2}^2 + \chi_s^2 - Q_s^2] \Big\} + c\sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum_{is} e_i Q_s \cos\Gamma_{si} - \\ - \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum_{is} \frac{e_i}{m_i} \sum_{is} [(\boldsymbol{\alpha}_s\chi_s + \mathbf{A}_{s1}w_{s1} + \mathbf{A}_{s2}w_{s2})\cdot\mathbf{p}_i] \sin\Gamma_{si}. \end{aligned} \qquad (21)$$

Это немедленно можно проверить для уравнений движения; в самом деле, та часть, которая содержит координаты $\mathbf{X}_i$ электрических зарядов и их им-

пульсы $\mathbf{p}_i$, сводится, благодаря соотношениям (3) и (4), к

$$\sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + \sum e_i V_i - \sum \frac{e_i}{c}\frac{\mathbf{p}_i}{m_i}\cdot\mathbf{U}_i + (\text{Независящая от } \mathbf{p}_i \text{ и } \mathbf{X}_i \text{ часть}),$$

что представляет собой не что иное, как обычный гамильтониан системы электрически заряженных и помещенных в электромагнитное поле материальных точек.

Чтобы проверить, что из гамильтониана (21) следует также и уравнения электромагнетизма, запишем, например, канонические уравнения для пары сопряженных переменных Q_s и P_s. Такие уравнения имеют следующий вид:

$$\frac{dQ_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_s} = -P_s,$$

$$\frac{dP_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q_s} = 4\pi^2\nu_s^2 Q_s - c\sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}}\sum_i e_i \cos\Gamma_{is}.$$

Исключив из этих двух уравнений импульс P_s, вновь находим уравнение (13); так как в первом приближении импульсы $\mathbf{p}_i$, сопряженные с координатами $\mathbf{X}_i$ электрических зарядов, есть количества движения $m\dot{\mathbf{X}}_i$, то можно проверить аналогичным образом, что из нашего гамильтониана следуют также и уравнения (16) и (17). Поскольку уравнения (13), (16) и (17) эквивалентны уравнениям электродинамики (1) и (2), тем самым доказано, что и такие уравнения можно вывести из гамильтониана (21).

4. После того как уравнения электродинамики и движения зарядов записаны в канонической форме, их немедленно можно преобразовать в уравнения квантовой механики. Для этого достаточно рассматривать выражение H как оператор, в котором импульсы, по обычному правилу эквивалентны операции дифференцирования по соответствующей координате и умножения на $-h/2\pi i$. Тогда уравнение Шредингера будет

$$H\psi = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{22}$$

В следующих работах мы покажем некоторые применения этого уравнения.

К статье 39

Эта статья свидетельствует о вкладе Ферми в дискуссию, которую он вел, переписываясь с Леви-Чивитой; дискуссия касалась увеличения массы планет, связанного с падением метеоритов. Средняя скорость метеоритов, которой пренебрег Леви-Чивита в своей работе, у Ферми учитывалась в рамках различных простых предположений о распределении метеоритов по скоростям в системе отсчета, связанной с фиксированными звездами.

Э. Сегре

39

О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ *

В этой заметке уточняется влияние падающих метеоритов на уравнение движения планеты.

... Результаты воздействия падающих метеоритов на уравнение движения планеты можно, как мне кажется, определить следующим образом.

Пусть $\mathbf{V}$ есть скорость планеты (векторная), m — ее масса (функция времени t), а v — скорость одного из метеоритов; $\overline{\mathbf{v}}$ есть среднее значение (векторное) скорости метеоритов, падающих на планету за время dt. Ваши заметки [1], по существу, содержат следующее уравнение:

$$\frac{d(m\mathbf{V})}{dt} = \mathbf{F} + \frac{dm}{dt}\overline{\mathbf{v}}. \qquad (1)$$

Задача сводится, таким образом, к вычислению $\overline{\mathbf{v}}$, которую Вы сразу же положили равной нулю. Определение $\overline{\mathbf{v}}$, разумеется, зависит от предположений, которые сделаны относительно закона распределения метеоритов по скоростям. Пожалуй, самым естественным было бы предположить, что в системе, связанной с фиксированными звездами, они имеют нулевую среднюю скорость и что распределение по скоростям описывается законом Максвелла.

Сделаем пока более общее предположение о наличии некоторого закона распределения метеоритов по скоростям, допускающего сферическую симметрию; при этом пусть $f(v)dw$ есть вероятность того, что метеорит об-

---

* *Sul moto di un corpo di massa variabile.* Rend. Lincei, 1929, 9, 984—986. Представлено членом Академии Т. Леви-Чивита на заседании 1 июня 1929 г.

[1] T. Levi-Civita. Rend. Lincei, 1928, 8, 329—333, 621—622.

ладает скоростью, принадлежащей элементу dw пространства скоростей, где f — пока что произвольная функция только модуля скорости метеорита.

Вероятность столкновения планеты с метеоритом, скорость которого равна v, пропорциональна, очевидно, $f(v)\,dw$ и, кроме того, их относительной скорости.

$$g = |\mathbf{v} - \mathbf{V}|.$$

Следовательно, среднее значение скорости падающих на планету метеоритов равно

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\int \mathbf{v}\,|\mathbf{v} - \mathbf{V}|\,f dw}{\int |\mathbf{v} - \mathbf{V}|\,f dw}.$$

Очевидно, что в силу симметрии $\bar{\mathbf{v}}$ должна быть параллельна $\mathbf{V}$. Поэтому достаточно вычислить одну лишь компоненту в направлении $\mathbf{V}$ — единственную отличную от нуля; пользуясь полярными координатами, в которых можно положить $dw = 2\pi\sin\theta d\theta v^2 dv$, получаем

$$\bar{v} = \frac{\int_0^\infty\int_0^\pi v\cos\theta\,\sqrt{V^2 + v^2 - 2Vv\cos\theta}\,f(v)\,2\pi\sin\theta\,d\theta v^2 dv}{\int_0^\infty\int_0^\pi \sqrt{V^2 + v^2 - 2Vv\cos\theta}\,f(v)\,2\pi\sin\theta d\theta v^2 dv}.$$

Интегрирование по θ выполняется сразу же и дает следующие результаты:

$$-\bar{v} = \frac{\int_0^V v^3 f(v)\,dv\left[\frac{2}{3}v - \frac{2}{15}\frac{v^3}{V^2}\right] + \int_V^\infty v^3 f(v)\,dv\left[\frac{2}{3}V - \frac{2}{15}\frac{V^3}{v^2}\right]}{\int_0^V v^2 f(v)\,dv\left[2V + \frac{2}{3}\frac{v^2}{V}\right] + \int_V^\infty v^2 f(v)\,dv\left[2v + \frac{2}{3}\frac{V^3}{v^2}\right]}.$$

Если для $f(v)$ принять максвелловское выражение

$$f(v) = e^{-h^2v^2},$$

то обычными методами эти интегралы вычислить нельзя, и пришлось бы прибегнуть к таблицам значений функции

$$\Theta(x) = \int_x^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

Однако результат предельно упрощается, если сделать предположение, безусловно не соответствующее действительности, согласно которому величина скорости у всех метеоритов одна и та же. Действительно, при та-

ком допущении находим

$$\bar{v} = \begin{cases} -\dfrac{v^2}{5V}\,\dfrac{5V^2 - v^2}{3V^2 + v^2} & \text{при} \quad v \leqslant V, \\ -\dfrac{V}{5}\,\dfrac{5v^2 - V^2}{3v^2 + V^2} & \text{при} \quad v \geqslant V. \end{cases}$$

В частности, если предположить, что скорость метеоритов много больше скорости планеты, то из предыдущих формул следует очень простое выражение:

$$\bar{\mathbf{v}} = -\frac{\mathbf{V}}{3}.$$

Любопытно посмотреть, какую форму принимает уравнение движения (1) в рамках такого предположения. Подставив в него предыдущее значение $\bar{\mathbf{v}}$, получим

$$\frac{d(m\mathbf{V})}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{3}\mathbf{V}\frac{dm}{dt},$$

что можно также записать в виде

$$\frac{1}{m^{1/3}}\frac{d}{dt}(m^{4/3}\mathbf{V}) = \mathbf{F}.$$

Как видим, такая форма не очень отличается от обычной, к которой она, естественно, сводится, когда масса не зависит от времени.

К статье 40

В этой работе методами волновой механики исследуется влияние связи орбитального момента электронов с молекулярной осью молекулы He_2, т. е. определяется расщепление состояний в зависимости от величины проекции момента импульса оптического электрона. Эта работа подробно обсуждалась с Э. Майорана, появившимся незадолго до этого в римском Институте физики.

Ф. Разетти

40

О КОМПЛЕКСЕ 4*d* МОЛЕКУЛЫ ГЕЛИЯ *

Теория возмущений позволяет вычислить для молекулы гелия энергию, обусловленную связью оси молекулы и момента импульса электронов. Вычисляемые разности термов $4d\sigma$, $4d\pi$, $4d\delta$ согласуются с экспериментальными значениями.

В молекулах, состоящих из атомов малого атомного веса, в частности в молекулах H_2 и He_2, наблюдаются многочисленные группы спектроскопических термов, которые характеризуются одинаковым значением главного и азимутального квантовых чисел. Так, например, в гелии имеется группа термов $4d$, обладающих главным квантовым числом 4 и азимутальным квантовым числом 2. Поведение этих термов, изучавшееся В. Вайцелем [1] и Г. Дике [2], обнаруживает следующие особенности. До тех пор пока вращательный момент R ядер мал, т. е. при медленном вращении, орбитальный момент электрона l ориентируется относительно прямой, соединяющей эти ядра, так, что его проекция λ на эту ось принимает целые значения. В случае термов $4d$, для которых $l = 2$, проекция может принимать значения 0, 1, 2, и соответственно этому имеются термы, обозначаемые символами

$$4d\sigma, \quad 4d\pi, \quad 4d\delta.$$

Когда же вращение становится быстрым (R велико), связь между l и осью молекулы нарушается. Это приводит к расщеплению термов $4d\pi$ и $4d\delta$ (удвоение σ-типа); наконец, в пределе очень больших R, l полностью связывается с R.

---

* *Sul complesso 4d della molecola di elio.* Rend. Lincei, 1929, 10, 515—517; Nuovo Cimento, 1930, 7, 159—161. Представлено членом Академии О. М. Корбино на заседании 3 ноября 1929 г.

[1] W. Weizel. Zs. f. Phys., 1929, 56, 727.

[2] G. H. Dieke. Zs. f. Phys., 1929, 57, 71.

В этой заметке предполагается вычислить разности трех термов $4d\sigma$ $4d\pi$, $4d\delta$ данного комплекса. Это можно довольно легко сделать с помощью квантовомеханической теории возмущений, воспользовавшись тем фактом, что главное и азимутальное квантовые числа изучаемых термов достаточно велики и поэтому собственные функции оптического электрона и атома водорода различаются между собой довольно мало. Это значит, что такие собственные функции дают очень удобное первое приближение. Законность подобного подхода подтверждает то обстоятельство, что изучаемые термы достаточно хорошо описываются формулой Ридберга, а поправка Ридберга оказывается очень малой. Таким образом, за невозмущенные собственные функции мы возьмем для трех термов $4d\sigma$, $4d\pi$, $4d\delta$ молекулы гелия соответствующие собственные функции атома водорода, т. е.

$$\left.\begin{aligned} \psi_0 &= (3\cos^2\theta - 1)\, r^2\left(1 - \frac{r}{12r_0}\right)e^{-\frac{r}{4r_0}}, \\ \psi_1 &= \sin\theta\cos\theta e^{\pm i\varphi} r^2\left(1 - \frac{r}{12r_0}\right)e^{-\frac{r}{4r_0}}, \\ \psi_2 &= \sin^2\theta e^{\pm 2i\varphi} r^2\left(1 - \frac{r}{12r_0}\right)e^{-\frac{r}{4r_0}}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Здесь $r_0 = 0{,}53\cdot 10^{-8}$ *см* представляет радиус первой орбиты атома водорода.

Возмущающий потенциал V возникает главным образом вследствие того факта, что оба ядра не объединяются в центре тяжести молекулы, а находятся на некотором расстоянии a друг от друга. Так как каждое из этих ядер сопровождается электроном, его эффективный заряд будет равен e вместо $2e$. Кроме того, помимо оптического электрона имеется еще третий электрон, но, поскольку обусловленное им поле, вероятно, не очень отличается от центрального, его влияние здесь не рассматривается. Таким образом, возмущением следует считать потенциал, создаваемый двумя положительными зарядами, которые сосредоточены в двух точках, отстоящими друг от друга на расстоянии a; посредине между этими точками имеется отрицательный заряд, равный — $2e$. Такой потенциал можно разложить по обратным степеням r; первым членом разложения будет

$$V = \frac{ea^2}{4r^3}(3\cos^2\theta - 1). \quad (2)$$

Это выражение хорошо описывает возмущающий потенциал при достаточно больших значениях r; поскольку же при малых r собственные функции (1) принимают очень малые значения, выражение (2) можно сразу же взять в качестве возмущающего потенциала.

Из теории возмущений известно, что обусловленные потенциалом V возмущения энергии наших трех термов равны

$$\varepsilon_0 = -e\frac{\int V\,|\psi_0|^2\,d\tau}{\int |\psi_0|^2\,d\tau}, \qquad \varepsilon_1 = -e\frac{\int V\,|\psi_1|^2\,d\tau}{\int |\psi_1|^2\,d\tau}, \qquad \varepsilon_2 = -e\frac{\int V\,|\psi_2|^2\,d\tau}{\int |\psi_2|^2\,d\tau}. \tag{3}$$

Подставляя в интегралы выражения (1) и (2) для ψ и V, находим после интегрирования:

$$\varepsilon_0 = -2\frac{e^2a^2}{13440r_0^3}, \qquad \varepsilon_1 = -\frac{e^2a^2}{13440r_0^3}, \qquad \varepsilon_2 = 2\frac{e^2a^2}{13440r_0^3}. \tag{4}$$

Так как в молекуле гелия с большой точностью выполняется равенство $a = 2r_0$, имеем

$$\frac{e^2a^2}{13440r_0^3} = \frac{e^2}{2r_0}\,\frac{1}{1680}.$$

Выражая энергию в волновых числах, получаем

$$\frac{e^2}{2r_0} = 109737 \text{ волновых чисел},$$

ибо величина $e^2/2r_0$ представляет собой постоянную Ридберга. Таким образом, в итоге имеем

$$\varepsilon_0 = -130, \ \varepsilon_1 = -65, \ \varepsilon_2 = 130 \text{ волновых чисел.}$$

Из опыта известны разности термов $4d\delta$ и $4d\sigma$, а также $4d\pi$ и $4d\sigma$. Эти разности следуют из нашей теории и выражаются величинами

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_0 = 260 \ \text{ и } \ \varepsilon_1 - \varepsilon_0 = 65,$$

а соответствующие экспериментальные значения равны 300 и 75.

Как видно, согласие теории с опытом довольно хорошее; расхождение составляет около 15%. Это различие остается, по-видимому, вследствие упрощающих предположений теории и, вероятно, в значительной мере ввиду того, что в ней не учитывается влияние возмущения со стороны одного из электронов.

1930

К статье 41

Цель этой статьи состоит в объяснении результатов наблюдений Разетти, а также Фюхтбауэра с сотрудниками; согласно их наблюдениям, отношение интенсивностей двух компонент S — P-дублетов у щелочных металлов иногда заметно отличается от 2 — значения, предсказываемого элементарной теорией. Большие отклонения от этой величины наблюдаются для второго и более высоких дублетов в сериях наиболее тяжелых щелочных металлов.

Эти исследования, которые составили предмет дипломной работы Разетти, следовали пизанской традиции Пуччанти, пользовавшегося для измерения интенсивности линий аномальной дисперсией паров. Упомянутые выше отклонения оставались загадкой много лет.

Однажды, изучая предложенную Паули теорию спина, Ферми нашел качественное объяснение этого эффекта. В 2 часа дня он подробно рассказал об этом Сегре и вызвал его на спор: Сегре обязывался закончить вычисления к 4 часам, а в случае его неуспеха Ферми должен был продемонстрировать осуществимость задания (что он и сделал).

Простота предположений, непосредственность подхода и исключительная ясность изложения делают эту работу классической среди ранних приложений теории возмущений к атомной спектроскопии.

Ф. Разетти.

41

О СООТНОШЕНИИ ИНТЕНСИВНОСТЕЙ В ДУБЛЕТАХ ЩЕЛОЧНЫХ МЕТАЛЛОВ *

Согласно известному правилу, отношение интенсивностей для компонент всех дублетов главной серии щелочных металлов должно равняться 2 : 1. Найденные экспериментально значения отношения очень сильно отличаются от теоретических, особенно для цезия. В настоящей работе объясняется такое расхождение теории и эксперимента.

Согласно правилам интенсивностей, впервые установленным Доргело и Бургером и позднее обоснованным квантовой механикой, отношение интенсивностей двух компонент во всех дублетах главной серии щелочных металлов должно равняться 2 : 1. Однако экспериментально определенные значения этого отношения в ряде случаев сильно отличаются от теоретических, причем даже для линий одного и того же эле-

* *Über das Intensitätsverhältnis der Dublettkomponenten der Alkalien.* Zs. f. Phys., 1930, 59, 680—686.

мента отношение интенсивностей принимает разные значения. Эти отклонения наблюдаемых отношений от 2 очень сильно возрастают с атомным номером элемента и для Cs, таким образом, они оказываются наибольшими. Впрочем, поведение первого дублета главной серии весьма отличается от других. Для первого дублета найденное отношение очень близко к 2, возможно, несколько меньше. Для второго же дублета оно больше 2, а в отдельных случаях отклонения оказываются весьма значительными. Так, например, своими очень точными измерениями с помощью метода аномальной дисперсии Разетти [1] нашел для второго дублета Cs отношение интенсивностей 3,85. Различными методами ряд исследователей также получил, по существу, совпадающие результаты. Так, например, в недавно опубликованной работе Фюхтбауэр и Вольф [2] нашли, что для второго и третьего дублетов Cs отношение интенсивностей составляет 3,3 и 4,7.

В настоящей работе я бы хотел показать, как можно истолковать эти результаты теоретически. Точнее, мы докажем, что отношение интенсивностей, равное 2, получается, если в интегралы, которые определяют интенсивности на основе квантовой механики, подставить невозмущенные собственные функции. Если же в эти интегралы подставить возмущенные собственные функции, то отношение интенсивностей получается в согласии с опытом. В этом состоит причина большого возмущения отношения интенсивностей во втором дублете Cs (3,85 вместо 2). В пара́х всех щелочных металлов интенсивность первого дублета главной серии примерно в 100 раз выше интенсивности второго. Пусть ψ_i — невозмущенная собственная функция какого-то терма i; тогда возмущенную собственную функцию можно, как известно, записать в виде

$$\psi_i + \sum_k{}' \alpha_{ik}\psi_k,$$

где α_{ik} суть малые коэффициенты, а суммирование должно проводиться по всем состояниям атома, исключая i-е. Поэтому в возмущенной собственной функции второго P-терма будет присутствовать также и член, который представляет собой произведение собственной функции первого P-терма и малого коэффициента. Если такую возмущенную собственную функцию скомбинировать с собственными функциями S-терма для вычисления интенсивностей, то, несмотря на малый коэффициент, этот член оказывается очень существенным, поскольку комбинации S-терма с P-термом очень интенсивны. В этом и состоит причина большой аномалии в интенсивностях.

При выводе теоретических соотношений мы воспользуемся для описания вращающегося электрона методом Паули, а не методом Дирака,

---

[1] F. Rasetti. Cim., 1924, 1, 115.
[2] C. Füchtbauer, H. W. Wolff. Ann. d. Phys., 1929, 3, 359.

так как в нашем случае вполне достаточно точности более простого метода Паули. В качестве невозмущенной задачи рассмотрим, как обычно, электрон в центрально-симметричном поле, пренебрегая влиянием собственного момента электрона. При этом энергия возмущения будет

$$v = \frac{\mu_0}{2mc}\,\frac{1}{r}\,\frac{dV}{dr}\,\mathbf{M}\cdot\boldsymbol{\sigma}. \tag{1}$$

Здесь r — радиус-вектор; μ_0 — магнетон Бора; V — электрический потенциал; $\mathbf{M}$ — механический момент электронной орбиты. Компоненты q-вектора $\boldsymbol{\sigma}$ задаются матрицами

$$\sigma_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

При учете собственного момента электрона собственная функция каждого квантового состояния расщепляется на две функции пространственных координат x, y, z:

$$\psi = \begin{vmatrix} \psi_\alpha(x, y, z) \\ \psi_\beta(x, y, z) \end{vmatrix}.$$

Так, например, для двукратно вырожденного терма $^2S_{1/2}$ двумя собственными функциями являются

$$\begin{vmatrix} F(r) \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 \\ F(r) \end{vmatrix}. \tag{3}$$

В качестве невозмущенных собственных функций двукратно вырожденного терма $n^2P_{1/2}$ получаем

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} f_n(r) P_0 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} f_n(r) P_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -\sqrt{\frac{2}{3}} f_n(r) P_{-1} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} f_n(r) P_0 \end{vmatrix}, \tag{4}$$

где

$$P_1 = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\Theta e^{i\varphi}, \quad P_0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\Theta, \quad P_{-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\Theta e^{-i\varphi} \tag{5}$$

суть три шаровые функции первого порядка. Для четырехкратно вырожденного терма $n^2P_{3/2}$ находим четыре невозмущенные собственные функции

$$\begin{vmatrix} f_n(r) P_1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -\sqrt{\frac{2}{3}} f_n(r) P_0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} f_n(r) P_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} f_n(r) P_{-1} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} f_n(r) P_0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 \\ f_n(r) P_{-1} \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Как известно, интенсивность перехода из состояния с собственной функцией $\begin{vmatrix} \bar{\psi}_\alpha \\ \psi_\beta \end{vmatrix}$ в состояние с собственной функцией $\begin{vmatrix} \psi'_\alpha \\ \psi'_\beta \end{vmatrix}$ определяется выражением

$$a = \left(\int z \begin{vmatrix} \bar{\psi}_\alpha \\ \psi_\beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \psi'_\alpha \\ \psi'_\beta \end{vmatrix} d\tau \right)^2 = \left[\int z \left(\bar{\psi}_\alpha \psi'_\alpha + \bar{\psi}_\beta \psi'_\beta \right) d\tau \right]^2. \qquad (7)$$

Применим эту формулу к переходам $n^2P_{1/2} \to {}^2S_{1/2}$ и $n^2P_{3/2} \to {}^2S_{1/2}$, подставив в нее выражения невозмущенных собственных функций (3), (4), (6) и замечая, что $z = r \cos \Theta$; тогда для интенсивности этих двух переходов получим

$$\left.\begin{aligned} a_{n,1} &= \frac{8\pi}{9} \left[\int_0^\infty r^3 F(r) f_n(r)\, dr \right]^2 \quad \text{для} \quad n^2P_{1/2} \to {}^2S_{1/2}, \\ a_{n,2} &= \frac{16\pi}{9} \left[\int_0^\infty r^3 F(r) f_n(r)\, dr \right]^2 \quad \text{для} \quad n^2P_{3/2} \to {}^2S_{1/2}. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Таким образом, в этом случае величины a относятся как 2 : 1.

Вычислим теперь для обоих состояний $n^2P_{1/2}$ и $n^2P_{3/2}$ возмущенные собственные функции, чтобы с их помощью снова определить отношение интенсивностей. Воспользуемся для этого известной формулой теории возмущений

$$\psi_{\text{возм}} = \psi_i - \sum_k{}' \frac{\int \bar{\psi}_k v \psi_i d\tau}{E_i - E_k},$$

куда в качестве оператора v следует подставить выражение (1), а суммировать нужно по всем значениям k, кроме $k = i$. После вычислений, которые не представляют никаких трудностей, находим возмущенные собственные функции для $n^2P_{1/2}$:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} f'_n(r) P_0 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} f'_n(r) P_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -\sqrt{\frac{2}{3}} f'_n(r) P_{-1} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} f'_n(r) P_0 \end{vmatrix}$$

и для $n^2P_{3/2}$:

$$\begin{vmatrix} f''_n(r) P_0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -\sqrt{\frac{2}{3}} f''_n(r) P_0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} f''_n(r) P_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} f''_n(r) P_{-1} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} f''_n(r) P_0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 \\ f''_n(r) P_{-1} \end{vmatrix},$$

где

$$\left.\begin{aligned} f'_n(r) &= f_n(r) - \frac{h\mu_0}{2\pi mc}\sum_m{}' \frac{\int\limits_0^\infty r\frac{dV}{dr} f_n f_m dr}{E_n - E_m} f_m(r), \\ f''_n(r) &= f_n(r) + \frac{h\mu_0}{4\pi mc}\sum_m{}' \frac{\int\limits_0^\infty r\frac{dV}{dr} f_n f_m dr}{E_n - E_m} f_m(r). \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Суммирование проводится по всем m, кроме $m = n$.

Фигурирующий в выражениях (9) интеграл можно вычислить, без детальных сведений о собственных функциях, следующим методом. Как известно, дублетное расщепление n^2P-терма выражается формулой

$$\Delta_n = -\frac{3\mu_0 h}{4\pi mc}\int\limits_0^\infty r\frac{dV}{dr} f_n^2(r)\,dr. \quad (10)$$

При малых r функции $f_n(r)$ пропорциональны друг другу и различаются лишь при больших r. Поскольку же область, существенная для определения интегралов, которые входят в соотношения (9) и (10), охватывает лишь очень малые значения r, можно положить для этой области $f_m(r) = k_{mn} f_n(r)$, где k_{mn} — постоянный коэффициент пропорциональности. Из формулы (10) находим

$$k_{mn} = \sqrt{\frac{\Delta_m}{\Delta_n}}.$$

Таким образом, имеем

$$-\int\limits_0^\infty r\frac{dV}{dr} f_n f_m dr = -k_{mn}\int\limits_0^\infty r\frac{dV}{dr} f_n^2 dr = k_{mn}\frac{4\pi mc}{3\mu_0 h}\Delta_n = \frac{4\pi mc}{3\mu_0 h}\sqrt{\Delta_n\Delta_m}.$$

Подставляя это выражение в формулу (9), находим

$$\left.\begin{aligned} f'_n(r) &= f_n(r) - \frac{2}{3}\sum_m{}' \frac{\sqrt{\Delta_n\Delta_m}}{E_n - E_m} f_m(r), \\ f''_n(r) &= f_n(r) + \frac{1}{3}\sum_m{}' \frac{\sqrt{\Delta_n\Delta_m}}{E_n - E_m} f_m(r). \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Теперь можно вычислить интенсивность по формуле (8), но при этом для перехода $n^2P_{1/2} \to {}^2S_{1/2}$ нужно подставить $f'_n(r)$ вместо $f_n(r)$, а для перехода $n^2P_{3/2} \to {}^2S_{1/2}$ — функцию $f''_n(r)$ вместо $f_n(r)$. Таким образом,

получаем

$$a_{n,1} = \frac{8\pi}{9}\left(B_n - \frac{2}{3}\sum_m{}' \frac{\sqrt{\Delta_n\Delta_m}}{E_n - E_m} B_m\right)^2,$$

$$a_{n,2} = \frac{16\pi}{9}\left(B_n + \frac{1}{3}\sum_m{}' \frac{\sqrt{\Delta_n\Delta_m}}{E_n - E_m} B_m\right)^2,$$

где мы положили

$$B_n = \int_0^\infty r^3 F(r) f_n(r)\, dr. \qquad (12)$$

Итак, вместо 2 находим следующее отношение интенсивностей:

$$\frac{a_{n,2}}{a_{n,1}} = 2\left(\frac{1 + \frac{1}{3}\sum_m{}' \frac{\sqrt{\Delta_n\Delta_m}}{E_n - E_m}\frac{B_m}{B_n}}{1 - \frac{2}{3}\sum_m{}' \frac{\sqrt{\Delta_n\Delta_m}}{E_n - E_m}\frac{B_m}{B_n}}\right)^2.$$

Остается еще только найти отношение значений B. Из определения (12) следует, что B_m/B_n равно корню из отношения интенсивностей J_m/J_n двух переходов $m^2P \to {}^2S$ и $n^2P \to {}^2S$ (без учета дублетного расщепления). Таким образом,

$$\frac{B_m}{B_n} = \sqrt{\frac{J_m}{J_n}}.$$

В итоге находим окончательную формулу для отношения интенсивностей:

$$\frac{a_{n,2}}{a_{n,1}} = 2\left(\frac{1 + \frac{1}{3}\sum_m{}' \frac{\sqrt{\Delta_n\Delta_m}}{E_n - E_m}\sqrt{\frac{J_m}{J_n}}}{1 - \frac{2}{3}\sum_m{}' \frac{\sqrt{\Delta_n\Delta_m}}{E_n - E_m}\sqrt{\frac{J_m}{J_n}}}\right)^2, \qquad (13)$$

в которой все величины в правой части доступны непосредственному наблюдению.

В качестве примера вычислим отношение интенсивностей двух компонент второго дублета Cs, $7^2P \to 6^2S$. Имеем

$$\Delta_6 = 554, \quad E_6 = -19951,$$
$$\Delta_7 = 181, \quad E_7 = -9551,$$
$$\Delta_8 = 80, \quad E_8 = -5659,$$
$$\Delta_9 = 43, \quad E_9 = -3747.$$

Таким образом, мы имеем

$$\sum_m' \frac{\sqrt{\Delta_m\Delta_7}}{E_7-E_m}\sqrt{\frac{J_m}{J_7}} = 0{,}032\sqrt{\frac{J_6}{J_7}} - 0{,}031\sqrt{\frac{J_8}{J_7}} - 0{,}010\sqrt{\frac{J_9}{J_7}} - \ldots$$

Практически важным оказывается лишь слагаемое, обусловленное возмущением терма $6P$. Соответствующее отношение для калия [3] равно примерно 200, для натрия [4] — 120. Джентиле и Майорана [5] теоретически рассчитали отношение J_6/J_7 для Cs; они нашли, что $J_6/J_7 = 125$. Мы здесь воспользовались этим значением и получили, что

$$\sum_m' \frac{\sqrt{\Delta_m\Delta_7}}{E_7-E_m}\sqrt{\frac{J_m}{J_7}} = 0{,}032\sqrt{125} = 0{,}36.$$

По формуле (13) находим, следовательно,

$$\frac{a_{7,2}}{a_{7,1}} = 2\left(\frac{1{,}12}{0{,}76}\right)^2 = 4{,}3.$$

Значение этого отношения несколько выше наблюдаемого 3,85. Однако это различие очень легко объясняется, если учесть, что мы воспользовались только первым приближением теории возмущений. Аналогичным путем для второго дублета калия находим отношение 2,16. И в этом случае теоретическое значение несколько выше, чем это наблюдал Разетти (2,10). Для первого дублета главной серии получаем теоретические отношения, которые немного меньше 2. Однако это различие слишком мало, чтобы его можно было наблюдать.

Резюмируя, можно сказать, что представленная здесь теория правильно объясняет, по порядку величины, большие отклонения отношения интенсивностей от 2.

---

[3] W. Prokofjew, G. Gamov (Zs. f. Phys., 1927, **44**, 887) дают для отношения чисел дисперсионных электронов величину 111; отсюда вычисляется указанное значение.

[4] A. Filippov, W. Prokofjew. Zs. f. Phys., 1929, **56**, 458.

[5] G. Gentile, E. Majorana. Rend. Lincei, 1928, **8**, 229.

К статьям 42 и 54

В Пизе, Флоренции и Риме всегда были сильны спектроскопические традиции и большинство экспериментальных работ проводилось именно в этой области. В какое-то время Ферми почувствовал, что уже в ближайшем будущем физики были готовы приступить к разработке проблем строения ядра и что именно в эту сторону и следовало направить их усилия.

Изучение сверхтонкой структуры было вполне естественным мостом между этими двумя областями.

Внимание Ферми привлекла данная Паули интерпретация этого явления как следствия наличия спина и магнитного момента у ядра. Однако в то время это явление выглядело довольно запутанным, и высказывались законные сомнения в том, что интерпретация Паули является полной, хотя она и выглядела правдоподобной.

Ферми овладел дираковской теорией электрона и прочел статью Харгривса (Proc. Roy. Soc., 1929, **124**, 568), заметив, однако, что последняя была неполной в одном существенном пункте, поскольку не учитывала спин-спинового взаимодействия. Он повторил вычисления в корректной форме, пользуясь теорией Дирака. Основным результатом является формула (2) в его статье 42, весьма существенная для анализа сверхтонкой структуры. Эту формулу можно вывести методами, гораздо более простыми, чем те, которыми первоначально пользовался Ферми.

В последующие годы объем экспериментального материала по сверхтонкой структуре спектральных линий значительно возрос. При этом обнаружилось несколько случаев явного расхождения между значениями магнитных моментов ядер, измеренных по разным спектральным термам. Ферми и его друзья вполне сознавали важность проявления возмущений в спектроскопических явлениях, таких, как появление запрещенных линий, аномалии интенсивности и др. Естественным было попытаться объяснить как эффект возмущений также и аномалии сверхтонкой структуры. Это потребовало уточнения первоначальной формулы Ферми [формула (2) в статье 42] и тщательного анализа возмущений, создаваемых соседними термами.

Такая дополнительная работа была выполнена Ферми и Сегре в 1933 г. и изложена в статье 54. Статья [Б58] представляет собой предварительное сообщение (письмо в редакцию «Nature»).

Э. Сегре

42

О МАГНИТНЫХ МОМЕНТАХ АТОМНЫХ ЯДЕР*

Магнитные моменты ядер Cs и Na находятся из сверхтонкой структуры этих элементов. § 1. Введение. § 2. Постановка задачи и результаты. § 3. Обсуждение результатов. § 4. Вывод формул для s-термов. § 5. Вывод формул для p-термов.

1. Как известно, сверхтонкая структура атомных спектров в большинстве случаев обусловлена связью собственных моментов ядра с полным моментом импульса электронов. Таким образом, сравнивая наблюдаемую сверхтонкую структуру с теоретическим расчетом этой связи, можно найти значение магнитного момента ядра. Но для большинства атомов такой расчет представляет большие трудности, поскольку требуется учитывать вклад многих валентных электронов. Наиболее прост случай щелочных элементов.

Сверхтонкая структура щелочных металлов к настоящему времени изучалась для случаев Cs и Na. Джексон [1] наблюдал сверхтонкую структуру трех дублетов главной серии Cs и нашел, что все линии состоят из двух компонент, отстоящих друг от друга примерно на 0,3 волнового числа. Сверхтонкая структура D-линий Na изучалась Шюлером [2], который нашел, что эти линии являются дублетами с расстоянием между компонентами около 0,02 Å, т. е. приблизительно 0,06 волнового числа.

Из того факта, что, например, все линии главной серии Cs обнаруживают приблизительно одинаковое расщепление, можно заключить, как это делает и Джексон, что расщепление обусловлено преимущественно сверхтонкой структурой основного терма $6\,^2S_{1/2}$ цезия. Наблюдающиеся же небольшие различия в расщеплении тех или иных линий связаны, по-видимому, с неразрешаемой структурой p-терма.

Пусть k — механический момент ядра, измеренный в единицах $h/2\pi$. Согласно обычным правилам пространственного квантования, следует ожидать, что основной терм щелочных металлов (с полным моментом электрона 1/2) расщепляется на два терма с полным моментом (момент ядра + момент электрона)

$$f_1 = k + \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad f_2 = k - \frac{1}{2}.$$

Это согласуется с наблюдаемым дублетным характером сверхтонкой структуры, если принять, что возможная сложная структура p-терма

---

* *Über die magnetischen Momente der Atomkerne.* Zs. f. Phys., 1930, 60, 320—333.

[1] D. A. Jackson. Proc. Roy. Soc., 1928, **121**, 432.

[2] H. Schüler. Naturw., 1928, **16**, 512.

не может быть разрешена. Но судить о значении k только на основании данных о величине расщепления сверхтонкой структуры представляется невозможным или, во всяком случае, очень смелым. Для определения k, вероятно, проще и надежнее воспользоваться данными об отношении интенсивностей компонент сверхтонкой структуры. Согласно обычным правилам, которые без труда могут быть получены квантовомеханически и для случая сверхтонкой структуры, отношение интенсивностей упоминавшихся компонент есть

$$\frac{2f_1+1}{2f_2+1}=\frac{k+1}{k}, \tag{1}$$

т. е. 3, 2, 5/3,. . ., 1 для $k = 1/2, 1, 3/2,\ldots, \infty$. Джексон не приводит данных об отношении интенсивностей сверхтонкой структуры Cs. В случае Na отношение интенсивностей по оценке Шюлера составляет от 2 до 2,5. Таким образом, вероятным значением момента ядра Na является $k = 1$; однако вполне возможно, что указанный момент равен 1/2 или 3/2.

2. Стоящая перед нами задача заключается в вычислении сверхтонкой структуры, которую следует ожидать у атома щелочного элемента с теоретической точки зрения; дальнейшее сравнение с экспериментально найденным расщеплением позволит нам сделать вывод о значении магнитного момента ядра. Теоретическое рассмотрение сверхтонкой структуры для атома с одним электроном было проведено в недавней работе Харгривса [3]. Он рассматривает случай $k = 1/2$ и использует теорию электрона Паули — Дарвина. В теории Харгривса пренебрегается магнитной энергией взаимодействия между собственными магнитными моментами ядра и электронов. Однако, как легко показать, обусловленные этим взаимодействием члены имеют тот же порядок величины, что и члены, обязанные взаимодействию спина ядра и орбитального момента электрона, и поэтому должны учитываться в расчете.

Для s-термов я использовал теорию электронов Дирака, так как в этом случае теория Паули не приводит к разумным результатам. Поскольку случай s-термов наиболее важен — как отмечалось выше, подавляющая часть наблюдаемого расщепления обусловлена расщеплением этого терма,— соответствующие формулы получены для любого значения механического момента k ядра. Для p-термов использовалась упрощенная теория Паули и принималось $k = 1/2$, причем по-прежнему учитывалось магнитное взаимодействие спинов ядра и электрона.

В случае p-термов вычисление собственных функций электронов не является необходимым, так как константы, входящие в формулы, с достаточной точностью могут быть получены из известного расщепления p-терма, обусловленного влиянием собственного момента электрона.

---

[3] J. Hargreaves. Proc. Roy. Soc., 1929, 124, 568.

Конечно, для s-термов такой метод неприменим, и в этом случае необходимо пользоваться численной оценкой собственной функции. Такая оценка для основных термов Na и Cs была сделана с помощью статистических методов рассмотрения атомных электронов [4]; бо́льшую точность, видимо, можно было бы получить, используя метод «самосогласованного поля» Хартри [5]. Но, так как вычисления этим методом несколько громоздки, я ограничился приближением, даваемым статистическим методом.

Вывод полученных формул будет кратко изложен в заключительных разделах статьи; здесь же мы остановимся на полученных результатах и обсудим вытекающие из них следствия.

Влияние собственного момента ядра на s-терм заключается в расщеплении этого терма на два с разностью энергий (ср. § 4)

$$\Delta(s) = \frac{8\pi}{3}\,\frac{2k+1}{k}\,\mu\mu_0\psi^2(0). \tag{2}$$

Здесь μ_0 — магнетон Бора; μ — магнитный момент ядра; $\psi(0)$ — значение нормированной собственной функции электрона в месте нахождения ядра.

Вычисления для p-термов проводились только при $k = 1/2$. В этом случае каждый p-терм расщепляется на два. Расщепление терма $^2P_{1/2}$ составляет (ср. § 5)

$$\Delta(^2P_{1/2}) = \frac{32}{3}\,\mu\mu_0\,\overline{\frac{1}{r^3}}, \tag{3}$$

где

$$\overline{\frac{1}{r^3}} = \int \frac{1}{r^3}\,\psi^2 d\tau \tag{4}$$

обозначает среднее значение величины $1/r^3$. Расщепление терма $^2P_{3/2}$ составляет

$$\Delta(^2P_{3/2}) = \frac{64}{15}\,\mu\mu_0\,\overline{\frac{1}{r^3}}. \tag{5}$$

Как отмечалось выше, для оценки расщепления (2) s-терма необходимы численные расчеты собственной функции электронов. Такие расчеты были проделаны для основных термов Cs и Na ($6S$ и $3S$ соответственно); найдено, что

для Cs $\quad \psi^2(0) = 2{,}7\cdot10^{25}$,

для Na $\quad \psi^2(0) = 2{,}45\cdot10^{24}$.

---

[4] См., например, статью автора в книге: Falkenhagen, Quantentheorie und Chemie, Leipzig, 1928. (Статья 37).

[5] D. R. Hartree. Proc. Camb. Phil. Soc., 1928, 24, 89.

Тогда из соотношения (2) получаем, подставляя значение магнетона Бора и выражая расщепление в волновых числах:

$$\left.\begin{aligned} &\text{для Cs} \quad \Delta(6S) = 146\,\frac{\mu}{\mu_0}\,\frac{2k+1}{k}, \\ &\text{для Na} \quad \Delta(3S) = 13{,}4\,\frac{\mu}{\mu_0}\,\frac{2k+1}{k}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Для вычисления расщеплений (3) и (5) p-терма, как уже говорилось, знание собственных функций не является необходимым. Именно, с достаточно хорошим приближением можно найти (ср. § 5), что

$$\overline{\frac{1}{r^3}} = \frac{\delta}{3Z\mu_0^2}, \tag{7}$$

где δ — энергетический интервал между термами $^2P_{1/2}$ и $^2P_{3/2}$.

Подставляя полученное выражение в соотношения (3) и (5), находим следующие расщепления сверхтонкой структуры:

$$\text{для терма } ^2P_{1/2} \quad \Delta(^2P_{1/2}) = \frac{32}{9Z}\,\frac{\mu}{\mu_0}\,\delta, \tag{8}$$

$$\text{для терма } ^2P_{3/2} \quad \Delta(^2P_{3/2}) = \frac{64}{45Z}\,\frac{\mu}{\mu_0}\,\delta. \tag{9}$$

Электронное расщепление δ первого p-терма Cs, $6P$ составляет 554 волновых чисел; тогда из соотношений (8) и (9) получаем для $Z = 55$:

$$\Delta(6^2P_{1/2}) = 36\,\frac{\mu}{\mu_0} \quad \text{и} \quad \Delta(6^2P_{3/2}) = 14\,\frac{\mu}{\mu_0},$$

где все выражено в волновых числах. Расщепление же основного терма Cs, как это следует из соотношения (6) при $k = 1/2$, составляет 584 μ/μ_0. Таким образом, это расщепление более чем в 10 раз превышает расщепление p-терма. Этим и объясняется тот факт, что на опыте всегда наблюдаются дублеты: разрешающая способность оказывается недостаточной для наблюдения много меньших расщеплений, связанных с p-термами.

Воспользовавшись соотношением (6), можно по наблюдаемым расщеплениям сверхтонкой структуры (0,3 для Cs и 0,06 для Na) вычислить отношение μ_0/μ магнетона Бора к магнитному моменту ядра, если значение k известно. В табл. 1 приводятся величины этого отношения в зависимости от принимаемого значения k.

Как отмечалось выше, значение k может быть найдено из отношения интенсивностей компонент сверхтонкой структуры; для натрия наиболее вероятно значение $k = 1$. Таким образом, вероятное значение магнитного момента ядра натрия равно $\mu_0/670$.

Возможные погрешности в данных табл. 1 обусловлены частично

Таблица 1

k	$^1/_2$	1	$^3/_2$	∞
Cs	1950	1460	1300	980
Na	890	670	600	450

ошибками измерений расщепления, а частично — статистической оценкой собственных функций. Последний источник погрешностей может внести ошибку до 20—30%; точность измерений, видимо, гораздо выше.

3. Представляет определенный интерес сравнить эти результаты с теми гипотезами, которые можно высказать о магнетизме ядра. Например, по аналогии с рассмотрением электрона можно было бы принять, как это делает Джексон для случая $k = 1/2$, что магнитный момент ядра дается выражением

$$\mu = 2k\frac{Zeh}{4\pi mc},$$

где m — масса ядра. Тогда отношение магнетона Бора к магнитному моменту ядра должно быть равно

$$\frac{\mu_0}{\mu} = 1840\frac{M}{2Zk} = 920\frac{M}{Zk},$$

где M — атомный вес. В случае Cs имеем $M/Z = 2{,}41$, откуда $\mu_0/\mu = 2220/k$. Из сравнения с данными табл. 1 видно, что для k получается приемлемое значение — около 2. Но в случае Na гипотеза представляется необоснованной. Действительно, для этого элемента $M/Z = 2{,}09$ и $\mu_0/\mu = 1920/k$; из сравнения с табл. 1 получаем, что значение k должно быть равно 3—4. Однако результаты Шюлера по отношению интенсивностей компонент сверхтонкой структуры, видимо, исключают столь высокое значение k.

4. В последующих разделах статьи будет дан краткий вывод использовавшихся нами формул (2), (3), (5) и (7).

Обратимся сначала к теории расщепления s-терма. С этой целью запишем дираковскую релятивистскую функцию Гамильтона в виде

$$W = eV - c\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{U}\right) - (\beta + 1)mc^2, \qquad (10)$$

где $\mathbf{p}$ — импульс электрона (а также оператор $h/2\pi i$ grad), а β и $\boldsymbol{\alpha}$ — соответственно q-скаляр и q-вектор, которые как операторы выражаются

через матрицы

$$\left.\begin{aligned}\beta = \begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{vmatrix}, \quad \alpha_x = \begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix},\\ \alpha_y = \begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & -i\\ 0 & 0 & i & 0\\ 0 & -i & 0 & 0\\ i & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}, \quad \alpha_z = \begin{vmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{vmatrix}.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Электрический потенциал V в случае щелочных элементов зависит только от радиус-вектора r.

Чтобы теория была до конца последовательной, ядро надо было бы рассматривать методом, подобным дираковской теории электрона; однако сделать это, видимо, очень трудно. Но мы можем воспользоваться смешанным подходом и рассматривать электрон с помощью теории Дирака, а ядро — методом, подобным теории электрона Паули. Для оправдания такого подхода можно заметить, что в случае ядра, вследствие его большей массы и меньших скоростей, различие между методами Дирака и Паули практически ничтожно.

Примем также, что μ_x, μ_y, μ_z — компоненты магнитного момента ядра, причем μ_x, μ_y, μ_z — q-числа с собственными значениями

$$\mu, \quad \frac{\mu}{k}(k-1), \quad \frac{\mu}{k}(k-2), \quad \ldots, \quad -\frac{\mu}{k}(k-2), \quad -\frac{\mu}{k}(k-1), \quad -\mu. \tag{12}$$

Величины μ_x, μ_y, μ_z удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\mu_y\mu_z - \mu_z\mu_y = i\frac{\mu}{k}\mu_x, \qquad \mu_z\mu_x - \mu_x\mu_z = i\frac{\mu}{k}\mu_y, \qquad \mu_x\mu_y - \mu_y\mu_x = i\frac{\mu}{k}\mu_z, \tag{13}$$

и коммутируют с величинами $x, y, z, p_x, p_y, p_z, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \beta$.

Поле, создаваемое магнитным моментом ядра, может быть описано векторным потенциалом $\mathbf{U} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}/r^3$; имеем

$$U_x = \frac{1}{r^3}(z\mu_y - y\mu_z), \qquad U_y = \frac{1}{r^3}(x\mu_z - z\mu_x), \qquad U_z = \frac{1}{r^3}(y\mu_x - x\mu_y). \tag{14}$$

Подставляя выражения для $\mathbf{U}$ в формулу (10), получаем

$$\begin{aligned}W = eV - c\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} - (\beta+1)mc^2 + \\ + \frac{e}{r^3}\left[\alpha_x(z\mu_y - y\mu_z) + \alpha_y(x\mu_z - z\mu_x) + \alpha_z(y\mu_x - x\mu_y)\right],\end{aligned} \tag{15}$$

где последний член представляет возмущение, обусловленное влиянием

магнетизма ядра. Итак, энергия возмущения равна

$$w = \frac{e}{r^3}\left[\alpha_x (z\mu_y - y\mu_z) + \alpha_y (x\mu_z - z\mu_x) + \alpha_z (y\mu_x - x\mu_y)\right]. \tag{16}$$

Если пренебречь влиянием собственного момента ядра, каждая собственная функция будет состоять из четырех функций только пространственных координат x, y, z: $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$.
Две первые функции, ψ_1 и ψ_2, очень малы по сравнению с функциями ψ_3 и ψ_4; в первом приближении имеем [6]

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{ih}{4\pi mc}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_4 + \frac{\partial}{\partial z}\psi_3\right], \\ \psi_2 &= \frac{ih}{4\pi mc}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_3 - \frac{\partial}{\partial z}\psi_4\right]. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Функции ψ_3 и ψ_4 в первом приближении удовлетворяют обычному нерелятивистскому уравнению Шредингера. Если влияние моментов ядра не учитывается, s-терм является дважды вырожденным. Две собственные функции s-терма, как известно, в первом приближении имеют следующий вид (каждой собственной функции соответствуют четыре функции):

$$\left.\begin{aligned} \Psi_1 &= \left[\frac{ih}{4\pi mc}\cos\Theta\psi'(r),\ \ \frac{ih}{4\pi mc}\sin\Theta e^{i\varphi}\psi'(r),\ \ \psi(r),\ \ 0\right], \\ \Psi_2 &= \left[\frac{ih}{4\pi mc}\sin\Theta e^{-i\varphi}\psi'(r),\ \ \frac{ih}{4\pi mc}\cos\Theta\psi'(r),\ \ 0,\ \ \psi(r)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Здесь r, Θ и φ — сферические координаты, ψ — функция только r, которая в первом приближении совпадает с обычной шредингеровской функцией рассматриваемого s-терма.

Если рассматривать вырождение, обусловленное $(2k + 1)$ возможностями ориентирования ядра, то s-терм становится $2(2k + 1)$-кратно вырожденным. Собственная функция будет тогда зависеть еще и от координаты, описывающей спин ядра (например, μ_z). Так как имеется $2k + 1$ собственных значений, каждая собственная функция теперь состоит из $4(2k + 1)$ функций только x, y, z. Эти функции целесообразно записывать в следующем виде:

$$\left|\begin{matrix} \psi_{1,k} & \psi_{2,k} & \psi_{3,k} & \psi_{4,k} \\ \psi_{1,k-1} & \psi_{2,k-1} & \psi_{3,k-1} & \psi_{4,k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_{1,-k+1} & \psi_{2,-k+1} & \psi_{3,-k+1} & \psi_{4,-k+1} \\ \psi_{1,-k} & \psi_{2,-k} & \psi_{3,-k} & \psi_{4,-k} \end{matrix}\right| \tag{19}$$

[6] См., например, C. G. Darwin. Proc. Roy. Soc., 1928, 118, 654.

При этом α_x, α_y, α_z и β действуют на четыре столбца этой таблицы, а μ_x, μ_y, μ_z — на $2k+1$ рядов.

В качестве примера рассмотрим случай $k = 1$ подробнее. При этом собственные значения μ_x, μ_y, μ_z, согласно (12), будут μ, 0, $-\mu$. Из перестановочных соотношений (13) находим, что в качестве μ_x, μ_y, μ_z можно взять операторы, представляемые следующими матрицами:

$$\mu_x = \mu \begin{vmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix}, \quad \mu_y = \mu \begin{vmatrix} 0 & -i/\sqrt{2} & 0 \\ i/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \\ 0 & i/\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix},$$

$$\mu_z = \mu \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}. \tag{20}$$

Как отмечалось выше, операторы μ_x, μ_y, μ_z воздействуют на строки таб лицы (19), так что, например

$$\mu_x \begin{vmatrix} \psi_{1,1} & \psi_{2,1} & \psi_{3,1} & \psi_{4,1} \\ \psi_{1,0} & \psi_{2,0} & \psi_{3,0} & \psi_{4,0} \\ \psi_{1,-1} & \psi_{2,-1} & \psi_{3,-1} & \psi_{4,-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\mu}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \psi_{1,0} & \psi_{2,0} & \psi_{3,0} & \psi_{4,0} \\ \psi_{1,1} + \psi_{1,-1} & \psi_{2,1} + \psi_{2,-1} & \psi_{3,1} + \psi_{3,-1} & \psi_{4,1} + \psi_{4,-1} \\ \psi_{1,0} & \psi_{2,0} & \psi_{3,0} & \psi_{4,0} \end{vmatrix}.$$

Для каждого s-терма получаем $2 \cdot 3 = 6$ независимых невозмущенных собственных функций, так как s-терм шестикратно вырожден. В качестве невозмущенных собственных функций можно взять, например, следующие:

$$\begin{vmatrix} \Psi_1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 \\ \Psi_1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \Psi_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \Psi_2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 \\ \Psi_2 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \Psi_2 \end{vmatrix},$$

где четыре функции одной строки для краткости обозначаются одним символом Ψ_1, Ψ_2 или 0. Функции Ψ_1 и Ψ_2 определяются выражением (18); 0 обозначает строку: 0, 0, 0, 0.

Для вычисления расщепления терма мы должны теперь, согласно обычным методам теории возмущений вырожденных систем, образовать шестирядную матрицу, представляющую энергию возмущения (16). Это не представляет труда, поскольку смысл всех операторов, входящих в соотношение (16), уже определен.

Принимая во внимание выражение (18) и формулы

$$-\int \frac{1}{r^2} \sin^2 \Theta \psi \psi' d\tau = \frac{2\pi}{3} \psi^2 (0),$$

$$-\int \frac{1}{r^2} (1 + \cos^2 \Theta) \psi \psi' d\tau = \frac{8\pi}{3} \psi^2 (0),$$

находим после несколько длинных, но простых вычислений следующую матрицу возмущения:

$$\frac{8\pi}{3} \mu\mu_0 \psi^2 (0) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} . \qquad (21)$$

Собственные значения этой матрицы дают сдвиг терма, обусловленный магнетизмом ядра; в нашем случае они равны:

$$w_1 = \frac{8\pi}{3} \mu\mu_0 \psi^2 (0) \qquad \text{(четырехкратное)}$$

и

$$w_2 = -\frac{16\pi}{3} \mu\mu_0 \psi^2 (0) \qquad \text{(двукратное)}.$$

Итак, s-терм расщепляется на верхний, четырехкратно вырожденный, и нижний, двукратно вырожденный, термы. Расщепление равно

$$w_1 - w_2 = 8\pi\mu\mu_0 \psi^2 (0). \qquad (22)$$

Для произвольного значения k можно аналогичным путем найти, что s-терм расщепляется на верхний, $(2k + 2)$-кратно вырожденный, и нижний, $2k$-кратно вырожденный, термы, а величина расщепления дается формулой (2).

5. Теперь остается убедиться в справедливости теоретических выражений для расщепления p-термов [формулы (3) и (5)]. Как упоминалось выше, для p-термов использовалась теория Паули, а не теория Дирака [7]. Подробные вычисления проводились для случая $k = 1/2$.

---

[7] Для терма $^2P_{1/2}$ вычисления проводились и по методу Дирака; результат оказался тождественным, полученному методом Паули.

Возьмем в качестве гамильтониана первого приближения следующую функцию:

$$W_0 = \frac{1}{2m} p^2 + eV - \frac{1}{2mc^2}(W_0 - eV)^2 + \frac{\mu_0}{2mc} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{M}. \qquad (23)$$

Здесь два первых члена — обычная нерелятивистская гамильтонова функция без учета собственного момента электрона. Третий член представляет релятивистское возмущение, а четвертый — влияние связи между орбитальным моментом **M** и спином электрона $\boldsymbol{\sigma}$. Поскольку $\boldsymbol{\sigma}$, как известно, может быть представлен двурядными матрицами вида

$$\sigma_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix},$$

каждая собственная функция расщепляется на две (если пренебрегается влиянием спина ядра) функции, зависящие только от x, y, z. Невозмущенные собственные функции для дважды вырожденного терма $^2P_{1/2}$, как и в обычной теории Паули, имеют вид

$$\left[\frac{1}{\sqrt{3}} f(r) P_0, \; \sqrt{\frac{2}{3}} f(r) P_1\right], \quad \left[-\sqrt{\frac{2}{3}} f(r) P_{-1}, \; \frac{1}{\sqrt{3}} f(r) P_0\right], \qquad (24)$$

где через

$$P_1 = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\Theta e^{i\varphi}, \quad P_0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\Theta, \quad P_{-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\Theta e^{-i\varphi}$$

обозначены сферические функции первого порядка. Для четырехкратно вырожденного терма $^2P_{3/2}$ получаем четыре собственные функции:

$$[f(r) P_1, 0], \quad \left[-\sqrt{\frac{2}{3}} f(r) P_0, \; \frac{1}{\sqrt{3}} f(r) P_1\right],$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{3}} f(r) P_{-1}, \; \sqrt{\frac{2}{3}} f(r) P_0\right], \quad [0, \; f(r) P_{-1}]. \qquad (25)$$

Возмущение, обусловленное влиянием магнитного момента ядра, состоит во взаимодействии момента ядра с орбитальным моментом и спином электрона. Энергия первого взаимодействия равна

$$\frac{e}{mcr^3} \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{M},$$

а энергия второго, не учитывавшегося в работе Харгривса,—

$$-\frac{\mu_0}{r^3} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\mu} + \frac{3\mu_0}{r^5} (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\mu}).$$

Итак, суммарное возмущение имеет вид

$$w = \frac{e}{mcr^3}\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{M} - \frac{\mu_0}{r^3}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\mu} + \frac{3\mu_0}{r^5}(\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\mu}). \tag{26}$$

Как и в предыдущем случае, μ является q-вектором, компоненты которого удовлетворяют условиям (12) и (13). В рассматриваемом нами случае $k = 1/2$ каждая собственная функция расщепляется на четыре функции, зависящие только от x, y, z; мы будем записывать их в виде следующей таблицы:

$$\begin{vmatrix} \psi_{11} & \psi_{21} \\ \psi_{12} & \psi_{22} \end{vmatrix}$$

Операторы, представляющие спин электрона, действуют на столбцы этой таблицы; напротив, операторы

$$\mu_x = \mu\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \mu_y = \mu\begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}, \qquad \mu_z = \mu\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \tag{27}$$

представляющие момент ядра, действуют на ее строки. Так, например,

$$\mu_x\begin{vmatrix} \psi_{11} & \psi_{21} \\ \psi_{12} & \psi_{22} \end{vmatrix} = \mu\begin{vmatrix} \psi_{12} & \psi_{22} \\ \psi_{11} & \psi_{21} \end{vmatrix}, \qquad \sigma_x\begin{vmatrix} \psi_{11} & \psi_{21} \\ \psi_{12} & \psi_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \psi_{21} & \psi_{11} \\ \psi_{22} & \psi_{12} \end{vmatrix}.$$

Поскольку теперь принимаются во внимание обе возможности для ориентации спина ядра, ранее двукратно вырожденный терм $^2P_{1/2}$ становится четырехкратно вырожденным. В качестве невозмущенных собственных функций можно взять, например, следующие:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}\, fP_0, & \sqrt{\frac{2}{3}}\, fP_1 \\ 0, & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0, & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\, fP_0, & \sqrt{\frac{2}{3}}\, fP_1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} -\sqrt{\frac{2}{3}}\, fP_{-1}, & \frac{1}{\sqrt{3}}\, fP_0 \\ 0, & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0, & 0 \\ -\sqrt{\frac{2}{3}}\, fP_{-1}, & \frac{1}{\sqrt{3}}\, fP_0 \end{vmatrix}.$$

Для вычисления расщепления терма $^2P_{1/2}$, обусловленного возмущением (26), нужно образовать четырехрядную матрицу, представляющую энергию возмущения. Это нетрудно сделать, приняв во внимание следующие

формулы:

$$M_xP_1 = -\frac{h\sqrt{2}}{4\pi}P_0, \quad M_yP_1 = -i\frac{h\sqrt{2}}{4\pi}P_0, \quad M_zP_1 = \frac{h}{2\pi}P_1,$$

$$M_xP_0 = \frac{h\sqrt{2}}{4\pi}(P_{-1} - P_1), \quad M_yP_0 = i\frac{h\sqrt{2}}{4\pi}(P_1 + P_{-1}), \quad M_zP_0 = 0,$$

$$M_xP_{-1} = \frac{h\sqrt{2}}{4\pi}P_0, \quad M_yP_{-1} = -i\frac{h\sqrt{2}}{4\pi}P_0, \quad M_zP_{-1} = -\frac{h}{2\pi}P_{-1}.$$

Тогда для терма ${}^2P_{1/2}$ получаем следующую матрицу возмущения:

$$\frac{8}{3}\mu\mu_0\overline{\frac{1}{r^3}}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

имеющую собственные значения

$$\frac{8}{3}\mu\mu_0\overline{\frac{1}{r^3}} \text{ (трехкратное) и } -8\mu\mu_0\overline{\frac{1}{r^3}} \text{ (однократное).}$$

Аналогичным образом для терма ${}^2P_{3/2}$ находим матрицу возмущения:

$$\frac{8}{5}\mu\mu_0\overline{\frac{1}{r^3}}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 2/\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 0 & 0 & -4/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{3} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4/3 & 0 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/\sqrt{3} & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

имеющую собственные значения

$$\frac{8}{5}\mu\mu_0\overline{\frac{1}{r^3}} \text{ (пятикратное) и } -\frac{8}{3}\mu\mu_0\overline{\frac{1}{r^3}} \text{ (трехкратное).}$$

Итак, оказывается, что терм ${}^2P_{1/2}$ расщепляется на верхний, трижды вырожденный, и нижний, невырожденный, термы; расщепление дается формулой (3). Терм ${}^2P_{3/2}$ расшепляется на верхний, пятикратно вырожденный, и нижний, трижды вырожденный, термы; расщепление дается формулой (5).

Остается еще показать справедливость формулы (7). Для этого заметим, что разность энергий термов $^2P_{3/2}$ и $^2P_{1/2}$, обусловленная влиянием собственного момента электрона, равна, как известно:

$$\delta = -\frac{3\mu_0 h}{4\pi mc}\overline{\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}},$$

откуда получаем

$$\overline{\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}} = -\frac{4\pi mc}{3\mu_0 h}\delta. \qquad (28)$$

Вблизи ядра можно взять $V = Ze/r$ и

$$\frac{1}{r}\frac{dV}{dr} = -Ze\frac{1}{r^3}.$$

Но поскольку существенный для среднего значения в формуле (28) вклад дает область непосредственно вокруг ядра, находим с достаточно хорошим приближением

$$\overline{\frac{1}{r^3}} = -\frac{1}{Ze}\overline{\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}} = \frac{4\pi mc}{3\mu_0 Zeh}\delta,$$

т. е.

$$\overline{\frac{1}{r^3}} = \frac{\delta}{3Z\mu_0^2},$$

что совпадает с формулой (7). Для первых p-термов Cs из формулы (7) получается значение, всего на 4% меньше точного.

Добавление при корректуре

1. За это время мне удалось с помощью дираковской теории электрона подтвердить формулу (5) также и для термов $^2P_{3/2}$.

Расщепление сверхтонкой структуры для p-термов теперь можно дать для любого значения собственного момента k ядра.

Терм $^2P_{1/2}$ расщепляется на верхний, $(2k+2)$-кратно вырожденный, и нижний, $2k$-кратно вырожденный, термы; расщепление равно

$$\Delta(^2P_{1/2}) = \frac{2k+1}{k}\frac{8}{3}\mu\mu_0\overline{\frac{1}{r^3}}.$$

Терм $^2P_{3/2}$ расщепляется на два, три или четыре терма в зависимости от того, чему равно k : 1/2, 1 или >1. В последнем случае возмущенные термы сдвигаются от невозмущенного положения на такие расстояния:

$$\frac{8}{5}\mu\mu_0\overline{\frac{1}{r^3}},\quad \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{k}\right)\frac{8}{5}\mu\mu_0\overline{\frac{1}{r^3}},\quad -\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{3k}\right)\frac{8}{5}\mu\mu_0\overline{\frac{1}{r^3}},\quad -\left(1+\frac{1}{k}\right)\frac{8}{5}\mu\mu_0\overline{\frac{1}{r^3}}.$$

Статистические веса этих четырех возмущенных термов равны: $2k + 4$, $2k + 2$, $2k$, $2k - 2$.

При $k = 1$ нет последнего из указанных термов, а при $k = 1/2$ нет двух последних из них. Все эти результаты согласуются с обычными правилами связи квантовомеханических векторов.

2. Недавно появилась заметка (Filippov, Gross. Naturw., 1929, **17**, 121), посвященная изучению сверхтонкой структуры Rb. Сверхтонкая структура линий главной серии и в этом случае состоит в расщеплении на две компоненты; расстояние между ними составляет 0,114 волнового числа. Использовав данные, любезно присланные мне проф. Хартри, я смог найти для основного терма рубидия $\psi^2(0) = 8{,}8 \cdot 10^{24}$. Тогда

$$\frac{2k+1}{k}\frac{\mu}{\mu_0} = 0{,}0024.$$

Таким образом, для Rb

$$\frac{\mu_0}{\mu} = 1700,\ 1300,\ 1100,\ \ldots,\ 840$$

при

$$k = 1/2,\ 1,\ 3/2,\ \ldots,\ \infty.$$

Поступила 18 декабря 1929 г.

К статье 43

Хотя в 1926—1929 гг. квантовая механика доходила до Рима только в виде печатных работ, Ферми полностью овладел ею. Матричная механика Гейзенберга первоначально казалась слишком отличной от обычной математической физики и на первых порах не могла быть глубоко понята и усвоена, но вся важность работы Шредингера и волновой механики была оценена сразу же. Легко была воспринята и борновская интерпретация ψ-функции (см., однако, статью 34, где еще используется первоначальная интерпретация Шредингера.) Статьи Дирака читались немедленно после их появления, но для полного их «переваривания» требовалось значительное время. Для Ферми усвоение статьи часто означало получение ее результатов иными методами и притом с формулировкой новых важных приложений. По сути дела, это был процесс переоткрытия.

Ферми очень рано стал объяснять волновую механику своим друзьям и ученикам в неофициальных беседах; позже он прочитал несколько лекций на математическом коллоквиуме Римского университета. После лекций происходили оживленные дискуссии, в которых наряду с другими участвовали профессора Кастельнуово, Энрикуез и Леви-Чивита. Основные затруднения вызывала правильная интерпретация принципа неопределенности.

Нижеследующая статья, в которой развивается одно из сделанных Ферми замечаний, демонстрирует интересный аспект методов формулировки проблем квантовой механики и типов получаемых ответов.

Э. Сегре

43

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПРИНЦИПА ПРИЧИННОСТИ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ *

Цель настоящей работы — уточнить, в каких пределах можно говорить о причинности в квантовой механике и в каком смысле следует понимать утверждение о том, что квантовая механика не может привести к определению будущих событий. Уже сама эта программа говорит о том, что в данной работе почти не содержится новых результатов; здесь будут выражены в новой форме уже известные соотношения. Для большей ясности

* *L'interpretazione del principio di causalità nella meccanica quantistica*. Rend. Lincei, 1930, 11, 980—985; Nuovo Cimento, 1930, 7, 361—366. Представлено академиком О. Корбино на заседании 30 мая 1930 г.

изложения я ограничусь рассмотрением случая механики точки, движущейся по прямой линии; но развитые здесь соображения нетрудно было бы применить к более сложным системам.

Состояние механической системы, состоящей из точки, движущейся по прямой линии, можно определить, задавая в некоторый момент времени, например $t = 0$, значения положения и скорости (или количества движения). Поэтому для того, чтобы охарактеризовать состояние, достаточно задать абсциссу x точки и ее количество движения $p = m\dot{x}$ при $t = 0$. Предположим, что известен потенциал $U(x)$ силы, действующей на точку; тогда значения x и p при $t = 0$ однозначно определяют значения этих двух величин во все моменты времени (прошлого и будущего). Именно в этом смысле понимается утверждение о том, что в классической механике справедлив принцип причинности, т. е. задания состояния системы в данный момент времени достаточно для того, чтобы определить состояние этой системы в любой момент времени прошлого и будущего (конечно, здесь предполагается, что на рассматриваемую систему не действуют другие системы, характеристики которых известны не полностью). В этой статье мы будем говорить о классическом принципе причинности именно в этом точном смысле.

Конечно (продолжая рассматривать классический случай), для определения состояния системы нам не обязательно измерять в нулевой момент времени именно значения x и p; можно также измерять, например, значения двух независимых функций $f(x, p)$ и $g(x, p)$ от x и p. Из значений этих функций, если нужно, можно получить значение величин x и p.

Сейчас нам следует посмотреть, как эти соображения должны быть модифицированы при переходе к квантовой механике. С этой целью мы должны выяснить, что именно следует знать о системе (согласно квантовой механике) для того, чтобы иметь право сказать, что мы определили ее состояние. Гейзенберг показал, что невозможно одновременно точно измерить x и p; более того, при точном измерении x количество движения p становится совершенно неопределенным и, наоборот, x становится совершенно неопределенным при точном измерении p. Иными словами, в случае системы только с одной степенью свободы, как наша, можно измерять абсолютно точно в принципе только одну физическую величину, например x или p [или какую-нибудь функцию $g(x, p)$]. Поэтому мы должны понимать, что выполнение подобного измерения, поскольку оно представляет максимум того, что можно знать о системе в данный момент времени, определяет состояние системы в этот момент времени. Все это, однако, подразумевает, что определение состояния системы может быть сделано *существенно различными* способами, зависящими от выбора измеряемой функции $g(x, p)$. В классическом случае, когда возможны одновременные измерения двух независимых функций f и g от x и v, в конечном счете всегда определяются именно эти две переменные.

Возвращаясь к квантовой механике, предположим, что мы измеряем физическую величину $g(x, p)$ и находим ее значение g'; тогда легко можно

найти соответствующий скаляр поля [1]. Действительно, как известно [2], он получается как решение уравнения

$$g\,(x,\ p)\,\psi\,(x) = g'\,\psi\,(x), \tag{1}$$

где в левой части $g\ (x,\ p)$ следует понимать как оператор, получающийся путем подстановки в функцию $g\,(x,\ p)$ вместо p оператора $\frac{h}{2\pi i}\,\frac{d}{dx}$. Это уравнение, например, в случае, когда величина $g\,(x,\ p)$ суть энергия системы,— обычное уравнение Шредингера.

Если бы вместо $g\,(x,\ p)$ была измерена иная величина $G\,(x,\ p)$, то был бы найден другой скаляр поля; итак, скаляр поля, представляющий состояние системы, будет зависеть не только от состояния, но и от того способа, который мы использовали для его определения. Итак, согласно квантовой механике, состояние системы в данный момент времени может быть определено двумя разными способами, а именно: а) измерением значения физической величины $g\,(x,\ p)$; б) заданием для рассматриваемого момента времени функции (вообще говоря, комплексной) от x

$$\psi\,(x) = \rho\,(x)\,e^{i\theta(x)},$$

которая представляет скаляр поля в этот момент времени.

Нетрудно убедиться в том, что эти два метода полностью эквивалентны. Как мы уже видели [см. уравнение (1)], зная значение g', которое принимает величина $g\,(x,\ p)$, в этот момент времени действительно можно определить скаляр поля $\psi\,(x)$ с точностью до несущественного постоянного множителя. Теперь мы намерены показать, что, наоборот, если задана любая комплексная функция $\psi\,(x) = \rho e^{i\theta}$, представляющая в данный момент времени скаляр поля, то всегда будет существовать реальный оператор $g\,(x,\ p)$, для которого

$$g\,(x,\ p)\,\psi\,(x) = 0; \tag{2}$$

таким образом, можно утверждать, что если скаляр поля есть $\psi\,(x)$, то величина $g\,(x,\ p)$ имеет нулевое значение. Итак, состояние системы, соответствующее скаляру поля $\psi\,(x)$, может также быть определено как состояние, для которого $g\,(x,\ p) = 0$. Из требования, чтобы это утверждение имело физический смысл, естественно вытекает, что величина $g\,(x,\ p)$ должна быть вещественной. Чтобы доказать существование величины $g\,(x,\ p)$, покажем, что можно записать

$$g\,(x,\ p) = \left(p - \frac{h}{2\pi}\,\frac{d\theta}{dx}\right)^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}\,\frac{1}{\rho}\,\frac{d^2\rho}{dx^2}\,. \tag{3}$$

[1] См. примечание на стр. 232.— *Прим. ред.*
[2] P. A. M. Dirac. Proc. Roy. Soc., 1927, **113**, 621.

В самом деле, эта величина, очевидно, вещественна, поскольку ρ и θ суть две вещественные функции x. Сразу можно проверить, что

$$g\left(x, \frac{h}{2\pi i}\frac{d}{dx}\right)\rho e^{i\theta} = 0, \tag{4}$$

т. е. что величина g удовлетворяет уравнению (2). Естественно, что величина (3) не является единственной, удовлетворяющей уравнению (2). Например, уравнению (2) удовлетворяют и вещественные величины g^2, g^3, ... Но для нас достаточно доказательства существования, по крайней мере, одной величины $g(x, p)$, удовлетворяющей (2).

Теперь нам следует перейти к трактовке проблемы, которой посвящена настоящая работа, т. е. выяснению, какие именно характеристики состояния системы в будущий момент времени можно определить с помощью опытов, выполненных в настоящий момент времени.

Мы намерены показать, что всегда можно узнать значение любой физической величины $G(x, p)$ в любой момент времени t_0 с помощью соответствующим образом выбранного опыта, выполняемого в момент времени $t = 0$.

Чтобы убедиться в этом, предположим, что при измерении величины G в момент времени t_0 ее значение оказывается G'. С помощью уравнения (1) из этого факта можно получить скаляр поля системы в момент времени t_0. Он определяется из уравнения

$$G\left(x, \frac{h}{2\pi i}\frac{d}{dx}\right)\psi(x, t_0) = G'\psi(x, t_0). \tag{5}$$

Определив таким образом функцию ψ в момент времени t_0, мы можем узнать ее значение для любого момента времени. Действительно, если обозначить энергию системы через $H(x, p)$, то функция $\psi(x, t)$ удовлетворяет уравнению Шредингера

$$H\left(x, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x, t) = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{6}$$

Поскольку это уравнение первого порядка по времени, можно полностью определить функцию ψ, зная ее значение в момент времени $t = t_0$. Поэтому с помощью (6) можно получить скаляр поля $\psi(x, 0)$ в момент времени $t = 0$. В определенной таким образом функции $\psi(x, 0)$, естественно, появится в качестве параметра значение G', которое величина $G(x, p)$ по предположению принимает в момент t_0; подчеркнем это, записывая $\psi(x, 0, G')$ вместо $\psi(x, 0)$.

Мы уже показали, что всегда можно определить такую вещественную физическую величину $g(x, p)$, которая удовлетворяет соотношению

$$g\left(x, \frac{h}{2\pi i}\frac{d}{dx}\right)\psi(x, 0, G') = 0. \tag{7}$$

Это значит, что если при измерении величины $g(x, p)$ будет найдено, что она равна нулю, то собственная функция будет $\psi(x, 0, G')$. Поэтому, если при измерении в момент $t = 0$ обнаружится, что $g(x, p) = 0$, то это позволит нам заключить, что, измерив в момент t_0 величину $G(x, p)$, мы найдем для нее значение G'.

Поскольку параметр G' входит в $\psi(x, 0, G')$, то он будет входить также и в $g(x, p)$, что можно выразить, записав $g(x, p, G')$. Условие, необходимое и достаточное для того, что в момент времени t_0 будет найдено $G(x, p) = G'$, состоит поэтому в том, чтобы в момент времени $t = 0$ было найдено

$$g(x, p, G) = 0.$$

Решая это уравнение относительно G', находим

$$A(x, p) = G'.$$

Поэтому следует заключить, что значение G', которое будет принимать величина $G(x, p)$ в момент времени t_0, получается измерением в момент времени $t = 0$ величины $A(x, p)$. Этим решена проблема, которую мы поставили перед собой.

Мы можем проиллюстрировать применение этого метода конкретным, крайне простым примером. Рассмотрим не подвергавшуюся действию никакой силы точку, движущуюся по прямой линии, и зададим вопрос, какого типа величину следует измерить в момент времени $t = 0$, чтобы определить значение абсциссы точки в момент времени t_0. Для этого предположим, что в момент времени t_0 точка имеет абсциссу x_0. Тогда функция Шредингера в момент t_0, очевидно, будет

$$\psi(x, t_0) = \delta(x - x_0), \tag{8}$$

где δ обозначает сингулярную функцию Дирака. В случае, когда на нашу точку не действует никакая сила, ее гамильтониан есть просто $H = p^2/2m$; поэтому уравнение Шредингера (6) принимает вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -\frac{4\pi mi}{h}\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{9}$$

Мы должны найти решение уравнения (9), которое при $t = t_0$ имеет вид (8). Нетрудно проверить, что такое решение с точностью до постоянного множителя можно записать в форме [2]

$$\psi(x, t) = \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\sqrt{t_0 - t}}\, e^{-\frac{(x-x_0)^2}{t_0-t}\left[\alpha + \frac{\pi i m}{h}\right]}.$$

Поэтому, с точностью до постоянного множителя, имеем

$$\psi(x, 0) = e^{-\frac{\pi i m}{h t_0}(x-x_0)^2}.$$

[2] E. H. Kennard. Zs. f. Phys., 1927, 44, 326.

Чтобы определить $g(x, p, x_0)$, мы должны в соотношении (3) положить

$$\theta = \frac{\pi m}{h t_0}(x - x_0)^2, \qquad \rho = 1.$$

Отсюда

$$g(x, p, x_0) = \left\{p + \frac{h}{2\pi}\,\frac{2\pi m}{h t_0}(x - x_0)\right\}^2 = \left\{p + \frac{m}{t_0}(x - x_0)\right\}^2.$$

Если измерение g в нулевой момент времени дает нулевое значение, т. е. если для $t = 0$ находим

$$\left\{p + \frac{m}{t_0}(x - x_0)\right\}^2 = 0, \tag{10}$$

то значение абсциссы в момент времени t_0 заведомо будет x_0. Решая уравнение (10) относительно x_0, находим

$$x_0 = x + \frac{t_0}{m}p, \tag{11}$$

т. е. получаем следующий результат: чтобы знать абсциссу в момент времени t_0, достаточно измерить в момент времени $t = 0$ величину $x + \frac{t_0}{m}p$. Этот результат с классической точки зрения очевиден, поскольку p/m не что иное, как скорость точки; последняя в течение интервала времени t_0 постоянна, поскольку движение в отсутствие каких-либо сил равномерно. Таким образом, в этом случае мы пришли к тривиальному результату. Но для более сложных случаев квантовомеханический результат существенно отличался бы от результата классической механики.

Из вышесказанного мы можем сделать следующие выводы: все, что можно знать о состоянии системы в заданный момент времени с помощью опытов, выполненных в этот момент, можно узнать также и из соответствующих экспериментов, выполненных в любой предыдущий или последующий, по отношению к рассматриваемому, момент времени. В этом смысле неопределенность системы, если можно так выразиться, не возрастает с течением времени. Однако из этого было бы ошибочно заключить, что соотношения причинности, справедливые в квантовой механике и в классических теориях, тождественны. В самом деле, на основе классических теорий можно предсказать значение любой физической величины (функции x и p) в любой момент времени с помощью подходящих измерений, выполненных в нулевой момент времени. Согласно же квантовой механике, в нулевой момент времени можно выполнить измерение, позволяющее узнать значение, которое будет принимать заданная величина в определенный момент времени; но если бы требовалось знать значение иной физической величины или даже той же величины, но в другой момент времени, то следовало бы выполнить в нулевой момент времени другое измерение, несовместимое, вообще говоря, с предыдущим.

К статье 44

Эта статья не очень типична для Ферми в том смысле, что ее отличает некоторая приподнятость стиля; по-видимому, это определялось характером журнала, в котором она была опубликована. Статья представляет интерес с точки зрения взглядов Ферми на историю физики. Следует заметить, что статья явно предназначена для итальянской аудитории.

Б. Понтекорво

44

СОВРЕМЕННАЯ ФИЗИКА *

Последние 30 лет для физики были периодом интенсивного развития' определяемого преимущественно исследованиями структуры материи. От изучения макроскопических явлений научная мысль перешла главным образом к исследованию явлений, происходящих с мельчайшими частицами, из которых состоят разные тела. Классические законы механики и электродинамики, управляющие свойствами всех тел достаточно больших размеров, объясняющие движение звезд, а также позволяющие нам понимать поведение машин, оказались недостаточными при изучении мира атомов. Их надо было дополнить и заменить новыми законами, которые помогли бы преодолеть трудности, встретившиеся на пути изучения новых неизвестных явлений.

Весь этот процесс шел путем бурной смены зачастую противоречивших друг другу гипотез, которые, вызвав дискуссию и обмен идеями между разными школами, привели к новым исследованиям и новым открытиям.

Это было прекрасное время для тех, кто его пережил; прекрасное именно своим разнообразием, постоянными сюрпризами для исследователя и неожиданными выводами, которые в относительно короткий срок привели нас к достаточно ясной концепции таинственного мира атомов и молекул.

При поверхностном взгляде на положение в нашей науке может создаться впечатление, что между главными направлениями (как чистой, так и прикладной) физики нашего столетия и предыдущего имеется разрыв. Действительно, в конце прошлого века физические теории уже достигли достаточно высокой степени формального совершенства, что разительно отличается от быстрого, но противоречивого и драматического развития, характеризующего эволюцию атомной физики. С другой стороны, атомная

---

* *La fisica moderna*. Nuova Antologia, 1930, **65**, 137—145.

физика пока еще не породила (за немногочисленными исключениями) тех грандиозных технических и практических следствий, которые были самыми яркими результатами исследований предыдущего столетия. Однако я думаю, что этот разрыв только кажущийся и что современная физика представляет логическое продолжение научной деятельности XIX века.

Попытаемся нарисовать картину положения физики в конце XVIII столетия. Механика уже могла бы рассматриваться как законченная наука благодаря творениям таких корифеев, как Галилей и Ньютон, а также их последователей. Но другие отрасли физики, такие, как оптика, были еще недостаточно совершенны. Что касается учения об электричестве, то оно делало только первые шаги. Но, быть может, более важным, чем наследование сведений, для XIX столетия было наследование научного метода. Великие мыслители XVII и XVIII веков, с одной стороны, учили, что проникновение в Природу может быть осуществлено только при помощи эксперимента, а с другой стороны, создали великолепные математические средства, позволяющие интерпретировать результаты этого проникновения. Исследователи XIX столетия сумели плодотворно использовать эти мысли, построив одно из самых восхитительных зданий, которые известны в истории науки.

В физике первых годов XIX века доминировала личность Вольта, гению которого мы обязаны тем, что учение об электрических явлениях могло стать конкретным, плодотворным и за несколько десятилетий подойти к осмыслению фундаментальных законов электричества. До открытия этого великого ученого для получения электричества использовались электростатические машины, которые, хотя и могли генерировать электрический ток, но столь слабый, что самые интересные его свойства не поддавались наблюдению. Вольтов же столб дал физикам инструмент, способный создавать сравнительно сильные электрические токи. Таким образом, стало возможным заметить, что ток создает вокруг себя магнитное поле и что, с другой стороны, можно возбудить электрический ток при помощи магнитного поля, используя оригинальные схемы. Основываясь на этих идеях, малоизвестный итальянский исследователь Пачинотти создал первый электрический мотор, который носит имя кольца Пачинотти. Оно может работать как мотор, т. е. совершать механическую работу за счет энергии электрического тока, и, наоборот, при соединении с внешним источником механической энергии может генерировать ток.

Это и послужило основой великих технических применений электричества в прошлом столетии. Действительно, динамомашина позволяет превращать энергию падающей воды или горючих веществ в огромное количество электрического тока, освещающего наши города, приводящего в движение моторы нашей промышленности, тысячью способами облегчающего жизнь.

Еще одной победой физики первых десятилетий XIX столетия было открытие принципа сохранения энергии. Этот принцип уже так укоренился в сознании людей, даже далеких от науки, что сейчас кажется странным,

почему он был до конца понят лишь 100 лет тому назад. Врачу Майеру мы обязаны утверждением, что тепло, до тех пор рассматривавшееся как таинственный флюид, суть форма энергии. В эту форму энергии, например, превращается механическая энергия движущегося колеса, которое тормозится трением; итак, нет исчезновения энергии, есть только ее превращение. Этот принцип является одним из основных при конструировании тепловых машин, превращающих тепло в механическую энергию; вместе с ним мы должны упомянуть второй принцип термодинамики, открытый в то же самое время Карно. Ограничивая возможность превращения тепла в механическую работу, он одновременно учит нас, каким образом следует конструировать тепловую машину, дающую максимально возможный коэффициент полезного действия.

Принципы Карно и Майера породили новую отрасль физики, богатую практическими применениями — термодинамику. Она является очень мощным инструментом, позволяющим предсказывать и рассчитывать превращения энергии; ее результаты, не зависящие от конкретных гипотез о структуре тел, имеют степень достоверности, близкую к абсолютной.

Однако термодинамика не объясняет внутреннего механизма явлений, а только дает некие правила для их расчета. Кинетическая теория тепла ликвидировала этот недостаток. Она учит, что тепло—форма механической энергии: энергии невидимых глазу движений молекул и атомов, из которых состоят тела. Таким образом, имеется очевидная интерпретация превращаемости тепла в механическую энергию. В кинетических теориях мы видим начало тенденции в физике перейти от изучения макроскопических явлений к изучению мира молекул и атомов.

В связи с чрезвычайно большим числом молекул, составляющих тело, и их исключительно малыми размерами, уменьшается значение поведения одиночных молекул, а явления определяются, по существу, статистическими законами. Поэтому в этой области физики доминируют понятие вероятности и закон больших чисел. Второй принцип термодинамики находит свое естественное объяснение в статистических законах: в конечном счете, он связан с тем обстоятельством, что системы всегда стремятся перейти в состояния, вероятность которых максимальна.

Развитие термодинамики и кинетической теории в физике, а также одновременные успехи химии породили другую очень важную отрасль науки — физическую химию. Она дает нам один из блестящих примеров плодотворности изучения «пограничной» области двух разных наук, а также объединения усилий исследователей с разными научными взглядами. В физической химии атомные явления приобретают все большее значение и было бы правильно сказать, что в основном благодаря этой науке развилась атомная физика. В частности, понятие иона, т. е. электрически заряженного атома, введенное физической химией для объяснения свойств электролитов, естественно наводит на мысль, что атом состоит из электрически заряженных частиц; эта гипотеза и есть основание современной теории о структуре атома.

Явления, наблюдаемые в разреженном газе при электрическом разряде, также указывали на то, что электрически заряженные частицы являются одним из основных элементов атомной структуры. Изучение электрического разряда, начатое во второй половине прошлого столетия, привело к открытию катодных лучей: это очень быстрые частицы, заряженные отрицательно и называемые электронами. Именно они вместе с другими положительно заряженными частицами — ядрами — и составляют атом.

Среди исследований, которые предопределили эволюцию современной физики, важное место занимает теория электромагнитных волн, сформулированная в тот же период времени Максвеллом и проверенная опытами Герца. Эта теория и эти опыты, воспользовавшись которыми Маркони сделал чудесное изобретение — радио [1], имели для чистой физики двоякую важность. С одной стороны, глубокая аналогия свойств электромагнитных и световых волн подсказала идею, впоследствии полностью подтвержденную, о том, что свет представляет собой электромагнитные волны с малой длиной волны. С другой стороны, теория Максвелла, обратившая внимание на излучение энергии движущимися электрическими частицами, стала одним из исходных пунктов изучения свойств частиц, составляющих атом.

История физических наук в XIX веке завершается открытием двух явлений исключительной важности. Рентгеновские лучи явились новым типом излучений с частотой, в 1000 раз большей частоты обычного света; они сразу же нашли очень эффективное применение в медицине благодаря их способности проникать через непрозрачные тела, а также благодаря действию, которое они оказывают на ткани организма.

Радиоактивность поставила нас перед новыми, непредсказуемыми свойствами материи, природу которых, как впоследствии было постепенно установлено, определяет само атомное ядро, т. е. центральный и самый глубокий кирпич в здании атома.

Итак, мы видим, что почти все области физики, которые усиленно развивались в конце прошлого века, имели одну и ту же точку соприкосновения — проблему структуры атома. Постоянным и очень плодотворным в физике атома было взаимодействие теории и эксперимента, которое за тридцать лет исследований от немногочисленных и туманных идей, неопределенных в вопросах числа, размеров и даже самого существования атомов, привело к относительно уверенному знанию внутренней структуры каждого атома и движения частиц, его составляющих. Мы уже говорили, что в конце прошлого века появились различные намеки на то, что внутри атома содержатся заряженные частицы. Здесь не место для описания длинных и трудных исследований, которые позволили проанализировать внутреннюю природу этих частиц и таким образом привели к открытию отрицательного электрона и положительного ядра, т. е. двух составных элементов атома. Его центр занимает ядро, которое окружено несколькими

[1] В то время в Италии работы А. С. Попова были практически неизвестны.— *Прим. ред.*

вращающимися вокруг него электронами. Итак, структура атома, в чрезвычайно миниатюрном виде, напоминает структуру вращающейся вокруг Солнца системы планет.

Электроны, соответствующие в этом сравнении планетам, тождественны независимо от их происхождения. Следовательно, электроны, которые мы можем получить от атома железа или кислорода, будут одинаковыми; в свою очередь, они будут тождественны электронам, которые испускаются Солнцем и, попадая в земную атмосферу, вызывают северное сияние. Напротив, существует много различных ядер: каждому химическому элементу соответствует свое ядро; более того, известно, что ряд элементов имеет несколько различных видов ядер.

Открытие составных частей атома, его структуры, потребовало много труда; но еще труднее были поиски законов, которым подчиняется движение этих частиц. Об этом нетрудно получить представление, если вспомнить, что атом более чем в тысячу раз меньше самого маленького тела, форму которого микроскоп еще позволяет различить, а размеры ядра, по-видимому, еще в десять тысяч раз меньше. Таким образом, понятно, что в этих исследованиях всегда необходимо использовать косвенные методы; самый мощный среди них — спектральный анализ светового излучения, испускаемого атомом. Спектроскопию называют музыкой атомов; речь идет о музыке, не всегда легко интерпретируемой, изучение которой дает нам какое-то представление об инструментах, породивших ее.

В первых исследованиях была сделана попытка понять структуру атома на основе тех же самых законов, которые справедливы для физики макроскопических явлений. Однако вскоре стало ясно, что они неприменимы к телам крайне малых размеров. Тогда и возникла теория Бора, которая, модифицируя обычные законы, пыталась применить их к решению новых проблем; эта теория позволила достичь большого числа результатов, особенно качественного характера. Но почти всегда теория Бора оказывалась недостаточной, когда речь шла о количественном объяснении явлений. Итак, физики должны были убедиться в том, что недостаточно только модифицировать старые законы и что необходимо было заменить бо́льшую часть их новыми.

Здесь мне хочется сказать несколько слов о критерии, служившем руководством в создании этих новых законов, который был одним из самых важных и характерных факторов физики нашего столетия. Этот критерий, хотя сам по себе почти очевиден, все-таки в некоторых случаях требует смелости при его применении. Согласно представлениям сегодняшней физики, имеет смысл рассматривать только те величины, которые поддаются экспериментальному определению. Утверждение остается в силе и в том случае, если такое определение можно сделать только с помощью труднейших опытов или даже совсем невозможно сделать, лишь бы эта невозможность имела технический, а не теоретический характер. В самом деле, имеются некоторые понятия, которые не поддаются строгому определению

и поэтому, с точки зрения современной физики, должны быть модифицированы (даже если это—интуитивные понятия). Например, при создании новой атомной механики сами понятия положения и скорости должны были существенно измениться. Последствия этих изменений, естественно, становятся пренебрежимыми для механики обычных тел, но приводят к важным результатам при рассмотрении систем крайне малых размеров.

Чтобы проиллюстрировать применение этого критерия, возьмем в качестве примера не атомную физику, а теорию относительности. Как раз в этой интересной главе современной физики указанный критерий одержал первую победу. Как известно, теория относительности возникла как объяснение неудачи некоторых экспериментов, в которых пытались обнаружить влияние движения Земли на физические явления, протекающие на ней. Кажущиеся противоречия, к которым привели эти эксперименты, нашли разрешение в критике и уточнении самого, казалось бы, примитивного и укоренившегося понятия нашей интуиции: я имею в виду одновременность двух событий. Все мы чувствуем с первого взгляда, что утверждение об одновременности двух явлений всегда имеет определенное значение, совершенно независимо от трудностей и методов ее проверки. В самых обычных случаях мы считаем одновременными два явления, если мы обнаруживаем их в один и тот же момент времени. Итак, мы скажем, что два человека говорят одновременно, если слышим звук их голосов в одно и то же время. Однако, очевидно, что эта проверка одновременности очень груба, поскольку в ней пренебрегается временем, необходимым для того, чтобы звук дошел до нас. Проверку можно осуществить гораздо более точно, если мы используем свет вместо звука и будем считать одновременными два явления, которые мы видим в тот же момент времени. Но и этот метод требует поправки, поскольку свету также необходимо некоторое время, хотя и небольшое, для того, чтобы он дошел до нас. Можно было бы думать, что это обстоятельство можно учесть, сделав поправку к малой ошибке в результатах. Но все равно возникает трудность: легко убедиться, что находящийся в покое наблюдатель должен сделать поправку, отличающуюся от поправки движущегося наблюдателя.

Вывод из этих критических размышлений состоит в том, что одновременность двух событий не имеет абсолютного смысла. Она имеет только относительный смысл (для наблюдателя): два явления могут оказаться одновременными для одного наблюдателя, но неодновременными для другого. Эйнштейн дал математическую формулировку следствий этого принципа, основав на нем свою теорию относительности.

Следствия этой теоремы всегда крайне малы с количественной стороны и стали бы значительными только для тел, движущихся со скоростями, близкими к скорости света. На мой взгляд, это не уменьшает огромного философского значения теории относительности; действительно, она впервые в истории науки показала нам несостоятельность и необходимость ревизии такого понятия, которое представлялось нашему уму почти столь же очевидным, что и основные принципы логики.

В то время как экспериментальные результаты, предсказываемые теорией относительности, являются количественно небольшими, теория структуры атома направляла экспериментаторов в сторону очень плодотворных исследований, давших результаты поистине громадной важности. Не только уже известные явления нашли свою интерпретацию, но стало возможным на опыте проверить новые, предсказанные теорией факты. Среди них я упомяну недавние эксперименты двух американских физиков Дэвиссона и Джермера. Они показали, что свойства частиц во многом таковы же, что и свойства излучения (и, как казалось ранее, присущие только ему), состоящего из волн, аналогичных световым.

Новые теории оказали значительное влияние и на другие области науки, особенно на химию. Это связано с тем, что они объясняют механизм действия сил, которые, объединяя между собой некоторые атомы, определяют образование молекул различных веществ или структуру кристалла. Речь идет о находящемся только в начальной стадии, но обещающем очень быстрое развитие направлении; нелегко предсказать, к чему оно приведет.

Теперь же, когда проблема строения атома и молекулы близка к успешному решению, внимание физиков все чаще и чаще начинает обращаться к новой проблеме — проблеме структуры ядра. Как отмечалось, ядро приблизительно в десять тысяч раз меньше атома. Его составные части связаны между собой такими большими силами, что для его разрушения необходимо относительно огромное количество энергии; поэтому до сих пор известны лишь немногие случаи искусственного расщепления ядер. Правда, сама природа (в радиоактивных явлениях) дала нам пример самопроизвольного расщепления некоторых ядер. Однако здесь речь идет о явлении, которое пока мы можем только наблюдать; при этом до сих пор не удавалось ускорить или замедлить его, или вообще как-то повлиять на него. Итак, новая проблема оказалась крайне трудной, а средств для ее решения пока недостаточно. Однако исследователи не должны впадать в отчаяние при виде трудностей: тогда наука не могла бы двигаться вперед.

И здесь у многих возникает вопрос: какие практические последствия уже имел или сможет иметь в будущем столь огромный прогресс нашего познания внутренней структуры материи? Техническая революция, вызванная серией научных открытий прошлого столетия, порождала в человеческом сознании впечатление, что оценка значимости научных результатов должна основываться на вытекающих из них непосредственных практических применениях. Если мы будем оценивать сегодняшнюю науку этим критерием, то должны признать, что ее практические следствия до сих пор были довольно скудны.

Следует, однако, учесть, что технический прогресс, вытекающий из развития какой-то главы чистой науки, всегда следует за ее эволюцией со значительным опозданием. Необходимое разделение труда приводит к тому, что одни и те же исследователи редко занимаются и чистой наукой, и проблемами техники. Чтобы идеи ученых могли найти применение, они должны стать яснее, выкристаллизоваться и распространиться, но это

требует продолжительного времени, иногда десятков лет. Когда Вольта открыл свой pila [2], ни он, ни его современники не могли предугадать, какими могут быть последствия этого открытия; и должны были пройти десятки и десятки лет до того, когда электричество — предмет исследований немногих ученых, труд которых, казалось, был далек от проблем и нужд практической жизни,— стало доминирующим фактором удивительных открытий, характеризующих конец прошлого столетия.

Было бы неправильно, если бы в широких кругах общества создалось впечатление, что деятельность ученых все более удаляется от жизни, сосредоточиваясь на преследовании химерических и чисто абстрактных идей. Правда, их работы часто определяются не прямым желанием внести вклад в решение данного технического вопроса, а скорее внутренней необходимостью все дальше и дальше раздвинуть границы наших знаний. Однако рано или поздно появятся другие люди с более практическим складом ума, которые найдут способ использовать новые знания для дальнейшего развития цивилизации.

Пусть студенческая молодежь, вступающая в жизнь, знает, что наша страна нуждается как в тех людях, которые кропотливо сеют плодоносные семена научных идей, так и в тех, которые умеют выращивать из них плоды, благодатные для жизни человечества.

....

[2] Вольтов столб.— *Прим. ред.*

К статье 45

Статья 45 представляет собой обобщение статистического метода, развитого в статьях 35, 36, работах [Б46] и [Б49], на случай ионизованных атомов. Особое внимание уделяется вычислению поправок Ридберга к s-термам трехкратно ионизованных атомов.

Согласие расчетных и экспериментальных результатов лучше, чем для нейтральных атомов; это связано с тем, что различные свойства ионов зависят от атомного номера иона более регулярно, чем аналогичные свойства нейтральных атомов.

Э. Сегре

45

К РАСЧЕТУ СПЕКТРОВ ИОНОВ *

Статистический метод, предложенный автором для описания свойств нейтральных атомов, в этой работе обобщается на случай ионизованных атомов и используется, в частности, для определения поправок Ридберга к s-термам трехкратно ионизованных атомов.

В нескольких недавних работах [1] я показал, что многие свойства атомов, каков бы ни был их атомный номер, с удовлетворительной точностью можно описать с помощью статистического подхода; при этом окружающие ядро электроны считаются облаком находящегося в состоянии полного вырождения электронного газа, распределение плотности которого в зависимости от расстояния до ядра определяется статистически. Цель данной работы состоит в обобщении этих методов на описание ионизованных атомов.

В первой части работы будут изложены общие методы вычисления статистического распределения электронов в ионе и распределения электрического потенциала в зависимости от расстояния до ядра. Эти результаты будут затем использованы для расчета спектров ионов, а именно для определения поправки Ридберга к s-термам трехкратно ионизованных атомов.

---

* *Sul calcolo degli spettri degli ioni.* Mem. Accad. d'Italia, 1930, 1 (Fis.) 149—156; Nuovo Cimento, 1931, 8, 7—14. Представлено на собрании 21 марта 1930 г.

[1] E. Fermi. Rend. Lincei, 1927, 6, 602 (далее цитируется как I — статья 35.— *Ред.*); 1928, 7, 726; Zs. f. Phys., 1928, 48, 73; 1928, 49, 550; См. также F. Rasetti. Rend. Lincei, 1928, 7, 915; G. Gentile, E. Majorana. Rend. Lincei, 1928, 8, 229. Эти работы собраны в монографии Э. Ферми, опубликованной в Falkenhagen: Quantentheorie und Chemie, Leipzig, 1928. (Статья 37). Приложения статистического метода к проблемам ядра иллюстрируются в работе E. Fermi. Sopra i momenti magnetici dei nuclei atomici. «Memorie della R. Acc. d'Italia, 1930, 1, 139 ([Б59а], см. статью 42).

§ 1. Обозначим через V электрический потенциал, который будет функцией расстояния r рассматриваемой точки от ядра. Как показано в работе I, плотность электронов на расстоянии r от ядра зависит от величины этого потенциала таким образом, что в общем случае она связана с потенциалом соотношением

$$n = \frac{2^{9/2}\pi m^{3/2} e^{3/2}}{3h^3} (V - \alpha)^{3/2}, \tag{1}$$

где α — некоторая постоянная. Формула (1) справедлива лишь при $V > \alpha$, когда она имеет смысл; если же $V < \alpha$, то $n = 0$. Положив

$$V - \alpha = v, \tag{2}$$

мы представим электрический потенциал через v (с точностью до постоянного слагаемого), после чего формула (1) примет вид

$$n = \frac{2^{9/2}\pi m^{3/2} e^{3/2}}{3h^3} v^{3/2}. \tag{3}$$

Эта формула справедлива при $v > 0$; при $v < 0$ плотность электронов равна нулю. Оказывается, что в случае ионов v остается положительным вплоть до некоторого расстояния r_0 от ядра, а при бо́льших расстояниях v становится отрицательным. Это означает, что окружающее ядро облако электронов простирается до расстояния r_0 от ядра. Поскольку потенциал v должен удовлетворять уравнению Пуассона, для него находим, как и в I, дифференциальное уравнение

$$\Delta v = 4\pi n e = \frac{2^{13/2}\pi^2 m^{3/2} e^{5/2}}{3h^3} v^{3/2}, \tag{4}$$

справедливое при $r < r_0$; при $r > r_0$ имеет место другое уравнение:

$$\Delta v = 0 \tag{5}$$

При очень малых r потенциал должен стремиться к предельному выражению Ze/r, где Z — атомный номер; таким образом, в качестве первого граничного условия для определения v будем иметь

$$\lim_{r=0} rv = Ze. \tag{6}$$

Если, далее, предположить, что наш атом ионизирован z раз, то у него будет $Z - z$ электронов, и, следовательно, будет иметь место равенство

$$\int n d\tau = Z - z.$$

Если же учесть, что электронное облако простирается до расстояния r_0 и что его плотность определяется формулой (3), то предыдущее соотноше-

ние можно переписать в виде

$$\frac{2^{13/2}\pi^2 m^{3/2} e^{5/2}}{3h^3}\int\limits_0^{r_0} v^{3/2} r^2 dr = (Z - z)\,e. \tag{7}$$

Как и в I, переменные r, v можно заменить двумя другими, пропорциональными им, положив

$$r = \mu x, \qquad v = \gamma\psi, \tag{8}$$

где

$$\mu = \frac{3^{2/3} h^2}{2^{13/3}\pi^{4/3} m e^2 Z^{1/3}}, \qquad \gamma = \frac{2^{13/3}\pi^{4/3} m e^3 Z^{4/3}}{3^{2/3} h^2}. \tag{9}$$

Вспоминая, что v зависит только от r, уравнения (4), (5), (6), (7) можно далее переписать в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} &\psi'' + \frac{2}{x}\psi' = \psi^{3/2} && \text{при } x < x_0,\\ &\psi'' + \frac{2}{x}\psi' = 0 && \text{при } x > x_0,\\ &\lim_{x=0} x\psi = 1, &&\\ &\int\limits_0^{x_0} \psi^{3/2} x^2 dx = 1 - \frac{z}{Z}; && \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

здесь $x = x_0$ представляет собой значение x, при котором функция ψ обращается в нуль.

Если снова заменить переменные с помощью подстановки

$$\varphi = x\psi, \tag{11}$$

то уравнения (10) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} &\varphi'' = \varphi^{3/2}/\sqrt{x} && \text{при } x < x_0,\\ &\varphi'' = 0 && \text{при } x > x_0,\\ &\varphi(0) = 1, &&\\ &\int\limits_0^{x_0} \varphi^{3/2}\sqrt{x}\,dx = 1 - \frac{z}{Z}. && \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Последнее условие легко преобразуется, если учесть первое. Действительно,

$$\int\limits_0^{x_0} \varphi^{3/2}\sqrt{x}dx = \int\limits_0^{x_0} \varphi'' x dx = | x\varphi' - \varphi |_0^{x_0},$$

и поскольку $\varphi(0) = 1$, $\varphi(x_0) = 0$,

$$\int_0^{x_0} \varphi^{3/2} \sqrt{x}\, dx = x_0 \varphi'(x_0) + 1.$$

Таким образом, последнее соотношение (12) принимает вид

$$-x_0 \varphi'(x_0) = \frac{z}{Z}. \tag{13}$$

Для численного построения функции φ, которая определена условиями (12), (13), мы будем исходить из уже найденной функции $\varphi_0(x)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\varphi_0'' = \frac{\varphi_0^{3/2}}{\sqrt{x}} \tag{14}$$

с граничными условиями

$$\varphi_0(0) = 1, \qquad \varphi_0(\infty) = 0 \tag{15}$$

(в I эта функция обозначена просто через φ).

В упомянутых ранее работах имеются достаточно полные таблицы численных значений этих функций. В интервале от 0 до x_0 обе функции, φ_0 и φ, удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению; кроме того, при $x = 0$ обе они принимают значение 1. При значениях x, достаточно малых по сравнению с x_0, их относительная разность остается довольно малой, и поэтому можно будет определить ее как решение модифицированного уравнения, полученного из дифференциального уравнения (14). Другими словами, можно положить

$$\varphi = \varphi_0 - k\eta, \tag{16}$$

где k — константа, а η — решение модифицированного уравнения

$$\eta'' = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\varphi_0}{x}}\, \eta,$$

обращающееся в нуль при $x = 0$. Значение производной η при $x = 0$ можно фиксировать произвольным образом, ибо при ее изменении функция η умножается просто на некий коэффициент пропорциональности; можно, например, положить $\eta'(0) = 1$.

Нетрудно убедиться, что модифицированное уравнение имеет общий интеграл

$$\eta = A\left(\varphi_0 + \frac{x\varphi_0'}{3}\right)\left\{\int \frac{dx}{\left(\varphi_0 + \frac{x\varphi_0'}{3}\right)^2} + B\right\},$$

в котором A и B — произвольные постоянные. Следующее частное решение удовлетворяет нашим граничным условиям:

$$\eta = \left(\varphi_0 + \frac{x\varphi_0'}{3}\right)\int_0^x \frac{dx}{\left(\varphi_0 + \frac{x\varphi_0'}{3}\right)^2}. \tag{17}$$

Таким образом, после интегрирования получаем выражение для искомой функции, однако для численного определения удобнее воспользоваться не формулой (17), а найти η непосредственно из дифференциального уравнения, которому она удовлетворяет. Найденные таким способом численные значения этой функции представлены в следующей таблице:

x	$\eta(x)$	x	$\eta(x)$	x	$\eta(x)$	x	$\eta(x)$
0,0	0,00	1,4	2,23	8	103	20	2080
0,1	0,10	1,6	2,76	9	146	21	2480
0,2	0,21	1,8	3,36	10	201	22	2940
0,3	0,32	2,0	4,04	11	271	23	3460
0,4	0,44	2,5	6,1	12	359	24	4050
0,5	0,56	3,0	8,8	13	467	25	4710
0,6	0,70	3,5	12,3	14	598	26	5450
0,7	0,85	4,0	16,7	15	755	27	6280
0,8	1,01	4,5	22,1	16	942	28	7210
0,9	1,18	5	28,6	17	1160	29	8250
1,0	1,36	6	45,9	18	1420	30	9410
1,2	1,76	7	70,0	19	1730	31	10690

Константа k определяется с помощью условия (13) следующим образом. Для некоторых произвольных значений k (на практике расчет проводится для $k = 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}$) функция φ вычисляется по формуле (16) вплоть до значений x, при которых относительная разность между φ и φ_0 становится достаточно малой, например, не более 1/10. По этим значениям находят продолжение функции φ (численным интегрированием дифференциального уравнения, которому она удовлетворяет) вплоть до определения того значения x_0, при котором $\varphi(x_0)$ обращается в нуль; эта часть расчета проводится очень быстро и даже при небольшой практике занимает несколько минут. В следующей таблице приводятся определенные указанным путем значения величины $-x_0\varphi'(x_0)$, которые соответствуют различным значениям k:

$$k = 10^{-3};\quad 10^{-4};\quad 10^{-5};\quad 10^{-6};\quad 10^{-7},$$
$$-x\varphi'(x_0) = 0{,}22;\quad 0{,}10;\quad 0{,}05;\quad 0{,}02;\quad 0{,}01.$$

Из этой таблицы значения k сразу же получаются интерполяцией, если задано отношение z/Z кратности ионизации к атомному номеру. В самом деле, согласно равенству (13) это отношение должно равняться как раз $-x_0\varphi'(x_0)$. Подобная процедура позволяет весьма быстро, и к тому же с достаточной точностью, определить функцию φ вплоть до ее значений при x_0. Из второго уравнения (12) следует, что при $x > x_0$ функция φ становится линейной по x; а поскольку она вместе со своей производной должна быть непрерывной, ее выражением будет

$$\varphi'(x_0)(x - x_0).$$

Учитывая равенство (13), это выражение можно также записать в виде

$$-\frac{z}{Zx_0}(x - x_0). \tag{18}$$

Определив функцию φ, сразу же получаем электрический потенциал на расстоянии r от ядра. Действительно, из равенств (8), (9) и (11) следует, что он задается формулой

$$v = \frac{Ze}{r}\varphi\left(\frac{r}{\mu}\right). \tag{19}$$

Однако следует помнить, что, как это обычно принимается, электрический потенциал на бесконечном расстоянии должен обращаться в нуль; поэтому в формулу (19) нужно ввести аддитивную постоянную. В самом деле, подставляя туда вместо φ справедливое для больших расстояний выражение (18), находим:

$$v = \frac{ze}{r} - \frac{ze}{\mu x_0}.$$

Таким образом, оказывается, что для получения выражения потенциала, который равен нулю на бесконечном расстоянии, достаточно прибавить к v константу:

$$\frac{ze}{\mu x_0},$$

причем потенциал берется в виде

$$V = v + \frac{ze}{\mu x_0} = \frac{Ze}{r}\varphi\left(\frac{r}{\mu}\right) + \frac{ze}{\mu x_0}. \tag{20}$$

§ 2. Изложенные здесь методы теоретического определения электрического потенциала внутри иона можно использовать для численного расчета его энергетических уровней. В качестве конкретного примера подобного приложения таких методов я вычислил s-термы (или, что то же самое, поправки Ридберга к ним) для спектров трехкратно ионизованных атомов. Для вычисления энергетических уровней электрона нужно знать

потенциал той силы, которая притягивает его к центру атома. Его можно легко рассчитать с помощью выражения (20) для среднего значения электрического потенциала на расстоянии r от ядра. Разумеется, необходимо учесть то обстоятельство, что электрический потенциал, действующий на электрон, когда тот находится на расстоянии r от ядра, не совпадает в точности с потенциалом (20), поскольку в него не вносит вклад сам рассматриваемый электрон. Если рассуждать так же, как и в случае нейтральных атомов, то оказывается, что с достаточной точностью выражение для потенциальной энергии атомного электрона можно взять в виде

$$U = -\frac{e^2}{r}\left\{1 + (Z-1)\varphi\left(\frac{r}{\mu}\right)\right\} - \frac{ze^2}{\mu x_0}. \tag{21}$$

Определив таким путем потенциальную энергию, можно сразу же записать уравнение Шредингера для s-термов:

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}[E - U(r)]\psi = 0. \tag{22}$$

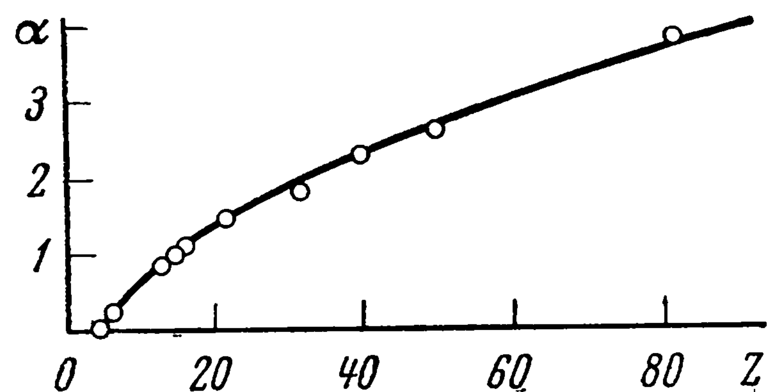
Поправка Ридберга вычисляется тогда следующим образом. Чтобы отыскать решение, отвечающее бесконечному квантовому числу, т. е. собственному значению $E = 0$, проводится численное интегрирование предыдущего уравнения. Это решение сопоставляется с соответствующим решением уравнения Шредингера для водородоподобного атома, имеющего заряд ядра, равный $(z + 1)$, т. е. эффективному заряду, который действует на оптический электрон нашего иона, когда тот находится за пределами электронного облака, окружающего ядро. Поскольку, начиная с некоторого значения r, скажем r_0, потенциальная энергия электрона в водородоподобном атоме и потенциальная энергия оптического электрона нашего иона становятся одинаковыми, то при достаточно больших r обе собственные функции ведут себя аналогично и, в частности, их узлы следуют через равные интервалы. Если, например, предположить, что n-й узел собственной функции иона совпадает с узлом n' собственной функции водородоподобного атома, то поправка Ридберга выразится просто разностью

$$\alpha = n - n'. \tag{23}$$

Если же узлы одной из этих двух функций расположены между узлами другой, то поправку Ридберга можно, тем не менее, определить интерполяцией. Что касается детального описания такого вычисления поправок Ридберга, то здесь мы сошлемся на аналогичный расчет, развитый для случая нейтральных атомов.

На рисунке теоретические результаты сравниваются с экспериментальными. По оси абсцисс отложены атомные номера, по оси ординат — значения поправок Ридберга к s-термам трехкратно ионизованных атомов. Кружками обозначены экспериментальные значения, которые получены

из данных работы Гротриана [2]. Результаты теории представлены кривой, которая проведена по точкам, вычисленным для атомных номеров 23, 50, 82. Кроме того, учитывается тот очевидный факт, что поправка Ридберга для $Z = 4$ равна нулю.



Как видим, согласие теории с опытом очень хорошее; оно оказывается даже лучшим, чем в случае нейтральных атомов, что можно легко понять, поскольку различные свойства ионов зависят от атомного номера более регулярно, чем соответствующие свойства нейтральных атомов, и поэтому лучше описываются теорией, которая в силу своей статистической природы непригодна для вычисления нерегулярных различий при переходе от атома к атому.

[2] Grotrian. Graphische Darstellung der Spektren. Berlin, 1928.

См. вводные замечания к статье 38.

46

О КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ *

В предыдущей работе, недавно опубликованной в этих «Rendiconti» [1], я записал в квантовой форме уравнения электродинамики, т. е. уравнения системы, состоящей из электромагнитного поля и из произвольного числа точечных электрических зарядов. Эти уравнения относились к нерелятивистскому случаю, т. е. предполагалось, что скорости зарядов не очень высоки. Однако уравнения нетрудно записать в релятивистской форме, если исходить из дираковской теории вращающегося электрона. Как известно, в недавней работе Гейзенберга и Паули [2] также дается трактовка проблемы квантовой электродинамики. Но, поскольку методы этих авторов существенно отличаются от моих, я думаю, что опубликование моих результатов не будет бесполезным.

Окончательная форма выражения результатов настоящей работы особенно проста. В самом деле, как будет показано, гамильтониан, представляющий, согласно принципу соответствия, естественное квантовое обобщение гамильтониана классической электродинамики, получается просто добавлением к гамильтониану дираковской теории излучения слагаемого, которое соответствует электростатической энергии системы электрических зарядов; так что в представленном виде квантовая электродинамика оказывается нисколько не сложнее теории излучения Дирака. Как мы увидим дальше, этого упрощения можно достичь путем выбора подходящей формы условия

$$\frac{1}{c}\frac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \tag{1}$$

связывающего между собой скалярный и векторный потенциалы; это условие и в теории Гейзенберга и Паули составляет один из самых характерных элементов квантовой электродинамики.

В работе I мы нашли выражение (21) для гамильтониана нашей системы. Если же вместо классической механики мы хотим представить движение точек с помощью гамильтониана Дирака, то легко проверить, что вместо

---

* *Sopra l'elettrodinamica quantistica.* Rend. Lincei, 1930, **12**, 431—435. Представлена академиком О. М. Корбино и получена Академией 29 сентября 1930 г.

[1] E. Fermi. Rend. Lincei, 1929, **9**, 881. (Статья 38). Далее цитируется как I.

[2] W. Heisenberg, W. Pauli. Zs. f. Phys., 1929, **56**, 1; 1930, **59**, 160.

(21) работы I мы должны использовать следующий гамильтониан:

$$H = -c\sum_i \gamma_i\cdot \mathbf{p}_i - \sum_i \delta_i m_i c^2 + \sum_i e_i c\sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}}\sum_i Q_s \cos\Gamma_{si} +$$
$$+\sum_s e_i c\sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}}\sum_s \gamma_i(\boldsymbol{\alpha}_s\cdot\boldsymbol{\chi}_s + \mathbf{A}_{s1}w_{s1} + \mathbf{A}_{s2}w_{s2})\sin\Gamma_{si} +$$
$$+\sum_s\left[\frac{1}{2}(\omega_{s1}^2+\omega_{s2}^2+\tilde{\omega}_s^2 - P_s^2) + 2\pi^2\nu_s^2(w_{s1}^2+w_{s2}^2+\chi_s^2-Q_s^2)\right]. \quad (2)$$

Здесь обозначения те же самые, что и в работе I; δ_i и γ_i представляют q-скаляр и q-вектор такими, что δ_i, γ_{ix}, γ_{iy}, γ_{iz} есть четыре оператора, представляемые матрицами четвертого порядка, которые фигурируют в гамильтониане, относящемся к i-й материальной точке; естественно, что γ и δ, относящиеся к одной из точек, заменяемы на γ и δ, относящиеся к другой.

В частности, заметим, что из гамильтониана (2) следует

$$\dot{Q}_s = \frac{\partial H}{\partial P_s} = -P_s,\quad \dot{P}_s = -\frac{\partial H}{\partial Q_s} = 4\pi^2\nu_s^2 Q_s - c\sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}}\sum_i e_i\cos\Gamma_{si},$$
$$\dot{\chi}_s = \frac{\partial H}{\partial\tilde{\omega}_s} = \tilde{\omega}_s,\qquad \dot{\tilde{\omega}}_s = -\frac{\partial H}{\partial\chi_s} = -4\pi^2\nu_s^2\chi_s - c\sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}}\sum_i e_i\gamma_i\cdot\alpha_s\sin\Gamma_{si} \quad (3)$$

и

$$\dot{\mathbf{X}}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = -c\gamma_i,$$

откуда

$$\frac{d}{dt}\cos\Gamma_{si} = 2\pi\nu_s\gamma_i\cdot\boldsymbol{\alpha}_s\sin\Gamma_{si}.$$

Из этого уравнения и из уравнений (3) сразу видно, что из нового гамильтониана (2) также получается уравнение (18) работы I; поэтому если выражение (19) работы I обращается в нуль вместе со своей первой производной в момент $t = 0$, то оно продолжает оставаться равным нулю в силу дифференциальных уравнений. Тем самым мы проверили условие (1), эквивалентное условию (19) работы I. С помощью уравнений (3) условие (19) работы I можно записать в виде

$$2\pi\nu_s\chi_s - P_s = 0, \quad (4)$$

и его производную (с точностью до постоянного множителя) — в виде

$$\tilde{\omega}_s - 2\pi\nu_s Q_s + \frac{c}{2\pi\nu_s}\sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}}\sum_i e_i\cos\Gamma_{si} = 0. \quad (5)$$

В рамках классической интерпретации мы могли бы сказать тогда, что обычная электродинамика получается в результате интегрирования ка-

нонических уравнений, вытекающих из (2) при начальных условиях (4) и (5); этого достаточно, поскольку, как уже говорилось, если (4) и (5) справедливы в момент времени $t = 0$, они автоматически будут выполняться в любой момент времени.

Чтобы перевести это на квантовый язык, заметим, что для одновременного обращения левых частей равенств (4) и (5) в нуль необходимо, чтобы они коммутировали, так как иначе определенность одного из них подразумевала бы неопределенность другого. Далее, с помощью обычных правил коммутации легко проверить, что левые части (4) и (5) действительно коммутируют; поэтому и с квантовой точки зрения им можно приписать определенную величину (равную 0) в один и тот же момент времени.

Классической процедуре интегрирования канонических уравнений с произвольными величинами постоянных интегрирования в волновой механике отвечает интегрирование уравнения Шредингера, соответствующего гамильтониану (2), при произвольном выборе ψ-функции, представляющей скаляр поля [3]:

$$\psi = \psi(t, x_i, \sigma_i, w_{s1}, w_{s2}, \chi_s, Q_s) \tag{6}$$

в момент времени $t = 0$ (σ_i символически представляет внутреннюю «спиновую» координату i-й частицы). Но если мы хотим удовлетворить условиям (4) и (5), необходимо, чтобы эта функция не была произвольной; характер зависимости ее от переменных χ_s и Q_s будет определенным. Действительно, так как сопряженная с χ_s координата $\widetilde{\omega}_s$ согласно условию (5) должна иметь значение

$$\widetilde{\omega}_s = 2\pi\nu_s Q_s - \frac{c}{2\pi\nu_s}\sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}}\sum_i e_i \cos\Gamma_{si},$$

то ψ-функция должна зависеть от χ_s следующим образом:

$$e^{\frac{2\pi i}{h}\chi_s\left(2\pi\nu_s Q_s - \frac{c}{2\pi\nu_s}\sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}}\sum_i e_i\cos\Gamma_{si}\right)}. \tag{7}$$

Подобным же образом из условия (4) следует, что Q_s должно фигурировать только во множителе

$$e^{\frac{2\pi i}{h}2\pi\nu_s Q_s \chi_s}, \tag{8}$$

который, кстати, уже содержится в выражении (7). Итак, решение, соответствующее условиям (4) и (5), должно иметь форму

$$\psi = \left[\prod_i e^{\frac{2\pi i}{h}\chi_s\left(2\pi\nu_s Q_s - \frac{c}{2\pi\nu_s}\sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}}\sum_i e_i\cos\Gamma_{si}\right)}\right]\varphi(t, x_i, \sigma_i, w_{s1}, w_{s2}). \tag{9}$$

---

[3] См. примечание на стр. 232.— *Прим. ред.*

Далее мы должны показать, что выражение (9) действительно удовлетворяет уравнению Шредингера. Уравнение Шредингера, полученное из гамильтониана (2), имеет вид

$$-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial t}=H\psi, \tag{10}$$

где H, естественно, должен рассматриваться как оператор. Подставляя в уравнение (10) вместо ψ выражение (9), находим без труда следующее уравнение, которому должна удовлетворить функция φ:

$$-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=R\varphi, \tag{11}$$

где R представляет собой следующий оператор:

$$R=-c\sum_i \gamma_i\cdot\mathbf{p}_i-\sum_i\delta_i m_i c^2+\sum_i e_i c\sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}}\sum_s\gamma_i\cdot(\mathbf{A}_{s1}w_{s1}+\mathbf{A}_{s2}w_{s2})\sin\Gamma_{si}+$$
$$+\sum_s\left[\frac{1}{2}(\omega_{s1}^2+\omega_{s2}^2)+2\pi^2\nu_s^2(w_{s1}^2+w_{s2}^2)\right]+\frac{c^2}{\pi\Omega}\sum_s\frac{1}{\nu_s^2}\left(\sum_i e_i\cos\Gamma_{si}\right)^2. \tag{12}$$

Если опустить здесь последний член, то оператор R совпадет с гамильтонианом теории излучения Дирака, где пренебрегается скалярным потенциалом и продольной компонентой векторного потенциала и рассматривается только поле, определенное поперечными компонентами векторного потенциала, т. е. лишь поле излучения. Мы должны обсудить смысл последнего члена. С этой целью преобразуем его следующим образом:

$$\frac{c^2}{\pi\Omega}\sum_s\frac{1}{\nu_s^2}\left(\sum_i e_i\cos\Gamma_{si}\right)^2=\frac{c^2}{\pi\Omega}\sum_{sij}e_ie_j\frac{\cos\Gamma_{si}\cos\Gamma_{sj}}{\nu_s^2}=$$
$$=\frac{c^2}{\pi\Omega}\sum_{ij}e_ie_j\sum_s\frac{\cos\Gamma_{si}\cos\Gamma_{si}}{\nu_s^2}.$$

Сумма по s может быть преобразована в интеграл, и с помощью несложных вычислений найдем

$$\sum_s\frac{\cos\Gamma_{si}\cos\Gamma_{sj}}{\nu_s^2}=\frac{\pi\Omega}{2c^2}\frac{1}{r_{ij}},$$

где r_{ij} — расстояние между точками i и j. Тогда

$$\frac{c^2}{\pi\Omega}\sum_s\frac{1}{\nu_s^2}\left(\sum_i e_i\cos\Gamma_{si}\right)^2=\frac{1}{2}\sum_{ij}\frac{e_ie_j}{r_{ij}}. \tag{13}$$

Итак, выражение (13) соответствует просто обычной электростатической энергии; как и в обычной электростатике, это выражение становится бесконечным в случае точечных электрических зарядов. Эта трудность обусловлена скорее несовершенным знанием структуры электрона, чем

самой электродинамикой, и поэтому может быть устранена рассмотрением электронов с конечным радиусом. Формально мы можем устранить ее, как это обычно делается и в классической электростатике, исключая из суммы (13) члены с $i = j$, которые представляют собой бесконечно большую аддитивную постоянную. Будем обозначать это штрихом у знака Σ. С учетом (13) выражение (12) для R принимает вид

$$R = -c\sum_i \boldsymbol{\gamma}_i \cdot \mathbf{p}_i - \sum_i \delta_i m_i c^2 + \sum_i e_i c \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum_s \boldsymbol{\gamma}_i \cdot (\mathbf{A}_{si} w_{s1} + \mathbf{A}_{s2} w_{s2}) \sin \Gamma_{si} + \\ + \sum_s \left[\frac{1}{2}(\omega_{s1}^2 + \omega_{s2}^2) + 2\pi^2 \nu_s^2 (w_{s1}^2 + w_{s2}^2)\right] + \frac{1}{2} \sum_{ij}{}' \frac{e_i e_j}{r_{ij}}. \quad (14)$$

Наконец, заметим, что функция φ, использованная вместо скаляра поля ψ с помощью выражения (9), во всех рассуждениях может заменить его, поскольку φ отличается от ψ лишь комплексным множителем с модулем 1. Функция φ удовлетворяет уравнению (11) типа уравнения Шредингера, в котором, однако, в качестве гамильтониана следует принять R вместо H. Этот новый гамильтониан R, как сразу видно из формулы (14), получается просто добавлением обычного выражения электростатической энергии к обычному гамильтониану чистого излучения. Поэтому можно заключить, что в этой форме проблема квантовой электродинамики ничуть не сложнее, чем обычная проблема теории излучения.

Естественно, как мы уже заметили, в этой теории также содержатся два фундаментальных недостатка, которые, однако, вытекают скорее из недостаточного знания структуры электрона, чем из самой электродинамики. Они таковы: дираковский электрон может переходить на энергетические уровни с отрицательной энергией и собственная энергия электрона принимает бесконечное значение, если предположить, что он является строго точечным.

1931

См. вводные замечания к статье 38

47

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ МАССА В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ *

В данной работе проблема электромагнитной массы в квантовой электродинамике обсуждается в рамках гипотез, по существу эквивалентных предположению о конечном радиусе электрона. В частности, иллюстрируются некоторые характерные различия между классическим и квантовым случаями.

§ 1. Как известно, энергия электростатического поля, создаваемого точечным электрическим зарядом, является бесконечной; следовательно, в обычной электродинамике электромагнитная масса точечного электрического заряда также оказывается бесконечной. Поэтому довольно часто считают, что электрические корпускулы (электроны и протоны) вполне строго рассматривать как точечные заряды нельзя и что нужно приписать им структуру конечной протяженности. Как классическая, так и квантовая электродинамика сталкиваются, вообще говоря, с одной и той же трудностью, ибо даже в квантовой теории точечный электрический заряд обязательно ассоциируется с бесконечной энергией. Эту трудность нельзя устранить, изменив значение энергии на величину бесконечной аддитивной постоянной, поскольку, как показали Оппенгеймер [1] и Валлер [2], бесконечный член не является постоянным, но меняется с изменением квантовых состояний, причем его вариации также бесконечны. Впрочем, это находит свою аналогию и в классической теории: если рассматривается точечный электрический заряд в движении, то бесконечна не только электрическая, но также и магнитная энергия, которая зависит от скорости и соответствует, в первом приближении, кинетической электромагнитной энергии.

По-видимому, можно попытаться обойти эти затруднения с помощью метода, который сводится к попытке ввести и в квантовую электродинамику нечто, эквивалентное конечному радиусу электрона. Однако если попытаться сделать это, то возникают трудности гораздо более серьезные, чем в соответствующей классической задаче; поэтому не всегда возможно — по крайней мере, в рамках современной квантовой электродинамики —

* *Le masse elettromagnetiche nella elettrodinamica quantistica.* Nuovo Cimento, 1931, 8, 121—132.

[1] J. Oppenheimer. Phys. Rev., 1930, 35, 461.

[2] I. Waller. Zs. f. Phys., 1930, 62, 673.

построить теорию электрона конечного радиуса, сохранив релятивистскую инвариантность. Тем не менее исследование этого вопроса представляет некоторый интерес до тех пор, пока нельзя будет построить теорию электромагнитной массы; действительно, в ней фигурируют некоторые характерные отличия от классической теории, изучению которых главным образом и посвящена настоящая работа [3].

В этом исследовании используется метод, изложенный мною недавно в работе [4], на которую мы и будем ссылаться (в частности, это касается используемых обозначений). По существу метод состоит в том, чтобы считать динамическими переменными, характеризующими электромагнитное поле, коэффициенты разложения скалярного и векторного потенциалов на гармонические компоненты для некоторого момента времени.

§ 2. Чтобы простым аналитическим путем ввести предположение о конечной протяженности электрона, заметим, что если это так, то различные части электрона будут находиться в точках одинаковой фазы по отношению к таким волнам, длина которых велика по сравнению с размерами электрона; в то же время волны, длина которых равна по порядку величины размерам электрона или меньше, будут иметь различающиеся фазы в разных точках электрона. Тогда можно легко понять — и непосредственные вычисления это подтверждают,— что электрон будет взаимодействовать с различными волнами тем слабее, чем меньше их длина, поскольку в случае достаточно коротких волн различные области электрона действуют не согласованно.

Этот результат можно представить себе так, как будто электрон взаимодействует с высокочастотными гармоническими компонентами поля, имея эффективный электрический заряд меньший, чем при взаимодействии с низкочастотными компонентами; для таких гармонических компонент, конечно, эффективный заряд совпадает по порядку величины с тем зарядом электрона, который дается статическими или квазистатическими измерениями. Разумеется, эти изменения эффективного заряда не чувствительны ни к каким излучениям, которые можно создать в лаборатории; они могут стать значительными лишь при таких длинах волн, которые составляют малую долю X-единицы.

Таким образом, в качестве гамильтониана системы, состоящей из электромагнитного поля и частиц, мы возьмем то же самое выражение, которое использовалось в работе А [формула (2)], но вместо e_i (заряд i-й частицы) подставим $e_i(\nu_s)$, или, короче, e_{is}; здесь ν_s означает частоту гармонической компоненты поля, с которой взаимодействует частица. Кроме того, для простоты ограничимся случаем, когда в поле имеется только один электрон; поэтому общий гамильтониан поля и электрона можно

---

[3] См. также W. Heisenberg. Zs. f. Phys. 1930, 65, 4.
[4] E. Fermi. Rend. Lincei, 1930, 12, 431. (Статья 46.) Далее цитируется как А.

записать в следующем виде:

$$H = -c\gamma\cdot\mathbf{p} - \delta mc^2 + c\sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}}\sum_s e_s Q_s \cos\Gamma_s + c\sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}}\sum_s e_s\gamma\cdot(\boldsymbol{\alpha}_s \chi_s + \mathbf{A}_{s1}w_{s1} + \mathbf{A}_{s2}w_{s2})\sin\Gamma_s + \sum_s\left\{\frac{1}{2}(\omega_{s1}^2 + \omega_{s2}^2 + \tilde{\omega}_s^2 - P_s^2) + 2\pi^2\nu_s^2(w_{s1}^2 + w_{s2}^2 + \chi_s^2 - Q_s^2)\right\}. \tag{1}$$

Легко проверить, что даже в рамках сделанных здесь предположений о том, что электрон взаимодействует с различными гармоническими компонентами поля, имея разный электрический заряд (в зависимости от их частоты), собственные функции можно привести к виду, совершенно аналогичному выражению (9) в А. Это делается точно так же, как и в А, если учесть два соотношения:

$$2\pi\nu_s\chi_s - P_s = 0 \tag{2}$$

и

$$\tilde{\omega}_s - 2\pi\nu_s Q_s + \frac{c}{2\pi\nu_s}\sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}}e_s\cos\Gamma_s = 0, \tag{3}$$

которые означают, что в любой момент времени справедливо уравнение

$$\frac{1}{c}\frac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{U} = 0, \tag{4}$$

связывающее между собой скалярный и векторный потенциалы. С помощью соотношений (2) и (3) устанавливается, каким образом амплитуда вероятности $\psi(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, w_{s1}, w_{s2}, \chi_s, Q_s)$ зависит от переменных χ_s и Q_s; оказывается, что, согласно А, она имеет вид

$$\psi = e^{\frac{2\pi i}{h}\sum_s \chi_s\left(2\pi\nu_s Q_s - \frac{c}{2\pi\nu_s}\sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}}e_s\cos\Gamma_s\right)}\varphi(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, w_{s1}, w_{s2}). \tag{5}$$

Функция φ, которую в каком-то смысле можно считать своего рода амплитудой вероятности, удовлетворяет уравнению типа

$$-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = R\varphi, \tag{6}$$

где R, как и в А, означает оператор

$$R = -c\gamma\cdot\mathbf{p} - \delta mc^2 + c\sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}}\sum_r e_r(\gamma\cdot\mathbf{A}_r)w_r\sin\Gamma_r + \sum_r\left(\frac{1}{2}\omega_r^2 + 2\pi^2\nu_r^2 w_r^2\right) + \frac{c^2}{\pi\Omega}\sum_s\frac{1}{\nu_s^2}e_s^2\cos^2\Gamma_s. \tag{7}$$

По сравнению с принятыми в А обозначениями эта формула для R содержит одно небольшое упрощение: вместо того, чтобы рассматривать две координаты w_{s1} и w_{s2} порознь, мы обозначили их одним индексом — w_r. Естественно, что новый индекс r принимает вдвое больше значений, чем соответствующий индекс s, поскольку имеется две возможные поляризации для поперечных составляющих волны.

§ 3. Прежде всего нам нужно выяснить физический смысл последнего члена в формуле (7), чтобы показать его соответствие собственной электростатической энергии электрона; при наших предположениях, по существу эквивалентных предположению о конечном радиусе электрона, эта энергия не обязательно должна быть бесконечной.

Сумму, которая фигурирует в последнем члене формулы (7), можно преобразовать в интеграл; для этого достаточно вместо $\cos^2\Gamma_s$ подставить его среднее значение 1/2, выразить e_s в функции частоты ν_s, положив $e_s = e(\nu_s)$, и, наконец, заменить сумму $\sum\limits_s$ интегралом $\int\limits_0^\infty \frac{4\pi\Omega}{c^3}\nu_s^2 d\nu_s$, где $\frac{4\pi\Omega}{c^3}\nu_s^2 d\nu_s$ представляет число частот продольных волн в интервале от ν_s до $\nu_s + d\nu_s$ (индекс s, но не r). Таким образом, получаем

$$\frac{c^2}{\pi\Omega}\sum_s \frac{1}{\nu_s^2} e_s^2\cos^2\Gamma_s = \frac{2}{c}\int\limits_0^\infty e^2(\nu_s)\,d\nu. \tag{8}$$

Можно легко доказать, например, что сферическому поверхностному распределению электрического заряда отвечает выражение

$$e(\nu) = \frac{ce}{2\pi\nu R}\sin\frac{2\pi\nu R}{c}. \tag{9}$$

Подставив его в формулу (8), найдем

$$\frac{2}{c}\int\limits_0^\infty e^2(\nu)\,d\nu = \frac{e^2}{2R}, \tag{10}$$

что как раз и соответствует электростатической энергии рассматриваемого распределения электрического заряда. Впрочем, тождественность формулы (8) выражению для электростатической энергии легко доказывается также и в случае более сложного распределения заряда. Разумеется, для точечного электрического заряда, для которого $e(\nu)$ не зависит от частоты, слагаемое (8) становится бесконечным.

Наличие в гамильтониане R члена (8) и его обсуждавшийся нами физический смысл не должны заставлять нас думать, будто поделенная на c^2 электростатическая энергия представляет собой в квантовой электродинамике электромагнитную массу (что имеет место в классической теории);

в действительности нужно еще рассмотреть влияние другого члена гамильтониана R, зависящего от наличия электрического заряда, а именно

$$c\sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}}\sum_r e_r(\gamma\cdot \mathbf{A}_r)\, w_r \sin\Gamma_r. \tag{11}$$

До того как исследовать влияние этого члена, мы должны попытаться несколько упростить нашу задачу; эти упрощения связаны с существованием интеграла количества движения.

§ 4. Из самого вида собственной функции (5) с очевидностью следует, что импульс $\mathbf{p}$ частицы никогда не может принимать определенных значений; если бы это было не так, то зависимость ψ от пространственных координат имела бы вид $e^{\frac{2\pi i}{h}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$, что исключается самой формой выражения (5) для ψ. То, что $\mathbf{p}$ не может принимать определенное значение, следует из того факта, что $\mathbf{p}$ не коммутирует с левой частью соотношения (3), которая точно равна нулю. Легко понять физическую причину такой неопределенности $\mathbf{p}$; в самом деле, при своем движении электрон сопровождается окружающим его электромагнитным полем, которое в известном смысле составляет неотъемлемую часть самого электрона. Поэтому при рассмотрении импульса обязательно нужно учитывать и вклад этого поля. Чтобы получить полный импульс системы, нужно добавить также электромагнитный импульс поля излучения. Полный импульс, естественно, должен быть постоянным и, следовательно, коммутировать с H; поскольку же он должен обладать определенными значениями, он также должен коммутировать и с левыми частями соотношений (2) и (3).

Легко проверить, что полный импульс представляется следующим вектором:

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{p} - \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}}\sum_s e_s\chi_s\boldsymbol{\alpha}_s\sin\Gamma_s + \frac{2\pi}{c}\sum_j \nu_j\boldsymbol{\alpha}_j(w_j w_{j^*} - w_j w_{j^*}), \tag{12}$$

который удовлетворяет указанным выше условиям. Последний член формулы (12) дает количество движения излучения. В нем использованы следующие обозначения. Индекс j, по которому ведется суммирование, относится только к половине поперечных компонент r излучения; другая половина представлена индексом, который мы обозначили через j^*. Для каждой компоненты j имеется соответствующая компонента j^*; они скоррелированы следующими соотношениями:

$$\nu_j = \nu_{j^*}, \qquad \boldsymbol{\alpha}_j = \boldsymbol{\alpha}_{j^*}, \qquad \mathbf{A}_j = \mathbf{A}_{j^*}, \qquad \cos\Gamma_j = \sin\Gamma_{j^*}. \tag{13}$$

Таким образом, две компоненты j и j^* имеют равные частоты, одинаковые направления распространения и поляризации и сдвинуты по фазе одна относительно другой на четверть периода.

То, что вектор П коммутирует с левыми частями выражений (2) и (3), проверяется немедленно. Для доказательства того, что он является постоянным и, следовательно, коммутирует с H, удобно записать H в виде

$$H = -c\gamma\cdot\mathbf{p} - \delta mc^2 + c\sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}}\sum_s e_s(Q_s\cos\Gamma_s + \gamma\cdot\alpha_s\chi_s\sin\Gamma_s) +$$

$$+ c\sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}}\sum_j e_j\gamma\cdot\mathbf{A}_j(w_j\sin\Gamma_j + w_{j^*}\cos\Gamma_j) +$$

$$+\sum_j\left[\frac{w_j^2+w_{j^*}^2}{2} + 2\pi^2\nu_j^2(w_j^2+w_{j^*}^2)\right] + \sum_s\left[\frac{\tilde{\omega}_s^2 - P_s^2}{2} + 2\pi^2\nu_s^2(\chi_s^2 - Q_s^2)\right]. \quad (14)$$

Тогда сразу же получается соотношение

$$\mathbf{\Pi}H - H\mathbf{\Pi} = 0,$$

если принять во внимание соотношения (2) и (3) и учесть, что в силу изотропного распределения гармонических компонент поля излучения

$$\frac{8\pi}{\Omega}\sum_s\frac{ce_s^2}{2\pi\nu_s}\alpha_s\sin\Gamma_s\cos\Gamma_s = 0.$$

§ 5. В случае, когда П принимает определенное численное значение, из амплитуды вероятности можно легко исключить пространственные координаты по аналогии с тем, как это уже делалось для исключения Q_s и χ_s с помощью соотношений (2) и (3). В указанной выше работе Гейзенберг в рассматриваемом им случае также производил такое исключение.

Заметим, что когда левой части равенства (12) приписывается определенное значение (векторное), амплитуда вероятности должна удовлетворять дифференциальному уравнению, которое получается, если $\Pi\psi$ приравнять оператору, фигурирующему в правой части (12) и действующему на ψ. Учитывая выражение (5), это уравнение можно преобразовать в следующее уравнение для φ:

$$\frac{2\pi i}{h}\mathbf{\Pi}\varphi = \operatorname{grad}\varphi - \sum_j\frac{2\pi\nu_j}{c}\alpha_j\left(w_j\frac{\partial\varphi}{\partial w_{j^*}} - w_{j^*}\frac{\partial\varphi}{\partial w_j}\right). \quad (15)$$

Общий интеграл этого уравнения есть

$$\varphi = e^{\frac{2\pi i}{h}\mathbf{\Pi}\cdot\mathbf{x}}F\left(t, \sigma, \sqrt{w_j^2+w_{j^*}^2}, \Gamma_j - \operatorname{arctg}\frac{w_j}{w_{j^*}}\right) = e^{\frac{2\pi i}{h}\mathbf{\Pi}\cdot\mathbf{x}}F(t, \sigma, k_j, \vartheta_j), \quad (16)$$

где мы положили

$$w_j = k_j\sin(\Gamma_j - \vartheta_j), \qquad w_{j^*} = k_j\cos(\Gamma_j - \vartheta_j). \quad (17)$$

Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция F, получается при подстановке решения (16) в уравнение (6), причем нужно помнить смысл индекса j и записать оператор, определяемый выражением (7), в виде

$$R = -c\gamma\cdot\mathbf{p} - \delta mc^2 + c\sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}}\sum_j e_j(\gamma\cdot\mathbf{A}_j)(w_j\sin\Gamma_j + w_{j^*}\cos\Gamma_j) + \\ + \frac{1}{2}\sum_j\left[\frac{\omega_j^2+\omega_{j^*}^2}{2} + 2\pi^2\nu_j^2(w_j^2+w_{j^*}^2)\right] + \frac{2}{c}\int_0^\infty e^2(\nu)\,d\nu. \quad (18)$$

Учитывая далее соотношения (17), путем несложных вычислений находим

$$-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial F}{\partial t} = GF, \quad (19)$$

где G представляет собой следующий оператор:

$$G = -c\mathbf{\Pi}\cdot\gamma - \delta mc^2 + \sum_j ih\nu_j(\gamma\cdot\boldsymbol{\alpha}_j)\frac{\partial}{\partial\vartheta_j} + \sum_j\left\{2\pi^2\nu_j^2k_j^2 - \frac{h^2}{8\pi^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial k_j^2} + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{1}{k_j}\frac{\partial}{\partial k_j} + \frac{1}{k_j^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta_j^2}\right)\right\} + c\sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}}\sum_j e_j(\gamma\cdot\mathbf{A}_j)k_j\cos\vartheta_j + \frac{2}{c}\int_0^\infty e^2(\nu)\,d\nu. \quad (20)$$

Если вместо k_j и ϑ_j ввести переменные

$$\xi_j = k_j\cos\vartheta_j, \qquad \eta_j = k_j\sin\vartheta_j, \quad (21)$$

то оператор G принимает форму

$$G = -c\mathbf{\Pi}\cdot\gamma - \delta mc^2 + \sum_j ih\nu_j(\gamma\cdot\boldsymbol{\alpha}_j)\left(\xi_j\frac{\partial}{\partial\eta_j} - \eta_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right) + \sum_j\{2\pi^2\nu_j^2(\xi_j^2+\eta_j^2) - \\ - \frac{h^2}{8\pi^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta_j^2}\right)\right\} + c\sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}}\sum_j e_j(\gamma\cdot\mathbf{A}_j)\xi_j + \frac{2}{c}\int_0^\infty e^2(\nu)\,d\nu, \quad (22)$$

где в явном виде фигурирует количество движения излучения (третий член) и энергия излучения (четвертый член).

§ 6. Наконец, уравнение (19) можно упростить, если предположить, что частица не обладает «материальной» массой и что вся ее масса имеет электромагнитную природу. В этом случае мы должны положить в формулах (20) и (22) $m = 0$. Тогда сразу же оказывается, что величина

$$i\gamma_x\gamma_y\gamma_z \quad (23)$$

коммутирует с G, и ее можно считать интегралом, который может принимать постоянные численные значения. Возводя в квадрат и учитывая

свойства γ, находим $(i\gamma_x\gamma_y\gamma_z)^2 = 1$; собственные значения величины $i\gamma_x\gamma_y\gamma_z$ равны, следовательно, $+1$ и -1. Это обстоятельство позволяет упростить нашу задачу и перейти от четырехкомпонентной теории, в которой для γ_x, γ_y и γ_z нужно брать матрицы Дирака, к двухкомпонентной, где мы должны пользоваться матрицами Паули. Точнее, если

$$i\gamma_x\gamma_y\gamma_z = 1,$$

то следует брать

$$\gamma_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma_y = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}. \tag{24}$$

Если же

$$i\gamma_x\gamma_y\gamma_z = -1,$$

то

$$\gamma_x = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma_y = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}. \tag{25}$$

Сразу же выясняется, что эти два случая по существу не различаются между собой и просто соответствуют двум возможным ориентациям спина. Поэтому мы будем считать, что γ имеет форму (24).

Запишем, далее, оператор G, положив в нем $m = 0$ и выбрав ось z в направлении полного импульса:

$$G = -c\Pi\cdot\gamma_z + \sum_j ih\nu_j(\boldsymbol{\alpha}_j\cdot\boldsymbol{\gamma})\frac{\partial}{\partial\vartheta_j} + \sum_j\left(2\pi^2\nu_j^2 k_j^2 - \frac{h^2}{8\pi^2}\Delta_j\right) + \\ + c\sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}}\sum_j e_j(\mathbf{A}_j\cdot\boldsymbol{\gamma})\xi_j + \frac{2}{c}\int_0^\infty e^2(\nu)\,d\nu; \tag{26}$$

здесь γ означают операторы (24).

§ 7. Таким образом, в математическом отношении задача определения электромагнитной массы частицы сводится к отысканию собственных значений оператора (26). Они, естественно, зависят от того значения импульса Π, которое фигурирует в формуле (26) в качестве параметра; следовательно, энергия оказывается функцией импульса. Сопоставляя это соотношение с релятивистским выражением для кинетической энергии W (как функции импульса)

$$W = \sqrt{c^2\Pi^2 + M^2c^4}, \tag{27}$$

можно было бы найти электромагнитную массу M. Разумеется, при этом следует помнить, что импульс Π можно, вообще говоря, интерпретировать как сумму импульсов квантов излучения, которые могут присутствовать

в электромагнитном поле. Для того чтобы Π представлял импульс только частицы, нужно искать такие решения, которые отвечают отсутствию излучения.

Точное отыскание собственных значений оператора G связано, по-видимому, со значительными математическими трудностями, которые к настоящему времени мне не удалось преодолеть. Поэтому единственный путь попытаться составить некоторое представление об их структуре состоит в использовании метода возмущений. Представим гамильтониан G в виде суммы

$$G = G_0 + g \tag{28}$$

невозмущенного гамильтониана

$$G_0 = -c\Pi\gamma_z + \sum_j ih\nu_j (\boldsymbol{\alpha}_j\cdot\boldsymbol{\gamma}) \frac{\partial}{\partial\vartheta_j} + \sum_j \left(2\pi^2\nu_j^2 k_j^2 - \frac{h^2}{8\pi^2}\Delta_j\right) + \frac{2}{c}\int_0^\infty e^2(\nu)\, d\nu \tag{29}$$

и члена, описывающего возмущение,

$$g = c\sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum_j e_j (\mathbf{A}_j\cdot\boldsymbol{\gamma})\, \xi_j. \tag{30}$$

Чтобы метод возмущений дал разумные результаты, необходимо, конечно, чтобы возмущение было мало по сравнению с разностью собственных значений невозмущенной задачи. Легко видеть, что в случае нашей задачи это не так, и поэтому подобный метод не может дать ничего большего, кроме некоторых указаний на характер решения, которые, однако, следует принимать с определенными оговорками.

Тем не менее я приведу здесь результаты, полученные методом возмущений, ибо они как будто указывают на некоторые особенности квантового подхода к проблеме электромагнитной массы, существенно отличающиеся от того, что наблюдается в классическом случае.

В качестве нулевого приближения следует взять такое решение, для которого все компоненты излучения имеют квантовое число нуль, поскольку нам нужно найти решение для случая, когда в поле излучения энергии нет (исключая, разумеется, нулевую энергию). Для такого решения, очевидно, имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta_j} = 0,$$

означающее, что в нулевом приближении электромагнитный импульс равен нулю. Естественно, что это решение состоит из двух функций, отвечающих двум компонентам матриц Паули.

В нулевом приближении вторую из этих компонент можно положить равной нулю: получается, следовательно, что $\gamma_z = -1$. Таким образом, в нулевом приближении энергия дается — помимо нулевой энергии и электростатической энергии $\frac{2}{c}\int_0^\infty e^2(\nu)\,d\nu$ — величиной $c\Pi$, совпадающей с классическим значением кинетической энергии W, которое получается из формулы (27), если в нулевом приближении положить в ней $M = 0$.

Легко видеть, что в первом приближении возмущение энергии равно нулю; в самом деле, оно определяется средним значением возмущающего члена g, действующего на собственную функцию нулевого приближения. Далее, собственные функции излучающего осциллятора, имеющие квантовое число нуль, четны и потому для них $\xi_j = 0$, откуда следует, что $\bar{g} = 0$. По этой причине для того, чтобы получить отличный от нуля первый член поправки к энергии, нужно перейти ко второму приближению. Поправочный член к энергии во втором приближении дается, согласно общим формулам теории возмущений, выражением

$$W_2 = \sum_k \frac{|g_{0k}|^2}{E_0 - E_k};$$

при этом принимается во внимание, что в нашем случае возмущение энергии равно нулю в первом приближении.

Его вычисление несколько трудоемко, однако существенных трудностей не представляет, ибо собственные функции и собственные значения нулевого приближения полностью известны. Не вдаваясь в детали этого расчета, укажем здесь его результат:

$$W_2 = \frac{2h}{c^2\Pi}\int_0^\infty e^2(\nu)\,\nu d\nu - \frac{2}{c}\int_0^\infty e^2(\nu)\,d\nu. \tag{31}$$

Добавляя энергию (31) к энергии нулевого приближения, которая дается суммой

$$c\Pi + \frac{2}{c}\int_0^\infty e^2(\nu)\,d\nu + \text{нулевая энергия}, \tag{32}$$

находим во втором приближении выражение для энергии как функции количества движения электрона. Опуская несущественную аддитивную постоянную, представляющую нулевую энергию излучения, находим это выражение:

$$W\, c\Pi + \frac{2h}{c^2\Pi}\int_0^\infty e^2(\nu)\,\nu\, d\nu. \tag{33}$$

Его нужно сравнивать с выражением, которое мы получаем, разлагая формулу (27) в ряд по степеням M и оставляя члены порядка M^2, т. е. с

$$c\Pi + \frac{M^2c^3}{2\Pi}. \tag{34}$$

Из такого сопоставления следует выражение

$$M^2 = \frac{4h}{c^5}\int_0^\infty e^2(\nu)\,\nu\,d\nu, \tag{35}$$

или

$$M = \sqrt{\frac{4h}{c^5}\int_0^\infty e^2(\nu)\,\nu\,d\nu}. \tag{36}$$

Это — выражение квантовой электромагнитной массы в нашем приближении.

Эти результаты, которые в силу упомянутых выше причин должны приниматься с некоторыми оговорками, приводят, по-видимому, к следующим выводам.

а) В квантовой электродинамике, в отличие от классической, электромагнитная масса непосредственно не зависит от электростатической энергии распределения электрического заряда, образующего частицу. Напротив, эта электростатическая энергия в конечном счете выпадает из формул; в действительности она входит в энергию нулевого приближения, которая дается выражением (32) (второе слагаемое). Однако второй член поправки к энергии (31) равен и противоположен по знаку электростатической энергии, которая поэтому и выпадает из суммы (33).

б) Найденное выражение (36) для электромагнитной массы существенно отличается от классического вследствие наличия множителя h. В предельном случае $h = 0$ оно должно обращаться в нуль.

Эти заключения содержат в себе, конечно, всю неопределенность приближенных методов, с помощью которых они были получены; правда, в настоящее время это является единственным средством для того, чтобы попытаться составить представление о виде решения. Более уверенные выводы можно было бы сделать, если бы удалось точно решить задачу о нахождении собственных значений гамильтониана (26).

К статье 48

Статья 48 — одна из работ Э. Ферми, знаменитых как оригинальностью содержания, так и безупречностью изложения. Здесь мы видим блестящий пример умения Ферми удивительно ясно изложить вопрос, казавшийся до того трудным и запутанным. Переформулировка квантовой электродинамики, содержавшаяся в этой статье, оказала неоценимую помощь многим ученым разных стран в знакомстве с идеями квантовой электродинамики и овладении ее методами. Среди сотрудников Физического института и немногочисленных студентов-физиков Римского университета статья пользовалась настолько непререкаемым успехом, что ее полушутя именовали «Bibbia rosa» — «Библией цвета розы» (по цвету обложки журнала «Reviews of Modern Physics»).

В заключение может быть стоит напомнить, что этот цикл лекций был прочитан до открытия позитрона.

Б. Понтекорво

См. также вводные замечания к статье 38.

48

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ *

Введение

Еще несколько лет назад невозможно было построить теорию излучения, которая удовлетворительно объясняла бы наряду с интерференционными явлениями также и процессы испускания и поглощения света веществом. Первую группу явлений описывала волновая теория, а вторую — теория световых квантов. Лишь в 1927 г. Дирак сумел построить квантовую теорию излучения, которая единым образом могла объяснить оба типа явлений. В этой статье мы выведем основные формулы теории Дирака и на нескольких характерных примерах продемонстрируем ее приложения (часть I). Во второй части этой работы будет рассмотрена связь теории излучения с релятивистским волновым уравнением Дирака для электрона. Третья часть посвящена общим проблемам квантовой электродинамики и связанным с нею трудностям.

* *Quantum Theory of Radiation*. Rev. Mod. Phys., 1932, 4, 87—132. Лекции, прочитанные в Мичиганском университете на Симпозиуме по теоретической физике во время летней сессии 1930 г.

Часть I

ТЕОРИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ ДИРАКА

§ 1. Фундаментальная идея

Свою теорию излучения Дирак основывает на очень простой концепции: вместо того, чтобы рассматривать атом и взаимодействующее с ним поле излучения как две различные системы, он считает их единым объектом, энергия которого есть сумма трех членов. Первый из них представляет энергию атома, второй — электромагнитную энергию поля излучения, а третий, малый член — энергию связи атома с полем излучения.

Если пренебречь этим последним членом, то атом и поле никак не могут влиять друг на друга, т. е. энергия излучения не может поглощаться или излучаться атомом. Эту связь поясняет очень простой пример. Рассмотрим соответствующий нашему атому маятник и колеблющуюся вблизи него струну, которая представляет поле излучения. В отсутствие какой-либо связи между маятником и струной обе системы колеблются совершенно независимо одна от другой; в этом случае энергия есть просто сумма энергий маятника и струны, а член, описывающий взаимодействие, отсутствует. Механическую аналогию этого слагаемого можно представить в виде очень тонкой и упругой нити a, которая соединяет маятник массы M со струной в некоторой точке A. Действие этой нити состоит в слабом возмущении движения струны и маятника. Предположим, например, что в момент времени $t = 0$ струна колеблется, а маятник находится в покое. Тогда через посредство упругой нити a колеблющаяся струна передает маятнику очень слабые усилия с теми же периодами, что и колебания самой струны. Когда эти периоды отличны от периода маятника, амплитуда его колебаний все время остается чрезвычайно малой; однако если периоды струны и маятника равны, то имеет место резонанс, и амплитуда колебаний маятника становится со временем значительной. Этот процесс соответствует поглощению излучения атомом.

И наоборот, полагая, что в момент $t = 0$ маятник колеблется, а струна покоится, получим обратный процесс. Передаваемые упругой нитью усилия от маятника к струне приведут последнюю в колебательное движение; однако значительной амплитуды достигнут лишь те гармоники струны, частоты которых очень близки к частоте маятника. Такой процесс соответствует испусканию излучения атомом.

§ 2. Аналитическое представление

Возвращаясь к случаю атома и поля излучения, нам нужно прежде всего решить задачу отыскания удобного набора координат для описания этой системы. Состояние атома можно описать с помощью любой системы

координат; если положить, что атом содержит всего один электрон, то можно, например, выбрать его декартовы координаты (а если потребуется, и спиновую координату). Состояние поля излучения можно было бы характеризовать значениями компонент электрического и магнитного векторов в любой точке пространства. Кроме того, поле можно представить с помощью скалярного и векторного потенциалов. В этом случае мы должны задать в каждой точке пространства значения скалярного потенциала V и трех компонент векторного потенциала U_x, U_y, U_z. В этом представлении поле описывается бесконечным множеством переменных, с которым очень трудно работать; более того, подобное представление неудобно еще и потому, что эти переменные входят очень запутанным образом в выражение для энергии поля, даже если не учитывать, в первом приближении, воздействие атома на поле.

В силу этих причин часто оказывается более удобным следующее описание поля. Вместо того чтобы рассматривать излучение в бесконечном пространстве, будем изучать его поведение в полости конечного объема Ω с идеально отражающими стенками. Если затем сделать полость бесконечной в каждом направлении, то в пределе мы получим свойства излучения в свободном пространстве.

Электромагнитные колебания в полости конечного объема, так же как и колебания упругого тела конечного объема, можно представить суперпозицией конечного множества главных колебаний, каждое из которых соответствует системе стоячих волн. Число стоячих волн, частота которых лежит в пределах от ν до $\nu + d\nu$, для очень большого объема Ω дается выражением

$$dN = \frac{8\pi}{c^3}\Omega\nu^2 d\nu \tag{1}$$

где c — скорость света.

Следует заметить, что суперпозицией стоячих волн можно представить лишь поле излучения, но не электромагнитное поле в общем случае, с квантово-теоретическим описанием которого имеет дело общая квантовая электродинамика; ее мы обсудим в части III настоящей статьи. Сейчас же ограничимся простой теорией излучения, т. е. исследуем в рамках квантовой теории лишь ту часть электромагнитного поля, которая ответственна за процессы излучения. Поле излучения можно при этом представить суперпозицией обычных плоских электромагнитных волн, в то время как, например, кулоновские силы требуют более общего описания.

Электромагнитное поле плоской стоячей волны описывается векторным потенциалом вида

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}u(t)\sin\left[\frac{2\pi\nu}{c}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{X}) + \beta\right]. \tag{2}$$

Зависимость амплитуды от координат заключена в выражении, стоящем под знаком sin; $\mathbf{X}$ — вектор с компонентами x, y, z; $\boldsymbol{\alpha}$ — единичный вектор,

задающий направление стоячей волны; **A** — единичный вектор, который определяет направление колебания напряженности электрического поля. Векторы **A** и $\boldsymbol{\alpha}$ взаимно перпендикулярны в силу поперечности волны. Множитель $u(t)$, описывающий временну́ю зависимость, является обычно синусоидальной функцией t, но не всегда: если атом излучает или поглощает, то амплитуда стоячей волны может возрастать либо уменьшаться.

Теперь представим поле излучения суперпозицией стоячих волн типа (2) с частотами $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$. Число частот в интервале от ν до $\nu + d\nu$ определяется формулой (1). Направления α_s и $\mathbf{A}_s$ стоячих волн и поляризации распределены случайным образом. Таким образом, имеем

$$\mathbf{U} = \sum_s \mathbf{A}_s u_s(t) \sin \Gamma_s = \sum_s \mathbf{U}_s, \tag{3}$$

где

$$\Gamma_s = \frac{2\pi\nu}{c} (\boldsymbol{\alpha}_s \cdot \mathbf{X}) + \beta_s. \tag{4}$$

В отсутствие излучения и поглощения $u_s(t)$ представляют собой синусоидальные функции времени, но в общем случае они могут зависеть от t произвольным образом. Теперь очевидно, что если в любой данный момент времени t известны значения всех u_s, то в силу (3) векторный потенциал определен в пространстве Ω для этого же момента времени. Поэтому u_s можно взять в качестве координат, представляющих поле излучения в любой момент времени.

§ 3. Электромагнитная энергия поля излучения

Нам предстоит теперь выразить электромагнитную энергию поля излучения через координаты u_s. Определяемые потенциалом **U** напряженности электрического и магнитного полей равны

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}, \qquad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{U}.$$

Используя равенства (3) и (4), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\sum_s \frac{1}{c} \mathbf{A}_s \dot{u}_s \sin \Gamma_s, \\ \mathbf{H} &= \sum_s \frac{2\pi\nu_s}{c} (\boldsymbol{\alpha}_s \times \mathbf{A}_s) u_s \cos \Gamma_s. \end{aligned} \tag{5}$$

Заключенная в пространстве Ω электромагнитная энергия есть

$$W_e = \Omega \frac{\overline{\mathbf{E}^2} + \overline{\mathbf{H}^2}}{8\pi},$$

где величины с чертой сверху представляют средние значения. Нам нужно вычислить средние по объему E^2 и H^2. Очевидно, что квадраты смешанных выражений в среднем равны нулю. Вспоминая, что $\overline{\sin^2 \Gamma_s} = \overline{\cos^2 \Gamma_s} = 1/2$, а $(\boldsymbol{\alpha}_s \times \mathbf{A}_s)^2 = 1$ (поскольку $\mathbf{A}_s$ и $\boldsymbol{\alpha}_s$ — взаимно перпендикулярные единичные векторы), получаем

$$\overline{\mathbf{E}}^2 = \frac{1}{2c^2} \sum_s \dot{u}_s^2, \qquad \overline{\mathbf{H}}^2 = \sum_s \frac{2\pi^2 \nu_s^2}{c^2} u_s^2.$$

Таким образом, электромагнитная энергия равна

$$W_l = \frac{\Omega}{8\pi c^2} \sum \left(\frac{1}{2} \dot{u}_s^2 + 2\pi^2 \nu_s^2 u_s^2 \right). \tag{6}$$

Из этого выражения для энергии излучения можно легко получить уравнения, определяющие в гамильтоновой форме зависимость u_s от времени. С этой целью введем посредством обычных правил новую переменную v_s, канонически сопряженную с u_s:

$$v_s = \frac{\partial W_e}{\partial \dot{u}_s} = \frac{\Omega}{8\pi c^2} \dot{u}.$$

В гамильтоновой форме выражение (6) принимает вид

$$W_l = \sum_s \left(\frac{8\pi c^2}{\Omega} \frac{v_s^2}{2} + \frac{\Omega}{8\pi c^2} 2\pi^2 \nu_s^2 u_s^2 \right). \tag{7}$$

Из этого гамильтониана получаем канонические уравнения

$$\dot{u}_s = \frac{dW_e}{\partial v_s} = \frac{8\pi c^2}{\Omega} v_s, \qquad \dot{v}_s = -\frac{\partial W_e}{\partial u_s} = -\frac{\Omega}{8\pi c^2} 4\pi^2 \nu_s^2 u_s; \tag{8}$$

исключив из этих уравнений переменную v_s, найдем

$$\ddot{u}_s + 4\pi^2 \nu_s^2 u_s = 0. \tag{9}$$

Как и следовало ожидать, мы нашли, что u_s является периодической функцией времени (с частотой ν_s). Можно заметить, кроме того, что канонические уравнения (8) эквивалентны уравнениям Максвелла для вакуума. Сложные коэффициенты в гамильтониане (7) удобно исключить, заменив переменные u_s и v_s парой других сопряженных переменных p_s и q_s, отличающихся от них постоянными множителями, а именно

$$u_s = \left(\frac{8\pi c^2}{\Omega} \right)^{1/2} q_s, \qquad v_s = \left(\frac{\Omega}{8\pi c^2} \right)^{1/2} p_s. \tag{10}$$

Выражение (7) для энергии приобретает после этого форму

$$W_e = \sum_s \left(\frac{1}{2} p_s^2 + 2\pi^2 \nu_s^2 q_s^2\right), \tag{11}$$

которая совпадает с формой гамильтониана системы многих независимых осцилляторов с массой 1 и частотами $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$. Будучи выражен через эти новые переменные q_s, векторный потенциал (3) принимает вид

$$\mathbf{U} = c\left(\frac{8\pi}{\Omega}\right)^{1/2} \sum_s \mathbf{A}_s q_s \sin \Gamma_s. \tag{12}$$

§ 4. Гамильтониан атома и поля излучения

Запишем теперь гамильтониан атома таким образом, чтобы, подставив его в (11), получить гамильтониан сложной системы, состоящей из атома и поля излучения.

Функцию Гамильтона для электрона находим в первом приближении из обычного релятивистского гамильтониана точечного заряда, т. е.

$$0 = -\frac{1}{2m}\left\{\left(mc + \frac{W_a - eV}{c}\right)^2 - \left(\mathbf{p} - \frac{e\mathbf{U}}{c}\right)^2\right\} + \frac{mc^2}{2} \tag{13}$$

(члены порядка $1/c^2$ не учитываем). Позднее станет ясно (часть II), каким образом в теории излучения можно воспользоваться также и релятивистским гамильтонианом Дирака для электрона со спином.

Пренебрегая членами порядка $1/c^2$, получаем из (13)

$$W_a = \frac{p^2}{2m} + eV - \frac{e}{mc}(\mathbf{U}\cdot\mathbf{p}). \tag{14}$$

Гамильтониан сложной системы, состоящей из атома и поля излучения, найдем при сложении выражений (11) и (14), подставляя, кроме того, в (14) выражение (12) для $\mathbf{U}$. Получаем, таким образом:

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + eV + \sum_s \left(\frac{1}{2} p_s^2 + 2\pi^2 \nu_s^2 q_s^2\right) - \frac{e}{m}\left(\frac{8\pi}{\Omega}\right)^{1/2} \sum_s (\mathbf{A}_s\cdot\mathbf{p})\, q_s \sin \Gamma_s. \tag{15}$$

Первые два члена в выражении (15) дают гамильтониан, описывающий движение электрона, если пренебречь влиянием излучения на него. Третье слагаемое — гамильтониан поля излучения (11). Последний член

$$\mathscr{H} = -\frac{e}{m}\left(\frac{8\pi}{\Omega}\right)^{1/2} \sum_s (\mathbf{A}_s\cdot\mathbf{p})\, q_s \sin \Gamma_s \tag{16}$$

представляет собой взаимодействие, поскольку он содержит координаты как излучения (q_s), так и атома ($\mathbf{p}$ и $\mathbf{X}$, включенные в Γ_s).

В некоторых случаях, особенно в теории дисперсии и эффекта Комптона, необходимо записывать гамильтониан более аккуратно. Записывая член $(1/2m)(\mathbf{p} - e\mathbf{U}/c)^2$ в (13), мы пренебрегли выражением

$$e^2\mathbf{U}^2/2mc^2. \qquad (17)$$

Если же его учесть и подставить вместо $\mathbf{U}$ его выражение (12), то к гамильтониану (15) нужно будет добавить член

$$H^{(2)} = \frac{4\pi e^2}{\Omega m} \sum_{s\sigma} (\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{A}_\sigma)\, q_s q_\sigma \sin\Gamma_s \sin\Gamma_\sigma. \qquad (18)$$

Далее станет видна весьма своеобразная связь этого слагаемого с переходами от положительной к отрицательной массе, характерными для дираковой теории электрона со спином.

§ 5. Классическое рассмотрение

Существенно отметить, что результаты классической теории электромагнитного излучения и, в частности, формула Лармора получаются из гамильтониана (15) классическим путем. В этом можно убедиться, выводя канонические уравнения из гамильтониана (15); если, например, мы рассматриваем пару переменных q_s, p_s, то приходим к уравнениям

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s} = p_s,$$

$$\dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s} = -4\pi^2\nu_s^2 q_s + \frac{e}{m}\left(\frac{8\pi}{\Omega}\right)^{1/2} \sum_s (\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{p}) \sin\Gamma_s.$$

Исключая p_s, находим для q_s:

$$\ddot{q}_s + 4\pi^2\nu_s^2 q_s = \frac{e}{m}\left(\frac{8\pi}{\Omega}\right)^{1/2} \sum_s (\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{p}) \sin\Gamma_s. \qquad (19)$$

Это соотношение представляет собой уравнение вынужденных колебаний осциллятора с частотой ν_s. Если предположить, например, что в момент $t = 0$ в поле никакого излучения нет, т. е. $q_s = p_s = 0$, но имеется неравномерно движущийся электрон (изменяется его импульс $\mathbf{p}$), то из (19) следует, что через некоторое время q_s будет отлична от нуля. Это означает наличие в s-компоненте излучения определенного количества энергии, испущенного движущимся зарядом. Конечно, эффект будет больше, если движение заряда является периодическим с частотой, близкой к ν_s. Этим методом можно показать, что количество энергии, излучаемой в еди-

ницу времени движущимся зарядом, равно в первом приближении

$$\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}A^2 \qquad (20)$$

— в соответствии с результатом Лармора (A — ускорение частицы).

Это показывает, что классическая трактовка гамильтониана (15) и обычная теория излучения дают одинаковые результаты; теперь нам предстоит применить к гамильтониану (15) квантовомеханические методы.

§ 6. Теория возмущений

С этой целью запишем несколько используемых в дальнейшем общих формул теории возмущений в рамках волновой механики. Пусть

$$H = H_0 + \mathcal{H} \qquad (21)$$

есть гамильтониан системы с координатами q и импульсами p. Уравнение Шредингера

$$-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi = (H_0 + \mathcal{H})\,\psi \qquad (22)$$

содержит оператор H, полученный из H заменой p на $(h/2\pi i)(\partial/\partial q)$.

Далее, рассмотрим задачу для гамильтониана H_0, т. е. в отсутствие возмущения. Соответствующее ему уравнение Шредингера есть

$$-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H_0\Psi. \qquad (23)$$

Пусть

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n\ldots$$

суть нормированные собственные функции невозмущенной задачи, а

$$E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_n\ldots$$

— соответствующие собственные значения. Самым общим решением уравнения (23) является

$$\Psi = \sum_n a_n\varphi_n(q)\,e^{-2\pi i E_n t/h}, \qquad (24)$$

где a_n — константы. Физический смысл a_n содержится в утверждении, что величина

$$|a_n|^2 \qquad (25)$$

пропорциональна вероятности пребывания системы в n-м квантовом состоянии. Константы a_n можно нормировать таким образом, чтобы

$$\sum_n |a_n|^2 = 1.$$

Тогда $|a_n|^2$ непосредственно дает вероятность того, что система находится в n-м квантовом состоянии; a_n называется амплитудой вероятности n-го квантового состояния. Решение ψ уравнения (22) с учетом возмущения можно разложить в ряд по собственным функциям невозмущенной задачи, т. е. написать его в форме (24); однако коэффициенты a уже будут не константами, но функциями времени t. Подставляя (24) в (22), находим дифференциальные уравнения для a:

$$\dot{a}_n = -\frac{2\pi i}{h}\sum_m \mathcal{H}_{nm} a_m e^{2\pi i (E_n - E_m)\, t/h}, \tag{26}$$

в которых

$$\mathcal{H}_{nm} = \int \bar{\varphi}_n \mathcal{H} \varphi_m dq \tag{27}$$

есть элемент n, m матрицы возмущения, представляющей энергию возмущения $\mathcal{H}$; $\bar{\varphi}_n$ — функция, комплексно сопряженная φ_n. Как видно из выражения (26), коэффициенты a изменяются во времени, так что и вероятности различных квантовых состояний, определяемые выражением (25), также меняются со временем. Это означает, что действие возмущения сводится к индуцированию вероятностей переходов между квантовыми состояниями невозмущенной системы.

§ 7. Квантовомеханическое рассмотрение

Теперь нужно применить эти методы к гамильтониану (15) для атома и поля излучения. В качестве невозмущенного гамильтониана возьмем

$$H_0 = \frac{1}{2m} p^2 + eV + \sum_s \left(\frac{1}{2} p_s^2 + 2\pi^2 \nu_s^2 q_s^2\right). \tag{28}$$

За энергию возмущения примем энергию взаимодействия (16).

Гамильтониан H_0 невозмущенной системы представляет собой сумму членов

$$\frac{1}{2m} p^2 + eV, \tag{29}$$

определяющих энергию атома, и слагаемых типа

$$\frac{1}{2} p_s^2 + 2\pi^2 \nu_s^2 q_s^2, \tag{30}$$

которые представляют энергию s-компоненты излучения, тождественную энергии осциллятора той же частоты ν_s.

Пусть

$$u_n, \quad u_{n1}, \quad u_{n2}, \quad \ldots, \quad u_{n_s}$$

будут шредингеровские функции атома [с гамильтонианом (29)] и каждой компоненты поля излучения [с гамильтонианом (30)]. Для простоты записи все эти функции будем характеризовать только индексом. Тогда отвечающая невозмущенному гамильтониану H_0 шредингеровская функция дается произведением

$$\varphi_{n, n_1, n_2, \ldots, n_s \ldots} = u_n u_{n1} u_{n2} \ldots u_{n_s} \ldots, \tag{31}$$

а соответствующее собственное значение есть сумма:

$$E_{n, n_1, n_2, \ldots, n_s} = E_n + E_{n1} + \ldots + E_{n_s} + \ldots. \tag{32}$$

Гамильтонианы (30) относятся к осцилляторному типу, а для осциллятора имеем

$$E_{n_s} = h\nu_s\left(n_s + \frac{1}{2}\right).$$

Можно, кроме того, пренебречь постоянной энергией $h\nu_s/2$, которая не влияет на процессы (частоты ν_s постоянны, и принимаются во внимание лишь разности энергий), и записать просто

$$E_{n_s} = h\nu_s n_s. \tag{33}$$

При этом формула (32) принимает вид

$$E_{n, n_1, n_2, \ldots n_s} = E_n + h\nu_1 n_1 + h\nu_2 n_2 + \ldots. \tag{34}$$

Тогда соответствующая выражению (24) общая форма скаляра поля * есть

$$\psi(\mathbf{X}, q_1, q_2, \ldots, q_s \ldots) = \sum a_{nn_1 \ldots n_s \ldots} u_n u_{n_1} \ldots u_{n_s} \ldots e^{-2\pi i (E_n + h\nu_1 n_1 + \ldots + h\nu_s n_s + \ldots)t/h}. \tag{35}$$

Коэффициенты a имеют, согласно (25), следующий физический смысл:

$$|a_{nn_1 n_2 \ldots n_s \ldots}|^2 \tag{36}$$

дает вероятность того, что атом находится в квантовом состоянии n, первая компонента поля излучения — в состоянии n_1, вторая — в состоянии n_2 и т. д. Если, например, положить $a_{300 \ldots 0 \ldots} = 1$, а все прочие a равными нулю, то можно с уверенностью сказать, что атом находится в третьем квантовом состоянии и ни одна из компонент поля излучения не возбуждена.

Коэффициенты a постоянны, когда действие возмущения $\mathcal{H}$ не учитывается; согласно общей формуле (26), результат взаимодействия $\mathcal{H}$ состо-

* См. примечание на стр. 232.— *Ред.*

ит в том, что a становятся функциями времени. Если, например, в момент $t = 0$ $a_{300\ldots 0\ldots} = 1$, а все остальные a равны нулю, то по прошествии некоторого времени t может оказаться, что какие-то a, которые сначала были равны нулю, скажем $a_{210\ldots 0\ldots}$, будут теперь отличны от нуля. Это означает, что существует конечная вероятность обнаружить в момент t атом в состоянии 2 (перешедший из состояния 3 в состояние 2) и возбужденную первую компоненту поля излучения. Таков квантово-теоретический механизм излучения энергии.

Чтобы установить, каким образом коэффициенты a меняются во времени, нужно написать теперь для нашего случая уравнения, соответствующие (26). Для этого мы должны найти выражение матричного элемента возмущения $\mathcal{H}$, отвечающее переходу всей системы из квантового состояния $n, n_1, n_2, \ldots$ в состояние $m, m_1, m_2\ldots$ Согласно соотношениям (27) и (31), он равен (поскольку функции u вещественны):

$$\mathcal{H}_{nn_1\ldots n_s\ldots;\, mm_1\ldots m_s\ldots} =$$
$$= \iint\ldots\int\ldots u_n u_{n_1}\ldots u_{n_s}\ldots \mathcal{H} u_m u_{m_1}\ldots u_{m_s}\ldots d\mathrm{X}dq_1\ldots dq_s\ldots \quad (37)$$

где для $\mathcal{H}$ должен быть подставлен оператор (16).[1]

Интеграл (37) легко берется, если принять во внимание следующие соотношения:

$$\int u_{n_a} u_{m_a} dq_a = \delta_{n_a m_a}, \quad (38)$$

которые выражают ортогональность функций u:

$$\int q_s u_{n_s} u_{m_s} dq_s = \begin{cases} 0, & \text{если } m_s \neq n_s \pm 1, \\ \left[\dfrac{h(n_s+1)}{8\pi^2\nu_s}\right]^{1/2}, & \text{если } m_s = n_s + 1, \\ \left[\dfrac{hn_s}{8\pi^2\nu_s}\right]^{1/2}, & \text{если } m_s = n_s - 1. \end{cases} \quad (39)$$

Эти равенства легко проверить, ибо u_s представляют собой известные собственные функции гармонического осциллятора с массой 1 и частотой ν_s, а равенство (39) дает элементы матрицы, представляющей координату q_s этого осциллятора. Нужно, кроме того, помнить, что оператор $\mathbf{p}$ с компонентами p_x, p_y, p_z означает $(h/2\pi i)$ grad. Положим далее

$$\mathbf{P}_{snm} = \int u_n \sin\Gamma_s \mathbf{p} u_m dxdydz = (h/\,2\pi i)\int \sin\Gamma_s u_n \operatorname{grad} u_m dxdydz. \quad (40)$$

Тогда легко найдем, что матричный элемент (37) всегда равен нулю, если индексы $m_1, m_2, \ldots, m_s, \ldots$ компонент излучения более чем в одном случае отличаются от соответствующих $n_1, n_2, \ldots, n_s, \ldots$ Когда лишь один из индексов $m_1, m_2, \ldots, m_s, \ldots$, скажем m_s, отличается от соответствующего n_s, результат, согласно (39), отличен от нуля только при $m_s = n_s \pm 1$.

В этом случае имеем

$$\mathcal{H}_{nn_1\ldots n_s\ldots;\, mn_1\ldots n_s\pm 1\ldots} = -\frac{e}{m}\left(\frac{h}{\pi\Omega\nu_s}\right)^{1/2}(\mathbf{A}_s\cdot\mathbf{P}_{snm})\begin{bmatrix}(n_s+1)^{1/2}\\ n_s^{1/2}\end{bmatrix}, \tag{41}$$

причем мы должны использовать верхнее выражение $(n_s+1)^{1/2}$, если $m_s = n_s + 1$, и нижнее $n_s^{1/2}$, если $m_s = n_s - 1$. Весьма важным является частный случай, когда размеры атома очень малы по сравнению с длиной волны, так что Γ_s — фазы компонент излучения — можно считать постоянными по всему пространству, где собственные функции электрона практически отличны от нуля. В выражении (40) можно тогда вынести $\sin\Gamma_s$ из-под знака интеграла и получить

$$\mathbf{P}_{snm} = \frac{h}{2\pi i}\sin\Gamma_s\int u_n \operatorname{grad} u_m dxdydz.$$

Вспоминая, что

$$\frac{h}{2\pi i}\int u_n \operatorname{grad} u_m d\tau$$

есть импульс электрона, можно сразу же доказать соотношение

$$\frac{h}{2\pi i}\int u_n \operatorname{grad} u_m d\tau = -2\pi i m\nu_{mn}\mathbf{X}_{nm}, \tag{42}$$

где

$$\nu_{mn} = (E_m - E_n)/h \tag{43}$$

— частота, соответствующая переходу из состояния m в состояние n, а

$$\mathbf{X}_{mn} = \mathbf{X}_{nm} = \int \mathbf{X} u_n u_m d\tau \tag{44}$$

есть mn-й элемент матрицы, представляющей радиус-вектор $\mathbf{X}$ [заметим, что буква m используется в соотношении (42) как индекс и как масса электрона; однако мы предпочитаем не вводить новый символ, ибо путаница вряд ли возможна]. Тогда получим, что

$$\mathbf{P}_{snm} = -2\pi i m\nu_{mn}\mathbf{X}_{nm}\sin\Gamma_s \tag{45}$$

и выражение (41) принимает вид

$$\mathcal{H}_{nn_1\ldots n_s\ldots;\, mn_1\ldots n_s\pm 1\ldots} = 2\pi i e\left(\frac{h}{\pi\Omega}\right)^{1/2}\frac{\nu_{mn}}{\nu_s^{1/2}}(\mathbf{A}_s\cdot\mathbf{X}_{nm})\begin{bmatrix}(n_s+1)^{1/2}\\ n_s^{1/2}\end{bmatrix}\sin\Gamma_s. \tag{46}$$

Теперь можно сразу же написать равенства, аналогичные (26), которые характеризуют изменение коэффициентов a как функций времени:

$$\dot{a}_{nn_1\ldots n_s\ldots} = -\frac{2\pi i}{h}\sum_{mm_1\ldots m_s\ldots} a_{mm_1\ldots m_s\ldots}\mathcal{H}_{nn_1\ldots;\, mm_1\ldots}e^{-2\pi i(E_{mm_1\ldots}-E_{nn_1\ldots})t/h}. \tag{47}$$

Учитывая равенства (46), (43), (34) и производя некоторые сокращения, получаем

$$\dot{a}_{nn_1\ldots n_s\ldots} = \frac{4\pi^{3/2}e}{(h\Omega)^{1/2}} \sum_{m,s} \frac{\nu_{mn}}{\nu_s^{1/2}} (\mathbf{A}_s\cdot\mathbf{X}_{nm}) \sin\Gamma_s \, [a_{mn_1\ldots n_{s+1}\ldots} (n_s+1)^{1/2} \times$$
$$\times e^{-2\pi i(\nu_{mn}+\nu_s)t} + a_{mn_1\ldots n_s-1\ldots} n_s^{1/2} e^{-2\pi i(\nu_{mn}-\nu_s)t}. \qquad (48)$$

Это — фундаментальное уравнение теории излучения. В приложениях нам встретятся уравнения, которые отличаются от (48) либо более высокой степенью приближения, либо тем, что они относятся к системам, содержащим более одного электрона. Когда перед нами встанут эти задачи, будут показаны необходимые модификации уравнения (48).

Далее мы обсудим некоторые приложения развитой нами общей теории, намереваясь, прежде всего, показать, что ее действительно можно считать удовлетворительной теорией процессов излучения. Для этого будут рассмотрены следующие примеры:

1. Излучение возбужденного атома и среднее время жизни.
2. Распространение света в вакууме.
3. Случай интерференции: полосы Липпмана.
4. Эффект Допплера.
5. Комптон-эффект.

Приложения к другим задачам указаны в библиографии.

§ 8. Излучение возбужденного атома

Рассмотрим атом, который в момент времени $t = 0$ находится в возбужденном состоянии; предположим, что в окружающем его пространстве лучистой энергии нет. Ради простоты можно рассматривать всего два состояния атома, обозначенные 1 и 2, и положить, что в момент $t = 0$ он находится в состоянии 2. Все это можно выразить, сказав, что при $t = 0$

$$a_{200\ldots0\ldots} = 1, \qquad (49)$$

а все другие a равны нулю. Из опыта нам известно, что через некоторое время атом должен перейти в состояние 1 с меньшей энергией, а разность энергий должна обнаружиться в поле излучения.

Сейчас мы покажем, как можно изучать этот процесс с помощью фундаментального уравнения (48).

Положим

$$\nu_{21} = -\nu_{12} = \nu, \qquad \mathbf{X}_{12} = \mathbf{X}_{21} = \mathbf{X}.$$

Уравнения (48) дают тогда

$$\dot{a}_{10\ldots1_s\ldots} = \frac{4\pi^{3/2}e}{(\Omega h)^{1/2}} \frac{\nu}{\nu_s^{1/2}} (\mathbf{A}_s\cdot\mathbf{X}) \sin\Gamma_s a_{200\ldots0\ldots} e^{-2\pi i(\nu-\nu_s)t}, \qquad (50)$$

$$\dot{a}_{20\ldots0\ldots} = \frac{4\pi^{3/2}e}{(\Omega h)^{1/2}} \sum_s \frac{\nu}{\nu_s^{1/2}} (\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X}) \sin \Gamma_s a_{100\ldots1_s\ldots} e^{-2\pi i(\nu_s-\nu)t} . \tag{51}$$

Попытаемся решить эти уравнения с помощью подстановки

$$a_{20\ldots0\ldots} = e^{-\gamma t}, \tag{52}$$

где γ — константа, которую нужно определить.

Подставим выражение (52) в (50) и проинтегрируем затем по t, определяя константу интегрирования из начальных условий

$$a_{100\ldots1_s\ldots} = 0;$$

тогда найдем

$$a_{100\ldots1_s\ldots} = \frac{4\pi^{3/2}e}{(\Omega h)^{1/2}} \frac{\nu}{\nu_s^{1/2}} (\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X}) \sin \Gamma_s \frac{e^{\{-2\pi i(\nu-\nu_s)-\gamma\}t} - 1}{-2\pi i(\nu-\nu_s)-\gamma} . \tag{53}$$

Подставляя (52) и (53) в (51) и умножая на $e^{-\gamma t}$, получаем

$$\gamma = \frac{16\pi^3 e^2}{\Omega h} \sum_s \frac{\nu^2}{\nu_s} (\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X})^2 \sin^2 \Gamma_s \frac{1 - e^{\{\gamma - 2\pi i(\nu_s-\nu)\}t}}{-2\pi i(\nu-\nu_s)-\gamma} .$$

Сумму можно вычислить следующим способом: так как фаза, направление и поляризация различных компонент излучения распределены случайным образом, можно подставить вместо $(\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X})^2 \sin^2 \Gamma_s$ его значение, усредненное по всем фазам, направлениям и поляризациям. После этого заменим сумму интегралом по ν_s, умножив на коэффициент

$$\frac{8\pi}{c^3} \Omega \nu_s d\nu_s, \tag{54}$$

который, согласно (1), дает число компонент излучения с частотами между ν_s и $\nu_s + d\nu_s$. Замечая, что

$$\overline{(\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X})^2} = \frac{1}{3} X^2, \qquad \overline{\sin^2 \Gamma_s} = \frac{1}{2},$$

получаем

$$\gamma = \frac{64\pi^4 e^2}{3hc^3} \nu^2 X^2 \int_0^\infty \frac{1 - e^{\{\gamma - 2\pi i(\nu_s-\nu)\}t}}{-2\pi i(\nu-\nu_s)-\gamma} \nu_s d\nu_s .$$

Можно показать, что при малых γ этот интеграл имеет величину $\nu/2$; таким образом, находим выражение

$$\gamma = \frac{32\pi^2 e^2}{3hc^3} \nu^3 X^2, \tag{55}$$

определяющее константу γ. Связь этой константы со средним временем жизни состояния 2 устанавливается легко: как показывает соотношение (52), вероятность найти атом в состоянии 2 равна

$$|a_{20\ldots 0\ldots}|^2 = e^{-2\gamma t},$$

а по определению среднего времени жизни эта вероятность должна быть $e^{-t/\tau}$; таким образом,

$$\tau = \frac{1}{2\gamma} = \frac{3hc^3}{64\pi^4 e^2 \nu^3 X^2}. \tag{56}$$

Из этой теории следуют также форма и ширина испускаемой спектральной линии. Заметим в связи с этим, что после того, как излучение испущено, т. е. спустя время t, большое по сравнению со средним временем жизни, экспонента $e^{\{-2\pi i(\nu-\nu_s)-\gamma\}t}$ становится пренебрежимо малой; тогда из соотношения (53) получим

$$a_{100\ldots 1_s\ldots} = \frac{4\pi^{3/2}e}{(\Omega h)^{1/2}} \frac{\nu}{\nu_s^{1/2}} (\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X}) \sin\Gamma_s \frac{1}{2\pi i(\nu_s - \nu) + \gamma}. \tag{57}$$

Следовательно, вероятность того, что испущенный квант принадлежит s-компоненте, равна

$$|a_{10\ldots 1_s\ldots}|^2 = \frac{16\pi^3 e^2}{\Omega h} \frac{\nu^2}{\nu_s} (\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X})^2 \sin^2\Gamma_s \frac{1}{\gamma^2 + 4\pi^2(\nu_s - \nu)^2}. \tag{58}$$

Последний множитель

$$\frac{1}{\gamma^2 + 4\pi^2(\nu_s - \nu)^2} \tag{59}$$

описывает форму линии испускания; она тождественна форме, получаемой в классической теории осцилляторов с экспоненциальным затуханием.

§ 9. Распространение света в вакууме

Этот и следующий разделы посвящены доказательству того, что результаты обычной волновой теории можно применять для вычисления интенсивности света как при распространении его в вакууме, так и в интерференционных явлениях.

Для общего случая это было доказано Рака и совсем недавно Гейзенбергом, который очень общим и прямым методом, не пользуясь разложением Фурье, непосредственно вычисляет амплитуду векторов поля.

Здесь, однако, мы предпочитаем показать на двух примерах, насколько могут быть эффективны фазовые соотношения между различными компонентами при решении задачи о распространении света с конечной скоростью и при рассмотрении интерференционных явлений.

Пусть A и B — два атома; предположим, что в момент $t = 0$ A находится в возбужденном, а B — в нормальном состоянии. Спустя некоторое время A излучает свою энергию, которую, в свою очередь, может поглотить атом B и перейти, таким образом, в возбужденное состояние. Так как свет проходит от A до B за конечное время, возбуждение B может произойти только через время r/c (r — расстояние между этими атомами). Нам предстоит показать, что все это можно вывести из квантовой теории излучения. Упрощая задачу, предположим, что среднее время жизни первого атома A очень мало и, следовательно, свет испускается атомом A во вполне определенный момент времени; положим, далее, что среднее время жизни B очень велико. В результате линия испускания атома A очень широка и может рассматриваться как часть непрерывного спектра; в противоположность этому, линия поглощения атома B очень резкая. Сначала мы должны несколько модифицировать основные уравнения (48) для случая двух атомов в поле излучения. Индексы и величины без штрихов будут использоваться для первого атома A, а со штрихом — для атома B. Величина

$$|a_{nn'n_1\ldots n_s\ldots}|^2$$

есть вероятность пребывания атома A в состоянии n, атома B — в состоянии n' и компонент излучения в состояниях $n_1, \ldots, n_s\ldots$ Уравнения, аналогичные (48), для случая двух атомов можно получить теми же рассуждениями, что и при выводе уравнения (48). Правая часть будет теперь состоять из двух членов, каждый из которых аналогичен правой части (48) и соответствует одному из атомов. Получаем:

$$\begin{aligned}\dot{a}_{nn'n_1\ldots n_s\ldots} = {} & \frac{4\pi^{3/2}e}{(\Omega h)^{1/2}}\sum_{ms}\frac{\nu_{mn}}{\nu_s^{1/2}}(\mathbf{A}_s\cdot\mathbf{X}_{nm})\sin\Gamma_s\times\\ & \times\{a_{mn'n_1\ldots n_s+1\ldots}(n_s+1)^{1/2}e^{-2\pi i(\nu_{mn}+\nu_s)t}+a_{mn'n_1\ldots n_s-1\ldots}n_s^{1/2}e^{-2\pi i(\nu_{mn}-\nu_s)t}\}+\\ & +\frac{4\pi^{3/2}e}{(\Omega h)^{1/2}}\sum_{m's}\frac{\nu'_{m'n'}}{\nu_s^{1/2}}(\mathbf{A}_s\cdot\mathbf{X}'_{m'n'})\sin\Gamma'_s\times\\ & \times\{a_{nm'n_1\ldots n_s+1\ldots}(n_s+1)^{1/2}e^{-2\pi i(\nu'_{m'n'}+\nu_s)t}+a_{nm'n_1\ldots n_s-1\ldots}n_s^{1/2}e^{-2\pi i(\nu'_{m'n'}-\nu_s)t}\}.\end{aligned} \qquad (60)$$

Здесь Γ_s и Γ'_s — фазы s-х стоячих волн там, где находятся первый и второй атомы. Можно положить, что атом A находится в начале координат, а B — на оси x на расстоянии r от него. Тогда из равенства (4) получаем

$$\Gamma'_s = \Gamma_s + \frac{2\pi\nu_s}{c}r\cos\theta_s, \qquad (61)$$

где θ_s — угол между осью x и направлением s-компоненты излучения.

Как и раньше, рассмотрим для каждого атома только два состояния, 1 и 2, положив

$$\nu_{21} = -\nu_{12} = \nu, \qquad \nu'_{21} = -\nu'_{12} = \nu',$$
$$\mathbf{X}_{21} = \mathbf{X}_{12} = \mathbf{X}, \qquad \mathbf{X}'_{21} = \mathbf{X}'_{12} = \mathbf{X}'.$$

Примем, далее, для простоты, что оба вектора $\mathbf{X}$ и $\mathbf{X}'$ сводятся всего лишь к y-компонентам. В момент $t = 0$ первый атом возбужден и находится в состоянии 2, а второй находится в нормальном состоянии 1; кроме того, излучения в поле нет. Тогда имеем

$$a_{210\ldots0\ldots} = 1,$$

между тем как все прочие a равны нулю при $t = 0$. Нам нужно найти вероятность того, что к моменту времени t первый атом потерял свою энергию, а второй атом ее поглотил; эту вероятность дает величина

$$|a_{120\ldots0\ldots}|^2.$$

В предыдущем разделе мы показали, что за время, достаточно большое по сравнению со средним временем жизни, энергия возбужденного атома A передается, согласно (57), полю излучения. Эту формулу можно использовать также и в нашем случае, если пренебречь очень малым возмущением, которое обусловлено присутствием атома B. Тогда можем написать

$$a_{1100\ldots1_s\ldots} = \frac{4\pi^{3/2}e}{(\Omega h)^{1/2}} \frac{\nu}{\nu_s^{1/2}} (\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X}) \sin \Gamma_s \frac{1}{-2\pi i(\nu_s - \nu) + \gamma}. \tag{62}$$

Полагая затем в равенстве (60) $n = 1$, $n' = 2$, $n_1 = n_2 = \ldots = n_s = \ldots = 0$, получаем

$$\dot{a}_{120\ldots0\ldots} = -\frac{4\pi^{3/2}e}{(\Omega h)^{1/2}} \sum_s \frac{\nu'}{\nu_s^{1/2}} (\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X}') \sin \Gamma'_s a_{110\ldots1_s\ldots} e^{-2\pi i(-\nu'+\nu_s)t},$$

так как все остальные члены равны нулю. Подставляя (62) в это уравнение, находим

$$\dot{a}_{120\ldots0\ldots} = -\frac{16\pi^3 e^2}{\Omega h} \nu\nu' \sum_s \frac{(\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X})(\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X}') \sin \Gamma_s \sin \Gamma'_s}{\nu_s [2\pi i(\nu - \nu_s) + \gamma]} e^{-2\pi i(\nu_s - \nu')t}.$$

Интегрируя по t и учитывая, что при $t = 0$ $a_{120\ldots0\ldots} = 0$, в итоге получаем

$$a_{120\ldots0\ldots} = \frac{16\pi^3 e^2}{\Omega h} \nu\nu' \sum_s \frac{(\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X})(\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X}') \sin \Gamma_s \sin \Gamma'_s}{\nu_s [2\pi i(\nu - \nu_s) + \gamma]} \frac{1 - e^{-2\pi i(\nu_s - \nu')t}}{2\pi i(\nu_s - \nu')}. \tag{63}$$

Чтобы просуммировать по s, нужно преобразовать сумму в интеграл. Для этого сначала заменим выражение $(\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X})$ $(\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X}')$ $\sin \Gamma_s \sin \Gamma'_s$

его средним значением. С учетом равенства (61), того факта, что $\mathbf{A}_s$ и α_s — взаимно перпендикулярные единичные векторы, и того, что $\mathbf{X}$ и $\mathbf{X}'$ сводятся к одной-единственной y-компоненте, найдем после некоторых вычислений

$$\overline{(\mathbf{A}_s\cdot\mathbf{X})(\mathbf{A}_s\cdot\mathbf{X}')\sin\Gamma_s\sin\Gamma_s'} =$$
$$= \frac{XX'}{4}\left[\frac{c}{2\pi\nu_s r}\sin\frac{2\pi\nu_s r}{c} + \left(\frac{c}{2\pi\nu_s r}\right)^2\cos\frac{2\pi\nu_s r}{c} - \left(\frac{c}{2\pi\nu_s r}\right)^3\sin^2\frac{2\pi\nu_s r}{c}\right]. \quad (64)$$

Среднее берется по всем значениям фазы, по всем направлениям и поляризациям. Положим теперь, что расстояние r между двумя атомами очень велико по сравнению с длиной волны; тогда можно пренебречь квадратом и кубом весьма малой величины $c/2\pi\nu_s r$ и записать

$$\overline{(\mathbf{A}_s\cdot\mathbf{X})(\mathbf{A}_s\cdot\mathbf{X}')\sin\Gamma_s\sin\Gamma_s'} = \frac{cXX'}{8\pi\nu_s r}\sin\frac{2\pi\nu_s r}{c}. \quad (65)$$

Это среднее значение, умноженное на выражение (54), теперь нужно подставить в соотношение (63), чтобы вычислить сумму, заменяя при этом знак суммы интегралом по ν_s. Таким образом, получаем

$$a_{120\ldots0\ldots} = -\frac{1}{r}\frac{16\pi^3e^2}{c^2h}\nu X\nu' X'\int\limits_0^\infty \frac{\sin(2\pi\nu_s r/c)\left(1+e^{-2\pi i(\nu_s-\nu')t}\right)d\nu_s}{[2\pi i(\nu-\nu_s)+\gamma]\,2\pi i(\nu_s-\nu')}. \quad (66)$$

Выполнить интегрирование можно, если заметить, что значения подынтегральной функции концентрируются, благодаря множителю $(\nu_s-\nu')$ в знаменателе, вблизи значения ν' переменной ν_s. Так как среднее время жизни первого атома мы предположили очень малым, множитель $[2\pi i(\nu_s-\nu)+\gamma]^{-1}$ меняется очень регулярно (т. е. линия испускания первого атома столь широка, что ее можно считать участком непрерывного спектра). Этот множитель, следовательно, можно вынести из-под знака интеграла, положив при этом $\nu_s=\nu'$. Интегрирование, кроме того, можно распространить от $-\infty$ до $+\infty$, поскольку в силу все тех же причин добавляемые члены пренебрежимо малы. Наконец, в качестве новой переменной примем $\xi=\nu_s-\nu'$. Тогда будем иметь

$$a_{120\ldots0\ldots} = -\frac{1}{r}\frac{16\pi^3e^2}{c^2h}\frac{\nu X\nu' X'}{2\pi i(\nu-\nu')+\gamma}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(2\pi r/c)(\nu'+\xi)\left(1-e^{-2\pi i t\xi}\right)d\xi}{2\pi i\xi}. \quad (67)$$

Этот интеграл может быть записан в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\sin(2\pi r\nu'/c)\cos(2\pi r\xi/c)+\cos(2\pi r\nu'/c)\sin(2\pi r\xi/c))(1-\cos 2\pi t\xi+i\sin 2\pi t\xi)\,d\xi}{2\pi i\xi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sin \frac{2\pi r\nu'}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{\xi} \cos \frac{2\pi r}{c} \xi (1 - \cos 2\pi t\xi) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \cos \frac{2\pi r\nu'}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{\xi} \sin \frac{2\pi r}{c} \xi \sin 2\pi t\xi +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \cos \frac{2\pi r\nu'}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \frac{2\pi r}{c} \xi (1 - \cos 2\pi t\xi) \frac{d\xi}{\xi} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi r\nu'}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \frac{2\pi r}{c} \xi \sin 2\pi t\xi \frac{d\xi}{\xi} .$$

Первые два интеграла явно равны нулю, ибо подынтегральные функции нечетны. Другие интегралы вычисляются сразу же по формулам

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin qx}{x} dx = \pi \ , \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin qx \cos px}{x} dx = \begin{cases} \pi & \text{при} \quad q > p, \\ 0 & \text{при} \quad q < p. \end{cases}$$

Таким образом находим, что интеграл в (67) равен

$$\begin{cases} 0 & \text{при} \quad r/c > t, \\ (1/2i)\, e^{2\pi i r\nu'/c} & \text{при} \quad t > r/c. \end{cases}$$

Подставляя значения интеграла в (67), получаем

$$a_{120\ldots0\ldots} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < r/c, \\ \dfrac{1}{r} \dfrac{8\pi^3 i e^2}{c^2 h} \dfrac{\nu X \nu' X'}{2\pi i (\nu - \nu') + \gamma} e^{2\pi i r\nu'/c} & \text{при} \quad t > r/c. \end{cases} \qquad (68)$$

Квадрат модуля $a_{1200\ldots}$ есть мера вероятности обнаружить второй атом возбужденным. Эта вероятность, следовательно, равна нулю, если $t < r/c$, т. е. пока не пройдет время, необходимое для того, чтобы свет, испущенный первым атомом, достиг второго. Вероятность того, что по истечении этого времени второй атом будет возбужден, есть

$$|a_{120\ldots0\ldots}|^2 = \frac{1}{r^2} \left[\frac{16\pi^3 e^2}{c^2 h} \nu X \nu' X' \right]^2 \frac{1}{4\pi^2 (\nu' - \nu) + \gamma^2} .$$

Отметим, что эта вероятность обратно пропорциональна квадрату расстояния r; таким образом, приходим к выводу, что теория дает правильные скорость распространения света и убывание интенсивности с расстоянием до источника света.

§ 10. Теория полос Липпмана

Полосы Липпмана возникают, когда свет отражается от зеркала, перпендикулярного направлению его распространения. Они представляют собой систему стоячих волн, образованных падающей и отраженной волнами. Нам нужно показать теперь, каким образом это явление объясняется в квантовой теории излучения.

Рассмотрим плоское зеркало S и два атома, причем один атом A испускает свет, а другой атом B — поглощает его. Положим, что A (источник света) находится очень далеко от зеркала, так что достигающие его волны являются почти плоскими. Напротив, атом B будем считать расположенным не очень далеко от зеркала, и покажем теперь, что вероятность возбуждения B периодически зависит от его расстояния до зеркала — точно так же, как в классической теории она определяется положением узлов и пучностей стоячих волн.

Упростим наши вычисления, предположив, что прямая линия AB (которую примем за ось x) перпендикулярна зеркалу. За начало координат возьмем пересечение этой линии с зеркалом; координаты атома A суть x, 0, 0, а координаты B — суть x', 0, 0 и, кроме того, $x \gg x'$. Как и в предыдущем разделе, предположим, что среднее время жизни атома A очень мало, а атома B — очень велико и что векторы $\mathbf{X}$ и $\mathbf{X}'$, определяющие вероятность перехода из состояния 2 в состояние 1 для обоих атомов, сводятся лишь к y-компонентам.

До сих пор мы всегда рассматривали излучение, заключенное в объеме Ω; в нашей задаче зеркало S удобно принять за одну из стенок, ограничивающих пространство Ω. Когда Ω становится бесконечным, стенка S остается фиксированной, а все другие удаляются в бесконечность.

Для каждой стоячей волны, формирующей поле излучения, плоскость S должна быть узловой. Поэтому ее y-компонента должна иметь вид

$$B_s = \frac{Y_s}{2^{1/2}} \left\{ \sin \left[\frac{2\pi\nu_s}{c} (\alpha_{sx}x + \alpha_{sy}y + \alpha_{sz}z) + \beta_s \right] - \right.$$
$$\left. - \sin \left[\frac{2\pi\nu_s}{c} (-\alpha_{sx}x + \alpha_{sy}y + \alpha_{sz}z) + \beta_s \right] \right\}, \qquad (70)$$

где $1/2^{1/2}$ — нормировочный множитель, Y_s есть y-компонента единичного вектора $\mathbf{A}_s$.

Теперь точно таким же методом, какой мы использовали при выводе (63), найдем совершенно аналогичное уравнение; оно может быть получено заменой в (63) величин $\mathbf{A}_s \sin \Gamma_s$ и $\mathbf{A}_s \sin \Gamma_s'$ на величины B_s и B_s', которые находятся при подстановке в (70) координат атомов A и B (x, 0, 0 и x', 0, 0). Вот эта формула:

$$a_{120\ldots0\ldots} = \frac{16\pi^3 e^2}{\Omega h} \nu\nu' \sum_s \frac{B_s X B_s X'}{\nu_s} \, \frac{1}{-2\pi i(\nu_s - \nu) + \gamma} \, \frac{1 - e^{-2\pi i(\nu_s - \nu')t}}{-2\pi i(\nu_s - \nu')}. \qquad (71)$$

Суммирование по s можно провести, как и в предыдущем разделе, усреднив сперва B_sB_s' по всем фазам и ориентациям компонент излучения. В итоге найдем следующую формулу, соответствующую (65):

$$\overline{B_sB_s'} = \frac{c}{8\pi\nu_s(x-x')}\sin\frac{2\pi\nu_s(x-x')}{c} - \frac{c}{8\pi\nu_s(x+x')}\sin\frac{2\pi\nu_s(x+x')}{c}. \tag{72}$$

Подставляя это выражение в (71), умножая на

$$(8\pi/c^3)\,\Omega\nu_s^2 d\nu_s$$

и интегрируя по ν_s, находим

$$a_{120\ldots0\ldots} = R^- - R^+; \tag{73}$$

здесь R^- и R^+ — два члена, равные правой части (68), куда вместо r подставлены соответственно $x - x'$ и $x + x'$, а именно

$$R^- = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \dfrac{x-x'}{c}, \\ \dfrac{1}{x-x'}\,\dfrac{8i\pi^3e^2}{c^2h}\,\dfrac{\nu X\nu' X'}{-2\pi i(\nu'-\nu)+\gamma}\,e^{2\pi i\nu'(x-x')/c} & \text{при } t > \dfrac{x-x'}{c}, \end{cases}$$
$$R^+ = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \dfrac{x-x'}{c}, \\ \dfrac{1}{x+x'}\,\dfrac{8i\pi^3e^2}{c^2h}\,\dfrac{\nu X\nu' X'}{-2\pi i(\nu'-\nu)+\gamma}\,e^{2\pi i\nu'(x+x')/c} & \text{при } t > \dfrac{x-x'}{c}. \end{cases} \tag{74}$$

Члены R^- и R^+, очевидно, описывают действие падающей и отраженной волн. Теперь рассмотрим времена $t > (x + x')/c$. В этом случае для R^- и R^+ имеют силу вторые выражения, и из (73) мы получаем

$$a_{120\ldots0\ldots} = \frac{8i\pi^3e^2}{c^2h}\,\frac{\nu X\nu' X'}{-2\pi i(\nu'-\nu)+\gamma}\left\{\frac{1}{x-x'}\,e^{2\pi i\nu'(x-x')/c} - \frac{1}{x+x'}\,e^{2\pi i\nu'(x+x')/c}\right\}. \tag{75}$$

Ясно, что это выражение достигает большого значения, когда оба экспоненциальных множителя имеют одну и ту же фазу. Условие равенства фаз

$$\frac{2\pi\nu'}{c}(x-x') = \frac{2\pi\nu'}{c}(x+x') - 2\pi n,$$

где n — целое число, дает

$$x' = \frac{n}{2}\,\frac{c}{\nu'} = n\,\frac{\lambda'}{2};$$

здесь $\lambda' = c/\nu'$ означает длину волны, соответствующую частоте ν'. Таким образом, видно, что те места, где вероятность возбуждения мала (темные полосы), представляют собой параллельные зеркалу плоскости, отстоя-

щие друг от друга на половину длины волны; подобным же образом находим, что места с большой вероятностью возбуждения (яркие полосы) являются плоскостями, расположенными посередине между двумя темными полосами. Можно сделать вывод, что результаты квантовой теории излучения описывают это явление точно так же, как и классическая теория интерференции.

§ 11. Теория эффекта Допплера

Изменение частоты света, испускаемого движущимся источником, весьма просто объясняется волновой теорией света. Однако и в теории световых квантов оно находит объяснение, также простое, хотя, по-видимому, и не совсем обычное; можно показать, что эффект Допплера следует из сохранения энергии и импульса в процессе излучения.

Рассмотрим атом A с двумя энергетическими уровнями W_1 и W_2; частота излучения покоящегося атома равна

$$\nu = (W_2 - W_1)/h.$$

Предположим теперь, что атом возбужден и движется со скоростью V; тогда его полная энергия равна

$$W_2 + \frac{1}{2} mV^2.$$

В данный момент времени при переходе в более низкое состояние атом испускает квант с частотой ν'. Отдача испущенного кванта приводит к слабому изменению скорости, которая после излучения становится V'; при этом энергия атома равна $W_1 + \frac{1}{2} mV'^2$. Из условия сохранения энергии находим, таким образом,

$$h\nu' = \left(W_2 + \frac{1}{2} mV^2\right) - \left(W_1 + \frac{1}{2} mV'^2\right) = h\nu + \frac{1}{2} m (V^2 - V'^2), \quad (76)$$

а закон сохранения импульса дает равенство

$$m\mathbf{V}' = m\mathbf{V} - \frac{h\nu'}{c};$$

здесь жирным шрифтом обозначены векторы. Возводя его в квадрат, получаем

$$m^2V'^2 = m^2V^2 + \frac{h^2\nu'^2}{c^2} - 2mV\frac{h\nu'}{c}\cos\theta,$$

где θ — угол между скоростью и направлением излучения. Из этого равенства и из соотношения (76) находим, пренебрегая членами порядка $1/c^2$,

$$\nu' = \nu\left(1 + \frac{V}{c}\cos\theta\right) \quad (77)$$

— классическую формулу для эффекта Допплера в нерелятивистском приближении.

Теперь же нам нужно разработать теорию эффекта Допплера на основе дираковской теории излучения. Мы увидим, что интерпретация эффекта Допплера в этой теории очень похожа на его объяснение при помощи световых квантов; этот эффект, по существу, является следствием изменений импульса, обусловленных отдачей излучаемого света. Во всех примерах, проанализированных нами до сих пор, использовалось приближение (45), которое получается в предположении, что область пространства, где движется электрон, настолько мала, что фазы Γ_s стоячих волн можно считать постоянными внутри ее. Это упрощение, как можно будет сейчас увидеть, становится незаконным, когда требуется, чтобы наша теория описывала бы также и импульсные свойства световых квантов. Поэтому в теории эффектов Допплера **и** Комптона фазы Γ_s нужно на самом деле считать переменными.

Упростим задачу, полагая, что излучающий атом состоит из протона (заряд e, масса m_1, координаты x_1, y_1, $z_1 \equiv \mathbf{X}_1$) и электрона (заряд $-e$, масса m_2, координаты x_2, y_2, $z_2 \equiv \mathbf{X}_2$). Функция Гамильтона системы, состоящей из этого атома и поля излучения, представляет собой очевидное обобщение (15), т. е.

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{r_2^2}{2m_2} + eV + \sum_s \left(\frac{1}{2} p_s^2 + 2\pi^2 \nu_s^2 q_s^2\right) -$$

$$- \frac{e}{m_1}\left(\frac{8\pi}{\Omega}\right)^{1/2} \sum_s (\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{p}_1) \sin \Gamma_{s1} + \frac{e}{m_2}\left(\frac{8\pi}{\Omega}\right)^{1/2} \sum_s (\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{p}_2) \sin \Gamma_{s2}.$$

В качестве новых координат возьмем теперь

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{m_1 \mathbf{X}_1 + m_2 \mathbf{X}_2}{m_1 + m_2}$$

и

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2$$

— координаты центра тяжести и относительные координаты двух частиц. Сопряженные с $\boldsymbol{\xi}$ и $\mathbf{X}$ импульсы равны

$$\boldsymbol{\eta} = M\dot{\boldsymbol{\xi}} \quad \text{и} \quad \mathbf{p} = m\left(\frac{\mathbf{p}_1}{m_1} - \frac{\mathbf{p}_2}{m_2}\right),$$

где $M = m_1 + m_2$ — полная масса атома, а $m = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ — приведенная масса.

Сделаем допущение, что размеры атома малы по сравнению с длиной волны. Тогда можно будет вместо Γ_{s1} и Γ_{s2} подставить

$$\Gamma_s = \frac{2\pi\nu_s}{c} (\alpha_s \cdot \boldsymbol{\xi}) + \beta_s \qquad (78)$$

— значение фазы в центре масс. После этого гамильтониан системы принимает вид

$$H = \frac{\eta^2}{2M} + \frac{p^2}{2m} + eV(\mathbf{X}) + \sum_s \left(\frac{1}{2} p_s^2 + 2\pi^2 \nu_s^2 q_s^2\right) - \\ - \frac{e}{m}\left(\frac{8\pi}{\Omega}\right)^{1/2} \sum_s (\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{p}) \sin \Gamma_s. \quad (79)$$

Последний член

$$\mathcal{H} = -\frac{e}{m}\left(\frac{8\pi}{\Omega}\right)^{1/2} \sum_s (\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{p}) \sin \Gamma_s \quad (80)$$

рассматриваем теперь как возмущение. Невозмущенный гамильтониан

$$H_0 = \frac{\eta^2}{2M} + \frac{p^2}{2m} + eV(\mathbf{X}) + \sum_s \left(\frac{1}{2} p_s^2 + 2\pi^2 \nu_s^2 q_s^2\right) \quad (81)$$

включает гамильтониан переносного движения центра тяжести (первый член); соответствующими собственными функциями являются

$$\Omega^{-1/2} e^{2\pi i (\eta_n \cdot \xi)/h}, \quad (82)$$

где $\Omega^{1/2}$ — нормировочный множитель; η_n представляет импульс атома, принимающий, по предположению, дискретные значения, поскольку атом может двигаться в конечном объеме Ω.

Второй и третий члены в H_0 дают гамильтониан внутренних координат атома с соответствующими им собственными функциями. Последний член в H_0 представляет собой гамильтониан компонент излучения, собственными функциями которых являются

$$u_{n_1} u_{n_2} \ldots u_{n_s} \ldots .$$

Собственные функции невозмущенной системы задаются произведением

$$\varphi_{nn'n_1 \ldots n_s \ldots} = \Omega^{-1/2} e^{2\pi i (\eta_n \cdot \xi)/h} u_{n'} u_{n_1} \ldots u_{n_s}, \quad (83)$$

а соответствующее собственное значение, как и в (34),— суммой

$$E_{nn'n_1 \ldots n_s \ldots} = \eta_n^2/2M + E_{n'} + h\nu_1 n_1 + \ldots + h\nu_s n_s + \ldots . \quad (84)$$

Вероятность состояния $nn'n_1 \ldots n_s \ldots$ определяется квадратом модуля величины

$$a_{nn'n_1 \ldots n_s \ldots}.$$

Коэффициенты a, согласно общей формуле (26), удовлетворяют дифференциальным уравнениям, аналогичным (47):

$$\dot{a}_{nn'n_1 \ldots n_s \ldots} = \frac{2\pi i}{h} \sum_{mm'm_1 \ldots m_s \ldots} a_{mm'm_1 \ldots m_s \ldots} \mathcal{H}_{nn' \ldots;\, mm' \ldots} e^{2\pi i (E_{mm' \ldots} - E_{nn' \ldots}) t/h}, \quad (85)$$

где $\mathcal{H}_{nn'\ldots;\,mm'\ldots}$ представляет, в соответствии с (27), матричный элемент энергии возмущения (80), который отвечает переходу из состояния с индексами m, m', m_1, ... в состояние n, n', n_1, ..., т. е.

$$\mathcal{H}_{nn'\ldots;\,mm'\ldots} = \int \ldots \int \ldots \overline{\varphi}_{nn'\ldots} \mathcal{H} \varphi_{mm'\ldots}\, d\xi d\mathbf{X}\, dq_1 \ldots \tag{86}$$

Подставляя в (86) выражения (80) и (83), видим, что интеграл (86) может быть представлен в виде произведения интегралов. Для нас существен множитель, содержащий координаты ξ центра тяжести; если учесть (78), то этот множитель равен

$$\frac{1}{\Omega} \int e^{-2\pi i(\eta_n \cdot \xi)/h} \sin\left\{\frac{2\pi\nu_s}{c}(\alpha_s \cdot \xi) + \beta_s\right\} e^{2\pi i(\eta_m \cdot \xi)/h}\, d\xi, \tag{87}$$

где $d\xi$ — означает элемент объема. Выразим синус через экспоненты, после чего (87) принимает вид

$$\frac{e^{i\beta_s}}{2i\Omega} \int e^{(2\pi i/h)\,([\eta_m - \eta_n + (h\nu_s/c)\alpha_s]\cdot\xi)}\, d\xi - \frac{e^{-i\beta_s}}{2i\Omega} \int e^{(2\pi i/h)[\eta_m - \eta_n - (h\nu_s/c)\alpha_s]\xi}\, d\xi.$$

Обычно эти интегралы принимают значения очень близкие к нулю; они заметно отличаются от него только, если выполняется условие

$$\eta_m - \eta_n \pm (h\nu_s/c)\,\alpha_s = 0, \tag{88}$$

так как в этом случае одна из экспонент равна единице. Равенство (88) представляет собой условие сохранения импульсов, так как η_m и η_n — импульсы центра тяжести атома, а $(h\nu_s/c)\,\alpha_s$ — импульс излученного кванта. Двойной знак появляется вследствие того, что s-компонента поля излучения представляет стоячую волну, созданную двумя движущимися в противоположных направлениях волнами, причем направления заданы единичными векторами $+\alpha_s$ и $-\alpha_s$.

Таким образом, мы видим, что сохранение импульса в процессе испускания кванта следует из теории излучения. Помимо этого, из уравнения (85) вытекает и закон сохранения энергии, так как существенный вклад дают лишь члены с

$$E_{mm',\ldots} = E_{nn'\ldots}.$$

Но мы уже показывали, что формулы допплеровского изменения частоты можно вывести, предположив сохранение энергии и импульса. Следовательно, эти формулы могут быть выведены и из теории излучения. Из этой же теории можно было бы также вывести формулы для интенсивности в различных направлениях; результаты тождественны выводам классической теории.

§ 12. Рассеяние излучения на свободных электронах

Рассеяние излучения свободными электронами можно рассматривать в двух разных приближениях. Первое приближение приводит к классической формуле Томсона для интенсивности рассеянного излучения без изменения частоты, второе, в котором принимаются во внимание импульсы световых квантов,— к явлению комптон-эффекта. Кроме того, мы увидим, что анализ рассеяния, выполненный с помощью релятивистской волновой функции Дирака для электрона, заметно отличается от существующей нерелятивистской теории. В этом разделе будет рассматриваться только нерелятивистская теория.

Можно показать, что простое взаимодействие (16) излучения с электроном не приводит к рассеянию на свободных электронах, даже в первом приближении. Это связано с тем хорошо известным фактом, что вероятность спонтанного перехода свободного электрона между двумя состояниями n и m с различной скоростью движения равна нулю. Взаимодействие (16) подразумевает такие переходы, и поэтому его можно не учитывать в случае свободного электрона.

Взаимодействие, ответственное за рассеяние, описывается выражением (17), которым мы до сих пор пренебрегали, так как оно меньше (16), и становится существенным лишь тогда, когда эффект от взаимодействия (16) равен нулю. Пусть m и n суть два состояния (поступательного движения) свободных электронов. Соответствующие собственные функции можно записать в виде

$$\psi_n = \Omega^{-1/2} e^{2\pi i(\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{X})/h}, \qquad \psi_m = \Omega^{-1/2} e^{2\pi i(\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{X})/h}, \tag{89}$$

где $\mathbf{p}_n$ и $\mathbf{p}_m$ — импульсы электрона в состояниях n и m, а $\Omega^{-1/2}$ — нормировочный множитель.

Чтобы получить отличное от нуля рассеяние, нужно учесть взаимодействие (17). С помощью (12) этот член можно переписать в форме (18). Сначала следует вычислить соответствующие (18) матричные элементы, а затем подставить их в формулу, аналогичную (26), чтобы выяснить характер изменения коэффициентов a во времени. Подобные вычисления можно выполнить в двух различных приближениях. В первом приближении предполагается, что фазы Γ_s волн постоянны; это приближение приводит к простой томсоновской формуле для интенсивности рассеянного излучения и эквивалентно пренебрежению импульсными свойствами световых квантов. Чтобы получить теорию комптоновского сдвига длины волны, необходимо учитывать зависимость фаз Γ_s от координат. Пока ограничимся первым приближением и будем считать Γ_s постоянными.

С помощью соотношений (38) и (39) очень легко доказать, что матричный элемент $H^{(2)}$

$$H^{(2)}_{n,\, n_1,\, n_2 \ldots;\; m,\, m_1,\, m_2, \ldots}$$

отличен от нуля только в том случае, когда выполняются следующие условия:

а) $n = m$,

б) числа n_1, n_2, ... равны соответствующим индексам m_1, m_2..., кроме двух чисел, например n_s и n_σ,

в) $m_s = n_s \pm 1$ и $m_\sigma = n_\sigma \pm 1$ (знаки $\pm$ в этих выражениях не связаны друг с другом).

При выполнении этих условий получаем:

$$H^{(2)}_{n_s,\, n_\sigma;\; n_s \pm 1,\, n_\sigma \pm 1} = \frac{e^2 h\,(\mathrm{A}_s \cdot \mathrm{A}_\sigma)}{\pi m \Omega}\,\frac{\sin\Gamma_s \sin\Gamma_\sigma}{(\nu_s \nu_\sigma)^{1/2}} \left| \begin{matrix} (n_s+1)^{1/2} \\ n_s^{1/2} \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} (n_\sigma+1)^{1/2} \\ n_\sigma^{1/2} \end{matrix} \right|, \quad (90)$$

где в последних двух сомножителях верхнее или нижнее выражение должно выбираться в зависимости от того, $+$ или $-$ берется в индексах $n_s \pm 1$ или $n_\sigma \pm 1$. Подставив эти матричные элементы в основную формулу (26), получим для коэффициентов a следующие дифференциальные уравнения:

$$\dot{a}_{n, n_1,\, n_s \ldots n_\sigma \ldots} = \frac{2ie^2}{m\Omega} \sum_{s\sigma} \frac{(\mathrm{A}_s \cdot \mathrm{A}_\sigma)}{(\nu_s \nu_\sigma)^{1/2}} \sin\Gamma_s \sin\Gamma_\sigma \times$$

$$\times \{ a_{nn_1 \ldots n_s+1 \ldots, n_\sigma+1 \ldots} [(n_s+1)(n_\sigma+1)]^{1/2} e^{-2\pi i(\nu_s+\nu_\sigma)t} + a_{nn_1 \ldots n_s-1 \ldots, n_\sigma+1 \ldots} \times$$

$$\times [n_s(n_\sigma+1)]^{1/2} e^{+2\pi i(\nu_s-\nu_\sigma)t} + a_{nn_1 \ldots n_s+1 \ldots n_\sigma-1 \ldots} [(n_s+1)n_\sigma]^{1/2} e^{-2\pi i(\nu_s-\nu_\sigma)t} +$$

$$+ a_{nn_1 \ldots n_s-1 \ldots n_\sigma-1 \ldots} [n_s n_\sigma]^{1/2} e^{+2\pi i(\nu_s+\nu_\sigma)t} \}. \quad (91)$$

Чтобы найти интенсивность рассеянного света, положим, что в момент $t = 0$

$$a_{n,0,0,\ldots n_s \ldots 0_\sigma \ldots} = 1, \quad (92)$$

а все остальные a равны нулю. Физически это означает наличие некоторого количества излучения в поле; это первичное излучение имеет частоту ν_s и плотность энергии

$$W_s = n_s h \nu_s / \Omega. \quad (93)$$

Нам нужно определить интенсивность излучения, рассеянного с переходом в компоненту σ. Вероятность рассеяния с переходом в компоненту излучения σ дается квадратом модуля величины

$$a_{n,\, 0, \ldots n_s-1, \ldots 1_\sigma \ldots}.$$

Если ограничиться очень малыми временами t, то в первом приближении еще можно предполагать справедливость (92) и получить, таким образом, из уравнения (91)

$$\dot{a}_{n,0\ldots n_s-1,\ldots 1_\sigma\ldots} = -\frac{2ie^2}{m\Omega}\{(\mathbf{A}_s\cdot\mathbf{A}_\sigma)\frac{\sin\Gamma_s\sin\Gamma_\sigma}{(\nu_s\nu_\sigma)^{1/2}}n_s^{1/2}e^{-2\pi i(\nu_s-\nu_\sigma)t}, \tag{94}$$

поскольку только третий член в фигурных скобках дает результат, отличный от нуля. Интегрирование по времени при начальном условии

$$a_{n,|0,\ldots n_s-1,\ldots 1_\sigma\ldots} = 0 \quad \text{при } t = 0$$

дает

$$a_{n\ldots n_s-1\ldots 1_\sigma\ldots} = \frac{e^2}{\pi m\Omega}\frac{(\mathbf{A}_s\cdot\mathbf{A}_\sigma)\sin\Gamma_s\sin\Gamma_\sigma}{(\nu_s\nu_\sigma)^{1/2}}n_s^{1/2}\frac{e^{-2\pi i(\nu_s-\nu_\sigma)t}-1}{\nu_s-\nu_\sigma}.$$

Квадрат модуля этого выражения и есть вероятность рассеяния кванта с переходом в компоненту σ, т. е.

$$\frac{4e^4}{\pi^2m^2\Omega^2}\frac{(\mathbf{A}_s\cdot\mathbf{A}_\sigma)^2\sin^2\Gamma_s\sin^2\Gamma_\sigma}{\nu_s\nu_\sigma}n_s\frac{\sin^2\pi(\nu_s-\nu_\sigma)t}{(\nu_s-\nu_\sigma)^2}.$$

Просуммировав по индексу σ, получим вероятность рассеяния кванта с переходом в любую компоненту излучения. Эту сумму можно преобразовать в интеграл методом, подобным описанному в разделе 8. Сначала подставим вместо $(\mathbf{A}_s\cdot\mathbf{A}_\sigma)^2$, $\sin^2\Gamma_s$, $\sin^2\Gamma_\sigma$ их средние значения 1/3, 1/2, 1/2, а затем умножим на число компонент излучения $(8\pi/c^3)\,\Omega\nu_\sigma^2 d\nu_\sigma$ с частотами между ν_σ и $\nu_\sigma + d\nu_\sigma$ и проинтегрируем по ν_σ; тогда получим

$$\frac{8}{3\pi}\frac{e^4}{c^3m^2}\frac{n_s}{\Omega\nu_s}\int_0^\infty \nu_\sigma\frac{\sin^2\pi(\nu_s-\nu_\sigma)t}{(\nu_s-\nu_\sigma)^2}d\nu_\sigma.$$

Вычислим этот интеграл, замечая, что главный вклад дают значения ν_σ в непосредственной близости к ν_s, т. е. $\nu_\sigma = \nu_s$. (Рассеянное излучение имеет ту же частоту, что и падающий свет). Поэтому пределы интегрирования можно распространить от $-\infty$ до $+\infty$ и заменить под интегралом ν_σ на ν_s. С помощью формулы

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 kx}{x^2}dx = \pi k \tag{95}$$

получим

$$N = \frac{8\pi}{3}\frac{e^4}{c^3m^2}\frac{n_s}{\Omega}t \tag{96}$$

— число квантов, рассеянных за время t. Энергия рассеянного излучения равна

$$h\nu_s N = \frac{8\pi}{3}\frac{e^4}{c^3m^2}W_s t. \tag{97}$$

Это выражение совпадает с известной формулой, выведенной Томсоном на основе классической теории излучения.

Таким образом, в использованном приближении теория совершенно не объясняет комптоновский сдвиг длины волны, обусловленный импульсом световых квантов. Теорию эффекта Комптона можно сформулировать, вычислив матричный элемент

$$H^{(2)}_{n, n_1, \ldots; m, m_1, \ldots}, \tag{98}$$

не предполагая, как делалось до сих пор, что фазы компонент излучения в пространстве, занимаемом электроном, могут считаться постоянными. Из формулы (18) и выражений (89) для собственных функций электрона видно, что в матричном элементе (98) зависящим от x, y, z множителем является

$$(1/\Omega) \int e^{-2\pi i(\mathrm{p}_m \cdot \mathrm{X})/h} \sin \Gamma_s \sin \Gamma_\sigma e^{+2\pi i(\mathrm{p}_n \cdot \mathrm{X})/h} \, dx dy dz. \tag{99}$$

Запишем синусы через экспоненты, имея в виду, что

$$\Gamma_s = \frac{2\pi\nu_s}{c} (\boldsymbol{\alpha}_s \cdot \mathrm{X}) + \beta_s, \qquad \Gamma_\sigma = \frac{2\pi\nu_\sigma}{c} (\boldsymbol{\alpha}_\sigma \cdot \mathrm{X}) + \beta_\sigma;$$

как видно, выражение (99) распадается на сумму членов типа

$$\pm \frac{e^{\pm i\beta_s \pm i\beta_\sigma}}{4\Omega} \int e^{2\pi i([\mathrm{p}_m - \mathrm{p}_n \pm (h\nu_s/c)\boldsymbol{\alpha}_s \pm (h\nu_\sigma/c)\boldsymbol{\alpha}_\sigma] \mathrm{X})} \, dx dy dz.$$

Если в экспоненте коэффициент при X заметно отличен от нуля, то этот интеграл по объему Ω обращается в нуль, поскольку экспонента является быстроменяющейся функцией с нулевым средним значением. Отличным от нуля интеграл оказывается только в том случае, когда этот показатель практически равен нулю, т. е.

$$\mathrm{p}_m - \mathrm{p}_n \pm \frac{h\nu_s}{c} \boldsymbol{\alpha}_s \pm \frac{h\nu_\sigma}{c} \boldsymbol{\alpha}_\sigma = 0. \tag{100}$$

Это соотношение есть просто условие сохранения импульса. Двойные знаки связаны с тем фактом, что стационарная волна представляет суперпозицию двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях.

Учет сохранения импульса позволяет вывести комптоновское изменение длины волны — методом, совершенно аналогичным тому, который используется при обычном рассмотрении комптон-эффекта. Однако здесь мы не будем вдаваться в детали такой теории, из которой можно получить в нерелятивистском приближении даже формулы для интенсивности излучения.

Часть II

ТЕОРИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ И ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДИРАКА

Во второй части данной работы мы сначала покажем, как можно вывести основные формулы предыдущего раздела, если вместо уравнения Шредингера взять за основу релятивистское волновое уравнение Дирака для электрона. Вслед за этим будет изучена весьма своеобразная роль, которую играют характерные для дираковской теории электрона состояния с отрицательной энергией в теории рассеяния света на свободных электронах. Помимо этого, будет обсуждаться возможность радиационных переходов из состояний с положительной энергией в состояния с отрицательной энергией электрона Дирака. Конечно, подобные переходы в действительности не происходят, и тем не менее в какой-то мере интересно посмотреть, каким образом они возникают в данной теории, так как правильная теория должна найти пути для их устранения.

§ 13. Волновая функция Дирака для электрона

В этом разделе собраны некоторые формулы, относящиеся к волновой функции Дирака, которые потребуются в дальнейшем.

Известно, что в релятивистской теории Дирака электрон в данный момент времени характеризуется четырьмя координатами. Три из них, x, y, z, являются обычными пространственными координатами, а четвертая, σ, описывает некоторую внутреннюю степень свободы; мы будем называть σ спиновой координатой. В то время как координаты x, y, z непрерывно изменяются во всей области от $-\infty$ до $+\infty$, спиновая координата σ может принимать всего лишь четыре значения; без ограничения общности назовем эти четыре значения 1, 2, 3, 4. Волновая функция будет зависеть от x, y, z, σ:

$$\psi = \psi(x, y, z, \sigma). \tag{101}$$

Так как набор значений переменной σ ограничен, часто оказывается более удобным писать ее в виде индекса

$$\psi = \psi_\sigma(x, y, z). \tag{102}$$

Таким образом, волновая функция представляется набором четырех функций $\psi_1(x, y, z)$, $\psi_2(x, y, z)$, $\psi_3(x, y, z)$, $\psi_4(x, y, z)$ одних только пространственных координат.

В дираковской теории электрона нужно рассматривать два типа операторов. Операторы первого рода действуют на зависимость ψ от пространственных координат, например:

$$x^2, xy, p_x = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}, \ldots .$$

Операторы второго рода действуют на зависимость ψ от σ. Наиболее общим типом линейного оператора этого рода является линейная перестановка четырех функций ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4. Поэтому такие операторы представляются матрицами, имеющими по четыре строки и четыре столбца. Мы будем иметь дело главным образом с четырьмя операторами подобного рода, а именно:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_x &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma_y = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \\ \gamma_z &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{103}$$

Действие оператора γ_x, например, на собственную функцию $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$ состоит в превращении ее в $\gamma_x\psi = (\psi_4, \psi_3, \psi_2, \psi_1)$. Подобным же образом

$$\begin{aligned} \gamma_y\psi &= (-i\psi_4, i\psi_3, -i\psi_2, i\psi_1), \\ \gamma_z\psi &= (\psi_3, -\psi_4, \psi_1, -\psi_2); \\ \delta\psi &= (\psi_1, \psi_2, -\psi_3, -\psi_4). \end{aligned} \tag{104}$$

Матрицы γ и δ удовлетворяют известным соотношениям

$$\begin{aligned} \gamma_x^2 = \gamma_y^2 = \gamma_z^2 = \delta^2 = 1, \\ \gamma_y\gamma_z + \gamma_z\gamma_y = 0 \text{ и аналогичным ему}, \\ \gamma_x\delta + \delta\gamma_x = 0 \text{ и аналогичным ему}. \end{aligned}$$

Для краткости мы весьма часто будем обозначать γ_x, γ_y, γ_z как q-вектор (т. е. вектор, компонентами которого являются q-числа) $\boldsymbol{\gamma}$. Как известно, можно считать, что γ_x, γ_y, γ_z, $c\delta$ преобразуются как четыре компоненты 4-вектора, а наш вектор $\boldsymbol{\gamma}$ представляет его пространственную компоненту.

Запишем теперь известный релятивистский гамильтониан Дирака для электрона в такой форме:

$$W = eV - c\left[\boldsymbol{\gamma}\cdot\left(\mathbf{p} - \frac{e\mathbf{U}}{c}\right)\right] - mc^2\delta. \tag{105}$$

Произведение, включающее $\boldsymbol{\gamma}$, есть обычное скалярное произведение, V и $\mathbf{U}$ — скалярный и векторный потенциалы.

Соответствующее гамильтониану (105) уравнение Шредингера можно получить, записывая в явном виде уравнения для функций ψ_1, ψ_2, ψ_3,

ψ_4. Вспоминая смысл операторов, содержащихся в формуле (105), получаем следующие четыре уравнения:

$$(mc^2 + W - eV)\,\psi_1 = -\frac{ch}{2\pi i}\left[\frac{\partial\psi_4}{\partial x} - i\frac{\partial\psi_4}{\partial y} + \frac{\partial\psi_3}{\partial z}\right] + e\left[(U_x - iU_y)\,\psi_4 + U_z\psi_3\right], \tag{106а}$$

$$(mc^2 + W - eV)\,\psi_2 = -\frac{ch}{2\pi i}\left[\frac{\partial\psi_3}{\partial x} + i\frac{\partial\psi_3}{\partial y} - \frac{\partial\psi_4}{\partial z}\right] + e\left[(U_x + iU_y)\,\psi_3 - U_z\psi_4\right], \tag{106б}$$

$$(-mc^2 + W - eV)\,\psi_3 = -\frac{ch}{2\pi i}\left[\frac{\partial\psi_2}{\partial x} - i\frac{\partial\psi_2}{\partial y} + \frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right] + e\left[(U_x - iU_y)\,\psi_2 + U_z\psi_1\right], \tag{106в}$$

$$(-mc^2 + W - eV)\,\psi_4 = -\frac{ch}{2\pi i}\left[\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + i\frac{\partial\psi_1}{\partial y} - \frac{\partial\psi_2}{\partial z}\right] + e\left[(U_x + iU_y)\,\psi_1 - U_z\psi_2\right]. \tag{106г}$$

Как можно показать, несимметричность этих уравнений является всего лишь кажущейся и каким-то образом возникает вследствие того, что спиновая координата была связана с осью z, которая вследствие этого оказалась до некоторой степени выделенной.

Энергия W включает в себя внутреннюю энергию электрона mc^2 и принимает поэтому значения, близкие к mc^2. Как известно, гамильтониан (105) помимо этих «нормальных» собственных значений имеет также и «аномальные», лежащие вблизи величины $-mc^2$. Эти отрицательные собственные значения, которые, естественно, для электрона никакого физического смысла не имеют, в какой-то мере должны были бы отвечать состояниям электрона с отрицательной массой. Предполагается, что они связаны с ошибкой либо в самой теории, либо в ее интерпретации, но все попытки исправления теории, которые делались до настоящего времени, не могут считаться успешными. В следующих разделах станет ясной важность отрицательных состояний при интерпретации реальных явлений, например, рассеяния света. Любая теория, которая попыталась бы избавиться от отрицательных состояний, просто их отбросив, должна была бы сделать это очень осторожно, чтобы не устранить при этом рассеивающие свойства электрона.

Теперь нам нужно ненадолго заняться некоторыми свойствами нормальных состояний с положительной энергией. Поскольку энергия лежит поблизости mc^2, ее удобнее записать в виде

$$W = mc^2 + E, \tag{107}$$

где E — обычная энергия без члена, описывающего внутреннюю энергию.

Ради простоты пренебрежем в уравнениях (106) членами, которые зависят от векторного потенциала U. Тогда увидим, что в уравнениях (106а) и (106б) коэффициент при ψ_1 и ψ_2 очень велик $(2mc^2 + E - eV)$, в то время как ψ_3 и ψ_4 в левых частях уравнений (106в) и (106г) имеют гораздо меньший коэффициент $(E - eV)$. Этот факт приводит к выводу, что ψ_1 и ψ_2 существенно меньше ψ_3 и ψ_4. Пренебрегая в первом нерелятивистском приближении $E - eV$ по сравнению с mc^2, из уравнений (106а) и (106б) находим

$$\psi_1 = \frac{ih}{4\pi mc}\left(\frac{\partial\psi_4}{\partial x} - i\frac{\partial\psi_4}{\partial y} + \frac{\partial\psi_3}{\partial z}\right),$$
$$\psi_2 = \frac{ih}{4\pi mc}\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial x} + i\frac{\partial\psi_3}{\partial y} - \frac{\partial\psi_4}{\partial z}\right) \quad (108)$$

(как видно из этих уравнений, малость ψ_1 и ψ_2 по сравнению с ψ_3 и ψ_4 характеризуется множителем порядка v/c). Подставим (108) в уравнения (106в) и (106г), по-прежнему полагая потенциалы U равными нулю, и получим для ψ_3 и ψ_4 обычное уравнение Шредингера

$$(E - eV)\psi_3 + \frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta\psi_3 = 0, \qquad (E - eV)\psi_4 + \frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta\psi_4 = 0. \quad (109)$$

Таким образом, мы видим, что в нерелятивистском приближении ψ_3 и ψ_4 являются собственными функциями обычной задачи Шредингера и отвечают одному и тому же собственному значению. Поэтому в отсутствие вырождения в такой задаче ψ_3 и ψ_4 могут отличаться лишь постоянным множителем от нормированной собственной функции, соответствующей собственному значению E в уравнении Шредингера:

$$(E - eV)w + \frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta w = 0. \quad (110)$$

Можно, например, выбрать либо

$$\psi_3 = w, \qquad \psi_4 = 0,$$

либо

$$\psi_3 = 0, \qquad \psi_4 = w.$$

Эти решения отвечают двум возможным ориентациям спина относительно оси z. Из этих выражений для ψ_3 и ψ_4 и из соотношений (108) получаем окончательное выражение для четырех компонент ψ в следующей форме:

$$\psi_\alpha = \left[\frac{ih}{4\pi mc}\frac{\partial w}{\partial z},\ \frac{ih}{4\pi mc}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + i\frac{\partial w}{\partial y}\right),\ w,\ 0\right],$$
$$\psi_\beta = \left[\frac{ih}{4\pi mc}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - i\frac{\partial w}{\partial y}\right),\ -\frac{ih}{4\pi mc}\frac{\partial w}{\partial z},\ 0,\ w\right]; \quad (111)$$

здесь ψ_α и ψ_β — собственные функции, соответствующие двум ориентациям спина.

Нам предстоит теперь написать выражения точной волновой функции Дирака для случая, когда на электрон никакие силы не действуют ($V = 0$, $\mathfrak{U} = 0$), а компоненты импульса p_x, p_y, p_z, следовательно, являются константами. Соответственно этим значениям компонент импульса, ψ должна содержать пространственные координаты x, y, z в экспоненциальном множителе $e^{2\pi i(p_x x+p_y y+p_z z)/h}$. По этой причине четыре компоненты ψ будут произведениями этого множителя и четырех констант B_1, B_2, B_3, B_4:

$$\psi = [B_1, B_2, B_3, B_4]\, e^{2\pi i(p_x x+p_y y+p_z z)/h}. \tag{112}$$

Поставив это выражение для ψ в (105) и приняв $V = 0$, $\mathfrak{U} = 0$, получим для констант B следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} (mc^2 + W)\, B_1 + c\,(p_x - ip_y)\, B_4 + cp_z B_3 &= 0,\\ (mc^2 + W)\, B_2 + c\,(p_x + ip_y)\, B_3 - cp_z B_4 &= 0,\\ (-mc^2 + W)\, B_3 + c\,(p_x - ip_y)\, B_2 + cp_z B_1 &= 0,\\ (-mc^2 + W)\, B_4 + c\,(p_x + ip_y)\, B_1 - cp_z B_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{113}$$

Легко показать, что решения этих линейных уравнений не обращаются тождественно в нуль лишь в случае, когда

$$W^2 = m^2c^4 + c^2p^2,$$

т. е. когда

$$W = \pm\,(m^2c^4 + c^2p^2)^{1/2}. \tag{114}$$

Это обычное релятивистское соотношение между энергией и импульсом. Знак «+» соответствует обычным положительным значениям энергии; знак «—» — аномальным, отрицательным. Для каждого из двух значений энергии (114) существует два линейно независимых решения системы (113), которые отвечают двум возможным ориентациям спина. Их можно написать в форме

$$\left.\begin{aligned} [B_1, B_2, B_3, B_4] &= \left(1 + \frac{c^2p^2}{(mc^2+W)^2}\right)^{-1/2}\left[-\frac{cp_z}{mc^2+W},\ -\frac{c\,(p_x+ip_y)}{mc^2+W},\ 1,\ 0\right],\\ [B_1, B_2, B_3, B_4] &= \left(1 + \frac{c^2p^2}{(mc^2+W)^2}\right)^{-1/2}\left[\frac{c\,(p_x-ip_y)}{mc^2+W},\ \frac{cp_z}{mc^2+W},\ 0,\ 1\right] \end{aligned}\right\} \tag{115а}$$

для положительных значений энергии, а для отрицательных —

$$\left.\begin{aligned} [B_1, B_2, B_3, B_4] &= \left(1 + \frac{c^2p^2}{(mc^2-W)^2}\right)^{-1/2}\left[1,\ 0,\ \frac{cp_z}{mc^2-W},\ \frac{c\,(p_x+ip_y)}{mc^2-W}\right],\\ [B_1, B_2, B_3, B_4] &= \left(1 + \frac{c^2p^2}{(mc^2-W)^2}\right)^{-1/2}\left[0,\ 1,\ \frac{c\,(p_x-ip_y)}{mc^2-W},\ -\frac{cp_z}{mc^2-W}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{115б}$$

Нормировочные множители $[1 + c^2p^2/(mc^2 \pm W)^2]^{-1/2}$ выбраны так, чтобы сумма квадратов модулей величин B равнялась единице. При обращении в нуль импульса р константы B принимают очень простой вид:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}[B_1\ B_2\ B_3\ B_4] = [0\ \ 0\ \ 1\ \ 0] \\ [B_1\ B_2\ B_3\ B_4] = [0\ \ 0\ \ 0\ \ 1]\end{array}\right\} \quad W = +mc^2, \\ \left.\begin{array}{l}[B_1\ B_2\ B_3\ B_4] = [1\ \ 0\ \ 0\ \ 0] \\ [B_1\ B_2\ B_3\ B_4] = [0\ \ 1\ \ 0\ \ 0]\end{array}\right\} \quad W = -mc^2. \end{array}\right\} \tag{115в}$$

§ 14. Теория излучения в нерелятивистском приближении

Ограничимся случаем, когда электрон нашего атома находится в электростатическом силовом поле и единственными неэлектростатическими силами являются силы, обусловленные полем излучения. Поэтому в гамильтониане (105) можно положить, что V не зависит от времени и описывает электростатический потенциал атома, в то время как $\mathbf{U}$ обращается в нуль, если пренебречь взаимодействием атома и поля излучения; если это взаимодействие учитывается, то для $\mathbf{U}$ берется выражение векторного потенциала излучения (12). Гамильтониан электрона (105) приобретает тогда форму

$$eV - c(\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p}) - mc^2\delta + ec\left(\frac{8\pi}{\Omega}\right)^{1/2}\sum_s(\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{A}_s)\,q_s\sin\Gamma_s, \tag{116}$$

где последний член описывает влияние поля излучения.

Гамильтонову функцию сложной системы, состоящей из атома и поля излучения, получим, добавляя в (116) гамильтониан поля (11):

$$H = eV - e(\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p}) - mc^2\delta + \sum_s\left(\frac{p_s^2}{2} + 2\pi^2\nu_s^2q_s^2\right) + ec\left(\frac{8\pi}{\Omega}\right)^{1/2}\sum_s(\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{A}_s)\,q_s\sin\Gamma_s\,. \tag{117}$$

Гамильтониан (117) можно разбить на сумму невозмущенного гамильтониана

$$H_0 = eV - c(\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p}) - mc^2\delta + \sum_s\left(\frac{p_s^2}{2} + 2\pi^2\nu_s^2q_s^2\right) \tag{118}$$

и возмущающего члена

$$\mathcal{H} = ec\left(\frac{8\pi}{\Omega}\right)^{1/2}\sum_s(\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{A}_s)\,q_s\sin\Gamma_s, \tag{119}$$

который описывает энергию взаимодействия.

Собственные функции невозмущенной задачи, описываемой H_0, записать легко, поскольку H_0 является суммой члена, содержащего только координаты электрона, и слагаемых, каждое из которых включает только переменные q_s, p_s s-й компоненты излучения. Поэтому, как и в формуле (31), невозмущенные собственные функции представляют собой произведения собственных функций атома и осцилляторов поля излучения:

$$\varphi_{nn_1n_2\ldots n_s\ldots} = u_n u_{n_1} u_{n_2} \ldots u_{n_s} \ldots; \tag{120}$$

символы здесь те же, что и в (31).

Теперь нужно вычислить матричные элементы возмущения (119)

$$\mathcal{H}_{nn_1n_2\ldots n_s\ldots;\; mm_1m_2\ldots m_s\ldots}.$$

Их вычисление, практически идентичное выводу равенства (41), показывает, что не обращаются тождественно в нуль только матричные элементы

$$\mathcal{H}_{nn_1n_2\ldots n_s\ldots;\; mn_1n_2\ldots n_s\pm 1\ldots} = ec\left(\frac{h}{\pi\Omega}\right)^{1/2}\frac{1}{\nu_s^{1/2}}(\mathbf{D}_{snm}\cdot\mathbf{A}_s)\Big|_{n_s^{1/2}}^{(n_s+1)^{1/2}}, \tag{121}$$

где верхнее или нижнее выражение в последнем множителе выбирается соответственно двум возможностям: $m_s = n_s + 1$ или $m_s = n_s - 1$. Вектор $\mathbf{D}_{snm}$ имеет следующий смысл:

$$\mathbf{D}_{snm} = \int \bar{u}_n \boldsymbol{\gamma} \sin\Gamma_s u_m \, d\omega; \tag{122}$$

здесь интегрирование должно распространяться на все конфигурационное пространство электрона (т. е. интегрирование по пространственным координатам x, y, z от $-\infty$ до $+\infty$ и суммирование по четырем значениям спиновой переменной).

Выражение $\mathbf{D}_{snm}$ можно сильно упростить, предположив, что размеры атома гораздо меньше длины волны. В этом случае $\sin\Gamma_s$ можно считать постоянным по всему пространству, занимаемому атомом, и вынести его из-под знака интеграла (122); тогда

$$\mathbf{D}_{snm} = \sin\Gamma_s \int \bar{u}_n \boldsymbol{\gamma} u_m \, d\omega = \sin\Gamma \boldsymbol{\gamma}_{nm}, \tag{123}$$

где $\boldsymbol{\gamma}_{nm}$ — матричный элемент оператора $\boldsymbol{\gamma}$.

Последний множитель вычислим в нерелятивистском приближении (111) для собственных функций. Сначала возьмем для u_n и u_m собственные функции типа ψ_α (спин в положительном направлении z); имеем

$$u_m = \left[\frac{ih}{4\pi mc}\frac{\partial w_m}{\partial z},\; \frac{ih}{4\pi mc}\left(\frac{\partial w_m}{\partial x} + i\frac{\partial w_m}{\partial y}\right),\; w_m,\; 0\right].$$

Теперь найдем x-компоненту вектора (123); вспоминая смысл γ_x, получаем

$$\gamma_x u_m = \left[0,\ w_m,\ \frac{ih}{4\pi mc}\left(\frac{\partial w_m}{\partial x} + i\frac{\partial w_m}{\partial y}\right),\ \frac{ih}{4\pi mc}\frac{\partial w_m}{\partial z}\right].$$

Кроме того,

$$\bar{u}_n = \left[-\frac{ih}{4\pi mc}\frac{\partial w_n}{\partial z},\ -\frac{ih}{4\pi mc}\left(\frac{\partial w_n}{\partial x} - i\frac{\partial w_n}{\partial y}\right),\ w_n,\ 0\right].$$

Суммируя произведения соответствующих четырех компонент из двух последних выражений и интегрируя по всему объему, получаем интеграл $\int \bar{u}_n \gamma_x u_m d\omega$. Имеем

$$\int \bar{u}_n \gamma_x u_m \, d\omega = -\frac{ih}{4\pi mc}\int\left(w_m \frac{\partial w_n}{\partial x} - w_n \frac{\partial w_m}{\partial x}\right) d\tau -$$
$$-\frac{h}{4\pi mc}\int\left(w_m \frac{\partial w_n}{\partial y} + w_n \frac{\partial w_m}{\partial y}\right) d\tau = \frac{ih}{2\pi mc}\int w_n \frac{\partial w_m}{\partial x} d\tau -$$
$$-\frac{ih}{4\pi mc}\int \frac{\partial}{\partial x}(w_n w_m)\, d\tau - \frac{h}{4\pi mc}\int \frac{\partial}{\partial y}(w_n w_m)\, d\tau.$$

По теореме Грина последние два интеграла можно преобразовать в интегралы по бесконечно удаленной поверхности; в силу очень быстрого убывания w_n и w_m эти интегралы обращаются в нуль. Поэтому получаем

$$\int \bar{u}_n \gamma_x u_m \, d\omega = \frac{ih}{2\pi mc}\int w_n \frac{\partial w_m}{\partial x} d\tau.$$

Вычислив подобным же методом y- и z-компоненты, получим в векторной форме

$$\int \bar{u}_n \boldsymbol{\gamma} u_m \, d\omega = \frac{ih}{2\pi mc}\int w_n \operatorname{grad} w_m \, d\tau. \tag{124}$$

Это соотношение показывает сходство оператора $\boldsymbol{\gamma}$ теории Дирака и выражения $-\mathbf{p}/mc = -\mathbf{v}/c$ в теории Шредингера (вспомним, что $\mathbf{p} \sim \sim [h/2\pi i]$ grad).

Учитывая, что функции u в соотношении (42) являются собственными функциями Шредингера и потому отвечают нашим функциям w, получаем далее из (42):

$$\int \bar{u}_n \boldsymbol{\gamma} u_m \, d\omega = (2\pi i/c)\, \nu_{mn} \mathbf{X}_{nm}, \tag{125}$$

где $\mathbf{X}_{nm}$ — матричный элемент, представляющий радиус-вектор в шредингеровском приближении. Наконец, из соотношений (123) и (121) следует равенство

$$\mathcal{H}_{nn_1 \ldots n_s \ldots;\, mn_1 \ldots n \pm 1 \ldots} = 2\pi i e \left(\frac{h}{\pi\Omega}\right)^{1/2} \frac{\nu_{mn}}{\nu_s^{1/2}} (\mathbf{A}_s \cdot \mathbf{X}_{nm}) \left[\begin{matrix}(n_s+1)^{1/2} \\ n_s^{1/2}\end{matrix}\right] \sin \Gamma_s, \tag{126}$$

идентичное ранее выведенному равенству (46).

В данном нерелятивистском приближении, таким образом, результаты, полученные для теории излучения с помощью волновой функции Дирака, полностью тождественны соотношениям, которые были выведены в части I на основе шредингеровской функции.

Отметим, кроме того, что соотношение (125) было выведено в предположении одинаковой ориентации спинов состояний n и m. Если же их спины направлены противоположно, то результат равен нулю. На первый взгляд этот факт может показаться противоречивым, так как подразумевает отсутствие переходов между состояниями с противоположным направлением спинов; однако следует помнить допущение (с которым были проделаны вычисления) о невырожденности собственных функций задачи Шредингера. Это приводит к тому, что связь между спином и орбитальным движением отсутствует, как в s-термах. Наблюдаемые же изменения направления спина обусловлены только связью спина и орбиты, и если эта связь утрачивается, как в эффекте Пашена — Бака, то никаких изменений направления спина действительно не происходит.

§ 15. Теория Дирака и рассеяние на свободных электронах

Как уже было сказано, теория рассеяния света на свободных электронах представляет определенный интерес, ибо она очень ярко демонстрирует действительную важность состояний с отрицательной энергией даже для вполне реальных явлений, в которых эти таинственные состояния в явном виде не проявляются. Естественно, эту теорию можно построить либо в приближении, описывающем комптон-эффект, либо в приближении, дающем просто томсоновский коэффициент рассеяния без какого-либо изменения частоты. Так как существенные черты теории сохраняются и в случае, когда изменением частоты пренебрегается, то будем строить теорию в этом приближении (т. е. импульсные характеристики световых квантов учитывать не будем). Точная теория приводит к формуле Клейна — Нишины для интенсивности.

Когда мы игнорируем импульсные характеристики световых квантов, то вводим тем самым приближение, эквивалентное, как часто говорилось, предположению о постоянстве фазы света Γ_s в пространстве, занимаемом электроном. Можно также положить исчезающе малой скорость электрона в процессе рассеяния, поскольку отдача рассеянных квантов нами не учитывается. Поэтому собственные функции электрона можно взять в очень простой форме (115в), соответствующей нулевой скорости. Обозначим четыре состояния (115в) индексами 1, 2, 3, 4. Состояния 1, 2 отвечают положительной энергии $+mc^2$ и ориентациям спина соответственно в направлениях $+z$ и $-z$; состояния 3, 4 имеют отрицательную энергию $-mc^2$ и спин, направленный соответственно вдоль $+z$ и $-z$.

Будем предполагать, что вначале ($t = 0$) электрон находится в состоянии 1 и имеется n_s квантов s-компоненты излучения (падающее излуче-

ние). Поэтому можно положить, что

$$a_{1,0\ldots n_s,0\ldots}=1, \tag{127}$$

в то время как остальные a равны нулю. Чтобы определить количество излучения, переходящего при рассеянии в σ-компоненту, нужно найти значение $a_{1,0\ldots n_s-1,\ldots 1_\sigma\ldots}$ для момента времени t. Далее, соответствующий этому переходу матричный элемент возмущения будет равен нулю, поскольку обе компоненты излучения (s и σ) меняют свои квантовые числа. Следовательно, этот переход может осуществиться только через промежуточное состояние, которое может комбинировать как с начальным, так и с конечным состоянием. Легко видеть, что существует всего четыре таких состояния:

$$(3,\ n_s-1,\ 0),\quad (4,\ n_s-1,\ 0),\quad (3,\ n_s,\ 1),\quad (4,\ n_s,\ 1) \tag{128}$$

Ради краткости здесь указаны лишь квантовые числа электрона и компонент излучения s, σ. Состояния $(2,\ n_s-1,0)$ и $(2,\ n_s,\ 1)$ не должны учитываться, так как из определения сразу же следует, что $\gamma_{12}=0$, т. е. эти состояния не комбинируют с начальным.

В промежуточных состояниях (128) электрон обладает отрицательной энергией; без них процесс рассеяния был бы невозможен. Покажем теперь, что вычисленное с учетом промежуточных состояний (128) рассеяние действительно дает томсоновскую формулу для интенсивности.

Для этого напишем сначала матричные элементы, соответствующие переходу из начального состояния $(1,\ n_s,\ 0)$ в промежуточное (128) и из промежуточного в конечное $(1,\ n_s-1,\ 1)$. Из выражений (115в) сразу же находим

$$\left.\begin{aligned}\gamma_{x13}&=0, & \gamma_{y13}&=0, & \gamma_{z13}&=1,\\ \gamma_{x14}&=1, & \gamma_{y14}&=i, & \gamma_{z14}&=1.\end{aligned}\right\} \tag{129}$$

Перестановка индексов переводит каждую γ в комплексно сопряженную ей величину (например, $\gamma_{y41}=-i\gamma_{y14}$). Искомые матричные элементы получаем из соотношений (121), (123) и (129); для переходов из начальных состояний $(1,\ n_s,\ 0)$ в промежуточные (128) они таковы:

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{H}_{3,n_s-1,0;1,n_s,0}&=ec\left(\frac{h}{\pi\Omega}\right)^{1/2}\frac{\sin\Gamma_s}{\nu_s^{1/2}}A_{sz}n_s^{1/2},\\ \mathcal{H}_{4,n_s-1,0;1,n_s,0}&=ec\left(\frac{h}{\pi\Omega}\right)^{1/2}\frac{\sin\Gamma_s}{\nu_s^{1/2}}(A_{sx}-iA_{sy})\,n_s^{1/2},\\ \mathcal{H}_{3,n_s,1;1,n_s,0}&=ec\left(\frac{h}{\pi\Omega}\right)^{1/2}\frac{\sin\Gamma_\sigma}{\nu_\sigma^{1/2}}A_{\sigma z},\\ \mathcal{H}_{4,n_s,1;1,n_s,0}&=ec\left(\frac{h}{\pi\Omega}\right)^{1/2}\frac{\sin\Gamma_\sigma}{\nu_\sigma^{1/2}}(A_{\sigma x}-iA_{\sigma y}),\end{aligned}\right\} \tag{130}$$

а для переходов из промежуточного в конечное состояние $(1, n_s-1, 1)$:

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{H}_{1,\,n_s-1,\,1;\,3,\,n_s-1,\,0} &= ec\left(\frac{h}{\pi\Omega}\right)^{1/2}\frac{\sin\Gamma_\sigma}{\nu_\sigma^{1/2}}A_{\sigma z},\\
\mathcal{H}_{1,\,n_s-1,\,1;\,4,\,n_s-1,\,0} &= ec\left(\frac{h}{\pi\Omega}\right)^{1/2}\frac{\sin\Gamma_\sigma}{\nu_\sigma^{1/2}}(A_{\sigma x}+iA_{\sigma y}),\\
\mathcal{H}_{1,\,n_s-1,\,1;\,3,\,n_s,\,1} &= ec\left(\frac{h}{\pi\Omega}\right)^{1/2}\frac{\sin\Gamma_s}{\nu_s^{1/2}}A_{sz}n_s^{1/2},\\
\mathcal{H}_{1,\,n_s-1,\,1;\,4,\,n_s,\,1} &= ec\left(\frac{h}{\pi\Omega}\right)^{1/2}\frac{\sin\Gamma_s}{\nu_s^{1/2}}(A_{sx}+iA_{sy})\,n_s^{1/2}.
\end{aligned}\right\} \quad (131)$$

Эти матричные элементы и общая формула (26) позволяют легко вычислить амплитуды вероятности переходов в промежуточные состояния. Если ограничиться очень коротким интервалом времени, то равенство (127) можно считать все еще справедливым в первом приближении, и из уравнения (26) получим

$$\dot{a}_{3,\,n_s-1,\,0} = -\frac{2\pi i}{h}\mathcal{H}_{3,\,n_s-1,\,0;\,1,\,n_s,\,0}\,a_{1,\,n_s,\,0}e^{2\pi i(-2mc^2-h\nu_s)t/h}$$

(отметим очень большое изменение энергии при переходе электрона из состояния 1 с положительной энергией $+mc^2$ в состояние 3 с отрицательной энергией $-mc^2$). Полагая $a_{1,n_s,0}=1$ и учитывая соотношения (130), получаем

$$\dot{a}_{3,\,n_s-1,\,0} = -\frac{2\pi i}{h}ec\left(\frac{h}{\pi\Omega}\right)^{1/2}\frac{\sin\Gamma_s}{\nu_s^{1/2}}n_s^{1/2}A_{sz}e^{-2\pi i(2mc^2+h\nu_s)t/h};$$

интегрируя и отбрасывая в знаменателе $h\nu_s$ (как малую величину по сравнению с $2mc^2$), находим

$$a_{3,\,n_s-1,\,0} = \frac{e}{2mc}\left(\frac{h}{\pi\Omega}\right)^{1/2}\frac{\sin\Gamma_s}{\nu_s^{1/2}}n_s^{1/2}A_{sz}e^{-2\pi i(2mc^2+h\nu_s)t/h}. \quad (132)$$

Заметим, что постоянную интегрирования следовало бы определить при условии $a_{3,\,n_s-1,\,0}=0$ для $t=0$; вместо этого мы выбрали ее таким образом, что нулю равно среднее значение $a_{3,n_s-1,\,0}$. Это в точности соответствует классической теории дисперсии света на гармоническом осцилляторе; в этом случае полагают, что движение осциллятора представляет собой просто вынужденные колебания, и не рассматривают колебания с характеристической частотой осциллятора, которые накладываются на вынужденные. Оправданием такому классическому подходу служит известный факт быстрого затухания (вследствие реакции излучения) колебаний с характеристической частотой, так что в стационарном состоя-

нии остаются лишь вынужденные колебания. В нашем случае обоснование совершенно аналогично; можно показать, что влияние константы интегрирования, введенной в выражение (132), очень быстро было бы подавлено за счет реакции состояний типа $(1, n_s - 1, 1)$, которой мы пренебрегли в наших вычислениях.

Амплитуды вероятности переходов в другие промежуточные состояния получаются точно таким же путем, что и (132):

$$\left.\begin{aligned} a_{4, n_s-1, 0} &= \frac{e}{2mc}\left(\frac{h}{\pi\Omega}\right)^{1/2} \frac{\sin\Gamma_s}{\nu_s^{1/2}} n_s^{1/2} (A_{sx} - iA_{sy})\, e^{-2\pi i(2mc^2+h\nu_s)t/h}, \\ a_{3, n_s, 1} &= \frac{e}{2mc}\left(\frac{h}{\pi\Omega}\right)^{1/2} \frac{\sin\Gamma_\sigma}{\nu_\sigma^{1/2}} A_{\sigma z} e^{-2\pi i(2mc^2-h\nu_\sigma)t/h}, \\ a_{4, n_s, 1} &= \frac{e}{2mc}\left(\frac{h}{\pi\Omega}\right)^{1/2} \frac{\sin\Gamma_\sigma}{\nu_\sigma^{1/2}} (A_{\sigma x} - iA_{\sigma y})\, e^{-2\pi i(2mc^2-h\nu_\sigma)t/h}. \end{aligned}\right\} \tag{133}$$

Воспользуемся теперь еще раз общей формулой (26) для вычисления амплитуды вероятности перехода в конечное состояние; получим соотношение

$$\dot{a}_{1, n_s-1, 1} = -\frac{2\pi i}{h}\left[\mathscr{H}_{1, n_s-1, 1; 3, n_s-1, 0}\, a_{3, n_s-1, 0}\, e^{-2\pi i(2mc^2+h\nu_\sigma)t/h} + \ldots\right],$$

в котором опущены подобные же выражения для трех других промежуточных состояний. Далее, из равенств (132), (133) и (131) находим

$$\dot{a}_{1, n_s-1, 1} = -\frac{2i}{\Omega}\frac{e^2}{m}\left(\frac{n_s}{\nu_s\nu_\sigma}\right)^{1/2} \sin\Gamma_s \sin\Gamma_\sigma (A_s A_\sigma)\, e^{2\pi i(\nu_\sigma-\nu_s)t/h}. \tag{134}$$

Это равенство в точности совпадает с формулой (94), полученной в теории рассеяния, которая построена без волнового уравнения Дирака. Совершенно аналогичным методом, как и в случае (94), из (134) получается формула Томсона для интенсивности рассеянного излучения.

Следует подчеркнуть очень глубокое различие между этими двумя теориями рассеяния; в первой теории, которая выведена из волнового уравнения Шредингера для электрона, эффект рассеяния связан с наличием выражения (17) в гамильтониане. Этот член является квадратичным (а не линейным) по векторному потенциалу и поэтому допускает переходы, при которых квант в единичном акте переходит из одной компоненты излучения в другую. В волновом уравнении Дирака содержатся только линейные по потенциалам члены; это приводит к тому, что не могут происходить никакие прямые переходы между двумя состояниями, если квантовое число изменяется более чем у одной компоненты излучения. Поэтому на первый взгляд могло бы показаться, что релятивистский свободный электрон Дирака не имеет рассеивающих свойств. Однако мы уже показали неправильность такого вывода: рассеивающие свойства проявляются,

если надлежащим образом учитываются и отрицательные состояния. Рассеяние проявляется как своего рода резонанс (очень далекий от резонансной линии) квантового скачка (с энергией $2mc^2$) между положительными и отрицательными состояниями.

§ 16. Радиационные переходы из положительных состояний в отрицательные

В предыдущих разделах мы видели, что очень многие явления находят свое естественное объяснение в дираковской теории излучения. Теперь нам предстоит кратко обсудить некоторые серьезные трудности этой теории. Они связаны главным образом с трудностями в теории электрона.

Как известно, наиболее серьезная трудность релятивистского волнового уравнения Дирака связана с тем обстоятельством, что помимо нормальных состояний с положительной энергией оно приводит и к состояниям с отрицательной энергией, не имеющим физического смысла. Это не вызвало бы трудностей, если бы не были возможны переходы между положительными и отрицательными состояниями (как невозможны, например, переходы между состояниями с симметричной и антисимметричной волновыми функциями). Но, к сожалению, дело обстоит не так: на весьма простом примере Клейн показал, что электроны, падающие на очень высокий потенциальный барьер, с конечной вероятностью могут переходить в отрицательное состояние.

Эти трудности Дирак попытался преодолеть с помощью очень остроумной гипотезы. Он постулировал существование в каждой области пространства бесконечного числа электронов, которые почти полностью заполняют — в смысле принципа Паули — все состояния отрицательной энергии; переход из положительного в отрицательное состояние происходит, следовательно, очень редко, ибо незанятыми являются лишь несколько отрицательных состояний. Дирак развивает дальше эту гипотезу, постулируя, что эти незанятые состояния с отрицательной энергией — «дырки» — следует интерпретировать как протоны; действительно, легко видеть, что дырка ведет себя подобно положительному заряду с положительной массой. Поэтому квантовый переход, при котором электрон перескакивает из состояния с положительной энергией в дырку, означал бы гипотетический процесс аннигиляции электрона и протона с излучением энергии, соответствующей их массам.

Оппенгеймер, Дирак и Тамм рассчитали вероятность перехода из положительного в отрицательное состояние с излучением разности энергий. С точки зрения того, что отрицательные состояния эквивалентны протонам, их результат дает скорость аннигиляции электронов и протонов.

Не производя детальных вычислений, ограничимся несколькими качественными замечаниями. Рассмотрим вероятность радиационного пере-

хода между состоянием 1, в котором импульс электрона $\mathbf{p}_1 = 0$, а его энергия $W_1 = +mc^2$, и состоянием 2, где его энергия отрицательна, $W_2 = -mc^2$, и импульс $\mathbf{p}_2 = 0$.

Очевидно, что разность энергий $W_1 - W_2 = 2mc^2$ не может уноситься одиночным квантом, поскольку для импульсов не выполняется условие $p_1 - p_2 = 2mc$. Однако можно получить конечную вероятность перехода между этими двумя состояниями 1,2 при испускании двух квантов, обладающих энергией по mc^2 и движущихся в противоположных направлениях. Такой процесс, естественно, согласуется с сохранением и энергии, и импульса.

Поэтому такой процесс будет происходить в две стадии. Первая стадия: испускается квант с энергией mc^2, а электрон получает отдачу и переходит в состояние с импульсом mc. В этом состоянии энергия электрона равна (114): $W = \pm 2^{1/2}mc^2$. В таком промежуточном состоянии не удовлетворяется и закон сохранения (невозмущенной) энергии. Как часто можно было видеть в предыдущих случаях, амплитуда вероятности такого состояния не может непрерывно возрастать во времени, но тем не менее может быть отличной от нуля, принимая, правда, очень малые осциллирующие значения. Из этого промежуточного состояния возможен непосредственный переход в конечное состояние; при этом испускается квант с энергией mc^2 и импульсом, противоположным импульсу первого кванта. Последнее состояние удовлетворяет законам сохранения энергии и импульса; поэтому амплитуда его вероятности, как можно показать, монотонно растет, что приводит к конечной скорости перехода из начального состояния в конечное.

Выполнив вычисления, получим искомую вероятность перехода в единицу времени:

$$\pi e^4/m^2c^3. \tag{135}$$

Когда импульс электрона в состоянии с отрицательной энергией отличен от нуля, а его энергия $W' = -mc^2\alpha$ $(\alpha \geqslant 1)$, вероятность перехода принимает вид

$$\frac{\pi e^4}{m^2c^3}\,\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\left\{\frac{\alpha^2+4\alpha+1}{(\alpha^2-1)^{1/2}}\ln\left[\alpha+(\alpha^2-1)^{1/2}\right]-\alpha-3\right\}. \tag{136}$$

Если предположить, что все отрицательные состояния свободны, то просуммированное по всем этим состояниям выражение (136) приведет к бесконечной вероятности перехода из положительного состояния в отрицательное; это значит, что электроны не могли бы оставаться в положительном состоянии даже очень короткое время.

С другой стороны, если принять «дырочную» концепцию протонов, теория переходов становится весьма неопределенной, поскольку в этом случае электрон оказывается окруженным бесконечным числом других (отрицательных) электронов. В этой теории пренебрегается эффектами,

связанными с взаимодействием таких электронов, хотя подобные эффекты, очевидно, могут оказаться чрезвычайно большими. Дирак полагает, что это взаимодействие, возможно, является ответственным за различие масс электрона и протона. Если попытаться (в порядке опыта) применять формулу (136) к процессу аннигиляции электрона и протона, выбрав для m какое-то среднее значение массы (между электроном и протоном), то скорость аннигиляции оказывается слишком высокой — материя была бы уничтожена за очень короткое время.

Часть III

КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

§ 17

Электромагнитное поле, взаимодействие которого с веществом мы до сих пор рассматривали, не является полем наиболее общего типа, так как последнее нельзя построить с помощью простой суперпозиции плоских электромагнитных волн. Как можно сразу же убедиться, для плоской электромагнитной волны div $\mathbf{E} = 0$, и это уравнение остается в силе также и для любой суперпозиции волн. В то же время для электромагнитного поля самого общего типа имеем div $\mathbf{E} = +4\pi\rho$, где ρ — плотность электрического заряда. Отсюда видно, что суперпозиция электромагнитных волн не может описывать поле, в котором имеются заряды.

Электромагнитное поле самого общего типа представляется с помощью скалярного и векторного потенциалов V и $\mathbf{U}$ известными соотношениями

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}, \qquad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{U}. \tag{137}$$

При этом V и $\mathbf{U}$ связаны с плотностью заряда ρ и скоростью $\dot{\mathbf{X}}$ классическими выражениями

$$\Delta V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \qquad \Delta \mathbf{U} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\rho\dot{\mathbf{X}}. \tag{138}$$

Далее, $\mathbf{U}$ и V не являются полностью независимыми друг от друга; они удовлетворяют соотношению

$$\operatorname{div} \mathbf{U} + \frac{1}{c}\frac{\partial V}{\partial t} = 0, \tag{139}$$

которое тесно связано с уравнением непрерывности.

Гейзенберг и Паули построили общую квантовую теорию электромагнитного поля, воспользовавшись методом, в котором переменными счи-

таются значения электромагнитных потенциалов во всех точках пространства.

Независимо автором был предложен другой метод квантования электромагнитного поля на основе фурье-разложения этих потенциалов. Хотя метод Гейзенберга и Паули гораздо яснее показывает свойства релятивистской инвариантности и во многих отношениях является более общим, в этой статье предпочтение будет отдано методу автора, как более простому и аналогичному уже применявшимся в теории излучения.

Рассмотрим лишь некоторую область пространства конечного объема. Положим, что оба потенциала — скалярный и векторный — в любой момент времени можно представить рядами Фурье вида

$$V = c\left(\frac{8\pi}{\Omega}\right)^{1/2} \sum_s Q_s \cos \Gamma_s, \qquad \mathbf{U} = c\left(\frac{8\pi}{\Omega}\right)^{1/2} \sum_s \mathbf{u}_s \sin \Gamma_s, \tag{140}$$

где Q_s и $\mathbf{u}_s$ — соответственно скалярная и векторная функции только времени. Множитель $c(8\pi/\Omega)^{1/2}$ введен, как и в (12), для удобства нормировки; Γ_s задается равенством (4). Потенциалы V и $\mathbf{U}$ удобно разложить в ряд по $\cos \Gamma_s$ и $\sin \Gamma_s$ соответственно, так как в этом случае уравнение (139) становится намного проще. Наконец, следует заметить, что число характеристических частот между ν_s и $\nu_s + d\nu_s$ нужно брать равным

$$(4\pi/c^3)\, \Omega \nu_s^2 d\nu_s, \tag{141}$$

т. е. половине величины (1), поскольку в нашем случае две возможные поляризации поперечных волн уже учитываются векторным характером $\mathbf{u}_s$.

В качестве переменных, описывающих поле в некоторый заданный момент времени, выберем Q_s и три компоненты вектора $\mathbf{u}_s$; однако эти компоненты удобно связать с направлениями, коррелированными с видом фазового множителя $\sin \Gamma_s$. Рассмотрим три взаимно перпендикулярных единичных вектора: $\boldsymbol{\alpha}_s$, который ориентирован в направлении волны, и перпендикулярные ему $\mathbf{A}_{s1}$ и $\mathbf{A}_{s2}$. Пусть компонентами $\mathbf{u}_s$ в направлениях $\boldsymbol{\alpha}_s$, $\mathbf{A}_{s1}$, $\mathbf{A}_{s2}$ будут χ_s, q_{s1}, q_{s2}; тогда имеем

$$\mathbf{u}_s = \boldsymbol{\alpha}_s \chi_s + \mathbf{A}_{s1} q_{s1} + \mathbf{A}_{s2} q_{s2}. \tag{142}$$

В качестве переменных, описывающих поле, можно взять

$$Q_s, \ \chi_s, \ q_{s1}, \ q_{s2}; \tag{143}$$

они зависят только от времени.

Из уравнений (138) легко вывести дифференциальные уравнения, определяющие зависимость переменных (143) от времени. Умножим оба слагаемых первого уравнения (138) на $\cos \Gamma_s$ и проинтегрируем по всему пространству. Предположим, что потенциал V обращается в нуль на

очень удаленной поверхности, ограничивающей наш объем Ω, так что некоторые интегралы по этой поверхности можно опустить; тогда после очевидных преобразований получим

$$-4\pi\int\rho\cos\Gamma_s\,d\tau=\int\Delta V\cdot\cos\Gamma_s\,d\tau-\frac{1}{c^2}\int\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\cos\Gamma_s\,d\tau=$$
$$=\int V\cdot\Delta\cos\Gamma_s\,d\tau-\frac{1}{c^2}\int\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\cos\Gamma_s\,d\tau.$$

Из равенства (4) имеем

$$\Delta\cos\Gamma_s=-\frac{4\pi^2\nu_s^2}{c^2}\cos\Gamma_s,$$

откуда следует

$$4\pi c^2\int\rho\cos\Gamma_s\,d\tau=\left(\frac{d^2}{dt^2}+4\pi^2\nu_s^2\right)\int V\cos\Gamma_s\,d\tau. \tag{144}$$

Подставив вместо V выражение (140) и вспоминая, что функции $\cos\Gamma_s$ ортогональны и удовлетворяют соотношению

$$\int\cos\Gamma_s\cos\Gamma_\sigma\,d\tau=\frac{1}{2}\Omega\delta_{s\sigma},$$

получаем

$$\int V\cos\Gamma_s\,d\tau=c\,(2\pi\Omega)^{1/2}\,Q_s.$$

Из соотношения (144), следовательно, находим

$$\ddot{Q}_s+2\pi^2\nu_s^2 Q_s=c\left(\frac{8\pi}{\Omega}\right)^{1/2}\int\rho\cos\Gamma_s\,d\tau. \tag{145}$$

Это уравнение становится гораздо проще по форме, если предположить наличие только точечных зарядов e_1, e_2, e_3,... в точках $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, $\mathbf{X}_3$. Интеграл в уравнении (145) переходит тогда в сумму по точечным зарядам, и мы получаем

$$\ddot{Q}_s+2\pi^2\nu_s^2 Q_s=c\left(\frac{8\pi}{\Omega}\right)^{1/2}\sum_i e_i\cos\Gamma_{si}. \tag{146}$$

Здесь знак суммы распространяется на все заряды; Γ_{si} — значение фазы Γ_s в точке $\mathbf{X}_i$, где находится i-й заряд:

$$\Gamma_{si}=\frac{2\pi\nu_s}{c}(\boldsymbol{\alpha}_s\cdot\mathbf{X}_i)+\beta_s. \tag{147}$$

Таким же методом найдем аналогичное уравнение для вектора $\mathbf{u}_s$:

$$\ddot{\mathbf{u}}_s+2\pi^2\nu_s^2\mathbf{u}_s=\left(\frac{8\pi}{\Omega}\right)^{1/2}\sum_i e_i\dot{\mathbf{X}}_i\sin\Gamma_{si}. \tag{148}$$

Учитывая равенство (142), получаем три компоненты этого векторного уравнения по трем направлениям α_s, A_{s1}, A_{s2}:

$$\ddot{\chi}_s + 2\pi^2\nu_s^2\chi_s = \left(\frac{8\pi}{\Omega}\right)^{1/2} \sum_i e_i\,(\alpha_s \cdot \dot{X}_i) \sin\Gamma_{si}, \tag{149}$$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{q}_{s1} + 2\pi^2\nu_s^2 q_{s1} &= \left(\frac{8\pi}{\Omega}\right)^{1/2} \sum_i e_i\,(A_{s1} \cdot \dot{X}_i) \sin\Gamma_{si}, \\ \ddot{q}_{s2} + 2\pi^2\nu_s^2 q_{s2} &= \left(\frac{8\pi}{\Omega}\right)^{1/2} \sum_i e_i\,(A_{s2} \cdot \dot{X}_i) \sin\Gamma_{si}. \end{aligned}\right\} \tag{150}$$

Уравнения (146), (149) и (150) эквивалентны уравнению (138).

Возьмем производную от (146) по t и добавим ее в уравнение (149), умноженное на $2\pi\nu_s$. Тогда найдем соотношение

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 4\pi^2\nu_s^2\right)(2\pi\nu_s\chi_s + \dot{Q}_s) = 0, \tag{151}$$

которое, очевидно, справедливо, если

$$2\pi\nu_s\chi_s + \dot{Q}_s = 0. \tag{152}$$

Сразу видно, что последнее уравнение эквивалентно (139). Уравнение (152) непосредственно не следует из дифференциальных уравнений (146), (149); но из уравнения (151) следует, что уравнение (152) и его производная по времени

$$2\pi\nu_s\dot{\chi}_s + \ddot{Q}_s = 0 \tag{153}$$

удовлетворяется в любой момент времени, если это имеет место в какой-то заданный момент (например, $t = 0$).

Теперь мы должны написать в гамильтоновой форме уравнения, описывающие движение частицы и изменение электромагнитного поля. С этой целью запишем прямо функцию Гамильтона, а затем убедимся, что канонические уравнения, которые можно из нее вывести, действительно представляют движение частиц и уравнения Максвелла. Функция Гамильтона имеет вид

$$\begin{aligned} H = {} & -c\sum_i (\gamma_i p_i) - \sum_i m_i c^2 \delta_i + \sum_i e_i c \left(\frac{8\pi}{\Omega}\right)^{1/2} \sum_s Q_s \cos\Gamma_{si} + \\ & + \sum_i e_i c \left(\frac{8\pi}{\Omega}\right)^{1/2} \sum_s (\gamma_i \cdot (\alpha_s\chi_s + A_{s1}q_{s1} + A_{s2}q_{s2})) \sin\Gamma_{si} + \\ & + \sum_s \left[\frac{1}{2}(p_{s1}^2 + p_{s2}^2 + \omega_s^2 - P_s^2) + 2\pi^2\nu_s^2 (q_{s1}^2 + q_{s2}^2 + \chi_s^2 - Q_s^2)\right]. \end{aligned} \tag{154}$$

Переменными в ней являются $\mathbf{X}_i$ и спиновые координаты, описывающие движение частиц; $\mathbf{p}_i$ — импульсы (векторы), сопряженные координатам $\mathbf{X}_i$; переменные Q_s, χ_s, q_{s1}, q_{s2} суть координаты, описывающие поле, а P_s, ω_s, p_{s1}, p_{s2} — сопряженные им импульсы. Наконец, γ_i и δ_i представляют собой операторы, аналогичные операторам Дирака γ и δ в уравнении (105) и действующие на спиновую координату i-й частицы. Структура гамильтониана (154) очень проста. Его первые четыре члена можно написать, принимая во внимание равенства (140):

$$\sum_i \left\{ e_i V_i - c\left[\gamma_i \cdot \left(\mathbf{p}_i - \frac{e_i}{c}\mathbf{U}_i\right)\right] - m_i c^2 \delta_i \right\}; \tag{155}$$

это выражение повторяет гамильтониан Дирака (105) для всех частиц. Последний член в выражении (154) представляет гамильтониан электромагнитного поля в отсутствие взаимодействия с зарядами и аналогичен выражению (11).

Отсюда ясно видно, что гамильтониан (154) правильно описывает движение частиц, так как их координаты содержатся в выражении (155), эквивалентном гамильтониану Дирака. Необходимо показать, что и уравнения Максвелла, или эквивалентные уравнения (146), (149), (150), можно вывести из гамильтониана (154). Напишем для этого вытекающие из (154) канонические уравнения:

$$\dot{Q}_s = \frac{\partial H}{\partial P_s} = -P_s, \qquad \dot{P}_s = -\frac{\partial h}{\partial Q_s} = 4\pi^2\nu_s^2 Q_s - \sum_i e_i c\left(\frac{8\pi}{\Omega}\right)^{1/2} \cos\Gamma_{si}. \tag{156}$$

Исключая из них P_s, получаем уравнение

$$\ddot{Q}_s + 4\pi^2\nu_s^2 Q_s = \sum_i e_i c\left(\frac{8\pi}{\Omega}\right)^{1/2} \cos\Gamma_{si},$$

тождественное (146). Подобным же образом, исключение ω_s из канонических уравнений для пары сопряженных переменных χ_s, ω_s

$$\dot{\chi}_s = \frac{\partial H}{\partial \omega_s} = \omega_s, \qquad \omega_s = -\frac{\partial H}{\partial \chi_s} = -4\pi^2\nu_s^2\chi_s^2 - c\left(\frac{8\pi}{\Omega}\right)^{1/2} \sum_i e_i (\gamma_i \cdot \alpha_s) \sin\Gamma_{si} \tag{157}$$

дает

$$\ddot{\chi}_s + 4\pi^2\nu_s^2\chi_s = -c\left(\frac{8\pi}{\Omega}\right)^{1/2} \sum_i e_i (\gamma_i \cdot \alpha_s) \sin\Gamma_{si}. \tag{158}$$

Итак, мы видим, что в релятивистской теории Дирака скорость i-й частицы равна

$$\dot{\mathbf{X}}_i = -c\gamma_i. \tag{159}$$

(Этот результат следует также и из гамильтониана (154), так как $\dot{X}_{ix} = \partial H/\partial p_{ix}$.) Следовательно, уравнение (158) совпадает с (149). Точно таким же методом можно показать, что и уравнение (150) для поперечных компонент векторного потенциала выводится из (154).

Эквивалентное (139) уравнение (152) можно переписать, приняв во внимание (156), в следующей форме:

$$2\pi\nu_s\chi_s - P_s = 0. \tag{160}$$

Производная этого уравнения по времени есть $2\pi\nu_s\dot{\chi}_s - \dot{P}_s$, и с помощью уравнений (156), (157) она может быть записана в виде

$$\omega_s - 2\pi\nu_s Q_s + \frac{c}{2\pi\nu_s}\left(\frac{8\pi}{\Omega}\right)^{1/2}\sum_i e_i \cos\Gamma_{si} = 0. \tag{161}$$

Как уже было показано с помощью уравнения (151), условия (160), (161) автоматически выполняются для любого момента времени, если они удовлетворяются при $t = 0$.

§ 18

Таким образом, в рамках классической интерпретации можно утверждать, что уравнения электродинамики и динамики точки получаются путем интегрирования канонических уравнений, соответствующих функции Гамильтона (154); начальные значения переменных должны удовлетворять дополнительным условиям (160), (161).

При переходе к квантовомеханическому описанию нужно сразу же отметить, что две функции переменных системы, вообще говоря, не могут одновременно иметь точно определенные значения, за исключением случая, когда обе эти функции коммутируют, так что на первый взгляд представляется невозможным одновременное выполнение уравнений (160) и (161). Однако именно в этом специальном случае оно и возможно, поскольку левые части уравнений (160) и (161) коммутируют друг с другом, что подтверждает непосредственная проверка [при этом надо помнить, что ω_s и χ_s являются сопряженными, вследствие чего $\omega_s\chi_s - \chi_s\omega_s = h/2\pi i$; точно также $P_sQ_s - Q_sP_s = h/2\pi i$, в то время как все прочие переменные в (160) и (161) коммутируют].

Интегрированию системы классических канонических уравнений соответствует в волновой механике интегрирование уравнения Шредингера:

$$H\psi = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial t}, \tag{162}$$

где гамильтониан H, задаваемый формулой (154), следует считать, как

обычно, оператором, действующим на функцию ψ одних только координат

$$\psi = \psi(t, \mathbf{X}_i, \sigma_i, q_{s1}, q_{s2}, \chi_s, Q_s); \tag{163}$$

σ_i означает спиновые координаты.

Если бы не было никаких условий, которые ограничивают начальные значения переменных, то для момента времени $t = 0$ можно было бы выбрать ψ произвольным образом. Однако у нас есть условия (160) и (161), и нам предстоит показать, что они определяют характер зависимости ψ от χ_s и Q_s. В самом деле, величина ω_s, сопряженная χ_s, согласно (161), должна быть

$$\omega_s = 2\pi\nu_s Q_s - \frac{c}{2\pi\nu_s}\left(\frac{8\pi}{\Omega}\right)^{1/2}\sum_i e_i \cos\Gamma_{si}.$$

Отсюда следует, что ψ может содержать χ_s только в множителе

$$e^{2\pi i\omega_s\chi_s/h} = \exp\left[\frac{2\pi i}{h}\chi_s\left(2\pi\nu_s Q_s - \frac{c}{2\pi\nu_s}\left(\frac{8\pi}{\Omega}\right)^{1/2}\sum_i e_i\cos\Gamma_{si}\right)\right]. \tag{164}$$

Подобным же методом из условия (160) получим, что переменная χ_s должна присутствовать только в множителе

$$e^{4\pi^2 i\nu\chi_s Q_s/h},$$

который уже содержится в выражении (164).

Поэтому ψ должна иметь вид

$$\psi = \exp\left[\frac{2\pi i}{h}\sum_s \chi_s\left(2\pi\nu_s Q_s - \frac{c}{2\pi\nu_s}\left(\frac{8\pi}{\Omega}\right)^{1/2}\sum_i e_i\cos\Gamma_{si}\right)\right]\varphi(t, \mathbf{X}_i, \sigma_i, q_{s1}, q_{s2}). \tag{165}$$

Если подставить это выражение для ψ в уравнение Шредингера (162), то получим новое дифференциальное уравнение для φ. После некоторых выкладок находим, что это уравнение можно представить в виде

$$R\varphi = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

что весьма похоже по форме на уравнение Шредингера. Выражение для оператора R будет

$$R = -c\sum_i(\boldsymbol{\gamma}_i\cdot\mathbf{p}_i) - \sum_i m_i c^2\delta_i + \sum_i e_i c\left(\frac{8\pi}{\Omega}\right)^{1/2}(\boldsymbol{\gamma}_i\cdot(\mathbf{A}_{s1}q_{s1} + \mathbf{A}_{s2}q_{s2}))\sin\Gamma_{si} +$$
$$+\sum_s\left\{\frac{1}{2}(p_{s1}^2 + p_{s2}^2) + 2\pi^2\nu_s^2(q_{s1}^2 + q_{s2}^2)\right\} + \frac{c^2}{\pi\Omega}\sum_s\frac{1}{\nu_s^2}\left(\sum_i e_i\cos\Gamma_{si}\right)^2. \tag{166}$$

Оператор R можно рассматривать как своего рода функцию Гамильтона, действующую на φ. Следовательно, таким путем координаты Q_s и χ_s

представляющие скалярный потенциал и одну компоненту векторного потенциала, полностью исключены как из новой амплитуды вероятности φ, так и из новой функции Гамильтона R. Если оставить пока в стороне вопрос о последнем слагаемом в R, которое мы обсудим далее, оператор R тождествен функции Гамильтона (117) в дираковской теории излучения. [Имеются лишь некоторые формальные различия: в (117) рассматривается только один электрон вместо многих частиц; в (166) фигурируют порознь две поляризованные компоненты с индексами $s1$ и $s2$, тогда как в (117) имеется лишь один индекс s.]

Теперь нужно выяснить физический смысл последнего члена в выражении (166). Это слагаемое равно

$$\frac{c^2}{\pi\Omega}\sum_s \frac{1}{\nu_s^2}\left(\sum_i e_i \cos \Gamma_{si}\right)^2 = \frac{c^2}{\pi\Omega}\sum_{ij} e_i e_j \sum_s \frac{\cos \Gamma_{si} \cos \Gamma_{sj}}{\nu_s^2}.$$

Сумму по s можно преобразовать в интеграл [возьмем среднее значение величины $\cos \Gamma_{si} \cos \Gamma_{sj}$ по всем направлениям распространения и фазам s-компоненты и воспользуемся выражением (141)]; в результате получим

$$\sum_s \frac{\cos \Gamma_{si} \cos \Gamma_{sj}}{\nu_s^2} = \frac{\pi\Omega}{2c^2}\frac{1}{r_{ij}},$$

где r_{ij} — расстояние между двумя точками i и j. Последнее слагаемое в выражении (166) принимает, таким образом, очень простой вид:

$$\frac{1}{2}\sum_{ij}\frac{e_i e_j}{r_{ij}}; \qquad (167)$$

это — обычное классическое выражение для электростатической энергии нашей системы зарядов.

Вот здесь-то и возникает очень серьезное затруднение, так как электростатическая энергия точечных зарядов оказывается бесконечной; каждый заряд обладает бесконечной собственной электростатической энергией. Конечно, можно было бы попытаться обойти эту трудность подобно тому, как это часто делается в классической электростатике, попросту пренебрегая в сумме (167) всеми членами с $i = j$, которые представляют собой собственную энергию зарядов. Однако мы увидели бы, что даже такой грубый прием недостаточен для устранения бесконечных слагаемых неэлектростатической природы в собственной энергии.

Вставшая перед нами в квантовой электродинамике задача аналогична той, которая существует и в теории излучения, поскольку наша новая гамильтонова функция R есть взятый из теории излучения гамильтониан плюс электростатическая энергия. До сих пор мы считали в рамках тео-

рии излучения систему невозмущенной, если не учитывалось взаимодействие между атомом и полем излучения. В этом случае описывающий взаимодействие член просто индуцирует переходы между различными состояниями невозмущенной системы, которым отвечает одинаковая или почти одинаковая невозмущенная энергия.

Однако можно поставить вопрос: существуют ли квантовые состояния для полной системы? В математическом аспекте эта задача очень трудна и анализировать ее можно лишь методом последовательных приближений. Но уже второе приближение приводит к бесконечной поправке к энергетическим уровням, и поэтому представляется вероятным, что для точечных электронов не существует квантовых состояний невозмущенной задачи. Отметим еще и то, что использование метода возмущений в этой задаче крайне сомнительно, поскольку разности между квантовыми состояниями невозмущенной задачи очень малы по сравнению с возмущением.

На все эти трудные вопросы пока еще не было дано удовлетворительного ответа. Невольно напрашивается предложение приписать электрону конечный радиус, что позволило бы устранить бесконечные члены, как и в классической теории электромагнитной массы. Однако этот путь сопряжен с серьезными затруднениями, связанными с релятивистской инвариантностью.

Таким образом, в заключение можно сказать, что практически все задачи теории излучения, которые не затрагивают структуры электрона, находят удовлетворительное объяснение; в то же время проблемы, связанные с внутренними свойствами электрона, все еще очень далеки от своего решения.

ЛИТЕРАТУРА

Здесь мы собрали некоторые статьи по квантовой теории излучения и квантовой электродинамике:

E. Amaldi. Rend. Lincei, 1929, **9**, 876 (теория эффекта Рамана).
F. Bloch. Phys. Zeits., 1928, **29**, 58 (реакция излучения).
G. Breit. Phys. Rev., 1929, **34**, 553 (взаимодействие двух электронов).
P. A. M. Dirac. Proc. Roy. Soc., 1927, **A 114**, 243 (общая теория); 1927, **A 114**, 710 (дисперсия); Proc. Camb. Phil. Soc., 1930, **26**, 361 (переход электрона из состояний с положительной энергией в состояния с отрицательной энергией).
E. Fermi. Rend. Lincei, 1929, **10**, 72; (полосы Липпмана); Rend. Lincei, 1929, 9, 881; 1930, **12**, 431 (квантовая электродинамика); Annales Inst. Poincaré, 1931 (общая теория излучения); Nuovo Cim., 1931, 8, 121 (квантовая теория электромагнитной массы). (Статьи [Б55], 38, 46, [Б67] и 47).
J. A. Gaunt, *W. H. McCrea*. Proc. Camb. Phil. Soc., 1927, **23**, 930 (квадрупольное излучение).
M. Göppert-Mayer. Ann. d. Phys., 1931, 9, 273 (двойные переходы).
W. Heisenberg. Ann. d. Phys., 1931, 9, 338 (соответствие классических и квантовых свойств света); Zs. f. Physik, 1930, **65**, 4 (собственная энергия электрона).
W. Heisenberg, *W. Pauli*. Zs. f. Physik., 1929, **56**, 1; 1930, 59, 168 (квантовая электродинамика).

P. Jordan, *W. Pauli*. Zs. f. Physik., 1928, **47**, 151 (квантовая электродинамика пространства без электрических зарядов).
S. Kikuchi. Zs. f. Physik, 1931, **68**, 803 (эффект Комптона).
L. Landau, *R. Peierls*. Zs. f. Physik, 1930, **62**, 188 (квантовая электродинамика).
J. R. Oppenheimer. Phys. Rev., 1930, 35, 461 (взаимодействие поля и материи); Phys. Rev., 1930, 35, 939 (аннигиляция электронов и протонов).
G. Racah. Rend. Lincei, 1930, **11**, 837, 1100 (интерференция).
L. Rosenfeld. Ann. d. Phys., 1930, **5**, 113 (квантование волновых полей).
E. Segrè. Rend. Lincei, 1929, **9**, 887 (флюоресценция).
I. Tamm. Zs. f. Physik, 1930, **60**, 345 (рассеяние света на твердых телах); Zs. f. Physik, **62**, 7 (эффект Комптона, аннигиляция электронов и протонов).
I. Waller. Zs. f. Physik, 1929, 58, 75; 1930, **61**, 837 (рассеяние); **62**, 673 (собственная энергия электрона).
V. Weisskopf. Ann. d. Phys., 1931, 9, 23 (резонансная флюоресценция).
V. Weisskopf, *E. Wigner*. Zs. f. Physik, 1930, **63**, 54; **65**, 18 (ширина спектральных линий).

См. вводные замечания к статье 38

49

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДВУХ ЭЛЕКТРОНОВ *

(Совместно с Г. Бете)

Обсуждается связь квантовой электродинамики с формулами Брейта и Мёллера взаимодействия двух электронов. Показано, что формулу Брейта можно вывести из мёллеровской (§ 1) и из квантовой электродинамики (§ 2), а также, что из последней следует формула Мёллера (§ 3).

Введение. К задаче взаимодействия двух электронов существует два подхода — Брейта[1] и Мёллера[2],— которые на первый взгляд основываются на совершенно различных исходных положениях. Представляется желательным исследовать связь обоих методов друг с другом и с квантовой электродинамикой. Дифференциальное уравнение Брейта непосредственно выводится им из квантовой электродинамики, а Розенфельд[3] показал, что необходимая для брейтовского вывода формула квантовой электродинамики следует из гейзенберговского принципа соответствия[4], использованного Мёллером. Мы получим формулу Брейта *непосредственно* из мёллеровской, а для ее вывода из квантовой электродинамики выберем путь, полностью аналогичный нашему пути вывода мёллеровской теории, так что будет легче сравнить различные приближенные методы.

Как известно, в квантовой электродинамике можно получить точное выражение для энергии кулоновского взаимодействия двух электронов, когда учитывается только взаимодействие *продольных* волн электромагнитного поля с электронами[5]. Всякое отклонение от кулоновского закона должно происходить, следовательно, за счет взаимодействия с *поперечными* волнами, которые в дальнейшем мы будем коротко называть *полем излучения*. Связь вещества с полем излучения приводит в *первом* приближении лишь к таким переходам, при которых изменяется квантовое состояние электронов и поглощается или излучается световой квант. Однако нас интересует матричный элемент энергии взаимодействия электронов, соответствующий только изменению квантового состояния электро-

---

* *Über die Wechselwirkung von zwei Elektronen.* (Mit H. Bethe). Zs. f. Phys., 1932, 77, 296—306).

[1] G. Breit. Phys. Rev., 1929, **34**, 553; 1932, **39**, 616.
[2] C. Møller. Zs. f. Phys., 1931, **70**, 786.
[3] L. Rosenfeld. Zs. f. Phys., 1931, **73**, 253.
[4] W. Heisenberg. Ann. d. Phys., 1931, **9**, 338.
[5] E. Fermi. Rev. Mod. Phys., 1932, **4**, 87 (Статья 48).

нов, без изменения состояния поля излучения, когда можно, в частности, предположить, что как в начальном, так и в конечном состояниях излучения нет. Подобные переходы одних только электронов происходят лишь благодаря двойным процессам, при которых квант сначала излучается, а затем тот же квант снова поглощается.

Выводы формул Брейта и Мёллера из квантовой электродинамики различаются между собой по существу следующим. В первом случае энергию кулоновского взаимодействия электронов нужно ввести уже в «невозмущенную функцию Гамильтона», причем возмущением является только взаимодействие электронов с поперечными волнами электромагнитного поля. Вычисление проводится лишь в нерелятивистском приближении, т. е. только до членов порядка v^2/c^2. Кроме того, пренебрегается всеми переходами частиц системы, с которыми связано непрерывное испускание излучения. Последнее можно рассмотреть, естественно, в рамках обычной теории излучения.

В теории же Мёллера кулоновская энергия является частью *возмущения* и выступает наравне со взаимодействием с полем излучения, так как в крайне релятивистском случае оба взаимодействия одинаковы по порядку величины. В нулевом приближении электроны движутся независимо друг от друга. Чтобы мёллеровская теория была строго релятивистской, нужно провести разложение по степеням e и отбросить члены более высокого порядка, чем e^2. Таким образом, если выводить брейтовское взаимодействие из теории Мёллера, то остается лишь оправдать учет кулоновского взаимодействия в первом приближении; если же исходить из квантовой электродинамики, то кулоновские силы входят в невозмущенную систему, так что их действие можно проанализировать точно. Заметим, что в мёллеровском (во втором) приближении никакое излучение не фигурирует; оно появилось бы только при учете взаимодействия излучения в *третьем* приближении, если предположить, что в конечном состоянии нет электронов с отрицательной энергией.

§ 1. Вывод энергии брейтовского взаимодействия из теории Мёллера. Чтобы рассчитать взаимодействие двух электронов, нужно, согласно Мёллеру, записать запаздывающие потенциалы, которые будут создаваться распределением заряда первого электрона, и рассматривать их как возмущение, действующее на второй электрон. Вычислим матричный элемент энергии взаимодействия, отвечающий переходу первого электрона из состояния[6] n_1 в состояние n_1' и второго — из состояния n_2 в состояние n_2'; при этом полная энергия в начальном и конечном состояниях должна быть одинакова:

$$E_1 + E_2 = E_1' + E_2'. \tag{1}$$

[6] В этом выводе мы *не* учитываем кулоновскую энергию невозмущенной задачи, так как она содержится в мёллеровском взаимодействии. По этой причине можно говорить о квантовых состояниях отдельных электронов.

Переходу $n_1 \rightarrow n'_1$ соответствует распределение заряда

$$\rho_{n_1 n_1'}(\mathbf{r}_1, t) = e_1 u_1'^* (\mathbf{r}_1)\, u_1 (\mathbf{r}_1)\, e^{\frac{2\pi i}{h}(E_1' - E_1)t}, \tag{2}$$

где u_1 и u_1' — дираковские собственные функции первого электрона в начальном и конечном состояниях, а e_1 — его заряд. С учетом запаздывания распределение заряда (2) создает в точке $\mathbf{r}_2$ в момент времени t скалярный потенциал

$$\varphi_{n_1 n_1'}(\mathbf{r}_2, t) = \int \frac{\rho_{n_1 n_1'}\left(\mathbf{r}_1, t - \frac{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}{c}\right)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}\, d\tau_1 =$$

$$= e_1 e^{\frac{2\pi i}{h}(E_1' - E_1)t} \int \frac{u_1'^* (\mathbf{r}_1)\, u_1 (\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}\, e^{\frac{2\pi i}{hc}(E_1 - E_1')|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}\, d\tau_1. \tag{3}$$

Для векторного потенциала получаем соответственно:

$$\mathbf{U}_{n_1 n_1'}(\mathbf{r}_2, t) = -e_1 e^{\frac{2\pi i}{h}(E_1' - E_1)t} \int \frac{(u_1'^* (\mathbf{r}_1) \boldsymbol{\gamma}_1 u_1 (\mathbf{r}_1))}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}\, e^{\frac{2\pi i}{hc}(E_1 - E_1')|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}\, d\tau_1; \tag{4}$$

здесь γ_{x_1}, γ_{y_1}, γ_{z_1}, δ_1 — операторы Дирака для первого электрона, причем $\boldsymbol{\gamma}_1$ представляет собой вектор с компонентами γ_{x_1}, γ_{y_1}, γ_{z_1}.

Это и есть формула Брейта для энергии взаимодействия, которую мы хотели вывести, но с точностью до членов порядка $1/c^2$ включительно. Представляется очевидным разложить по $1/c$ экспоненциальную функцию в соотношениях (3) и (4), описывающую запаздывание потенциала; тогда найдем

$$\varphi_{n_1 n_1'}(\mathbf{r}_2, t) = e_1 e^{\frac{2\pi i}{h}(E_1' - E_1)t} \int (u_1'^* (\mathbf{r}_1)\, u_1 (\mathbf{r}_1)) \left[\frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} + \frac{2\pi i}{hc}(E_1 - E_1') - \right.$$

$$\left. - \frac{2\pi^2}{h^2 c^2}(E_1 - E_1')^2 |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \right] d\tau_1 \tag{5}$$

и соответственно для $\mathbf{U}$. Второй член в квадратных скобках формулы (5) обращается в нуль: либо состояния $n_1 n_1'$ тождественны, но тогда $E_1 - E_1' = 0$, либо эти состояния отличаются друг от друга, но тогда в силу ортогональности собственных функций обращается в нуль объемный интеграл. Для второго электрона энергия возмущения равна, таким образом,

$$V_{n_1}^{n_1'}(\mathbf{r}_2, t) = e_2 \varphi_{n_1 n_1'}(\mathbf{r}_2, t) + e_2 (\boldsymbol{\gamma}_2 \cdot \mathbf{U}_{n_1 n_1'}(\mathbf{r}_2, t)).$$

Составим ее матричный элемент, соответствующий переходу $n_2 \rightarrow n_2'$

второго электрона:

$$V_{n_1 n_2}^{n_1' n_2'} = e_1 e_2 e^{\frac{2\pi i}{h}(E_1'+E_2'-E_1-E_2)t} \int u_2'^* (\mathbf{r}_2)\, u_1'^* (\mathbf{r}_1) \Big[\frac{1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|} - \\ - \frac{2\pi^2}{h^2c^2}(E_1 - E_1')^2\,|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1| - \frac{\boldsymbol{\gamma}_1\cdot\boldsymbol{\gamma}_2}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|}\Big] u_2(\mathbf{r}_2)\, u_1(\mathbf{r}_1)\, d\tau_1\, d\tau_2. \qquad (6)$$

Первый член в квадратных скобках представляет здесь обычный кулоновский потенциал, второй обусловлен запаздыванием скалярного потенциала, в третьем заключено влияние векторного потенциала (без запаздывания—так как сами операторы $\boldsymbol{\gamma}$ имеют порядок величины v/c, в нашем приближении не обязательно учитывать запаздывание векторного потенциала). Первый и третий члены симметричны по обоим электронам, второй — нет, что связано с асимметрией метода Мёллера. Поскольку же полная энергия в начальном и конечном состояниях должна быть одинакова [см. (1)], второй член можно симметризовать, записывая — $(E_1 - E_1')(E_2 - E_2')$ вместо $(E_1 - E_1')^2$. Тогда выражение (6) будет матричным элементом энергии

$$V = e_1 e_2 \frac{1-\boldsymbol{\gamma}_1\cdot\boldsymbol{\gamma}_2}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|} + \frac{2\pi^2 e_1 e_2}{h^2c^2}[H_2(H_1|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1| - |\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|H_1) - \\ - (H_1|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1| - |\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|H_1)H_2], \qquad (7)$$

где H_1 и H_2 суть невозмущенные гамильтоновы функции обоих электронов без взаимодействия, т. е.

$$H_1 = -e_1\varphi_0(\mathbf{r}_1) - \frac{hc}{2\pi i}(\boldsymbol{\gamma}_1\cdot \mathrm{grad}_1) - e_1(\boldsymbol{\gamma}_1\cdot\mathbf{U}_0(\mathbf{r}_1)) - m_1c^2\delta_1. \qquad (8)$$

Здесь φ_0 и $\mathbf{U}_0$ представляют собой скалярный и векторный потенциалы некоторого внешнего статического поля, в котором движутся оба электрона. Кроме градиента, все части выражения для H_1 перестановочны с $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$; поэтому

$$H_1|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1| - |\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|H_1 = -\frac{hc}{2\pi i}\left(\boldsymbol{\gamma}_1\cdot\frac{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}\right) = F$$

и

$$H_2F - FH_2 = +\frac{h^2c^2}{4\pi^2}\left(\frac{\boldsymbol{\gamma}_1\cdot\boldsymbol{\gamma}_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|} - \frac{(\boldsymbol{\gamma}_1\cdot\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\,(\boldsymbol{\gamma}_2\cdot\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^3}\right). \qquad (9)$$

Подставляя эти выражения в (7), мы получаем формулу Брейта для энергии взаимодействия:

$$V = \frac{e_1e_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}\left(1 - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\gamma}_1\cdot\boldsymbol{\gamma}_2) - \frac{1}{2}\frac{(\boldsymbol{\gamma}_1\cdot\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)(\boldsymbol{\gamma}_2\cdot\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^2}\right). \qquad (10)$$

§ 2. Вывод брейтовского закона взаимодействия из квантовой электродинамики. За основу этого вывода возьмем гамильтонову функцию сис-

темы, состоящей из электронов и электромагнитного поля, в виде формулы (166) [5]; такое выражение получается, если с помощью уравнения непрерывности исключить координаты скалярного потенциала и продольную компоненту векторного потенциала. В такой форме функция Гамильтона уже содержит кулоновское взаимодействие частиц. Принимая во внимание выражение (167) [5], гамильтониан можно записать в виде

$$R=\sum_s\left(\frac{1}{2}p_s^2+2\pi^2\nu_s^2q_s^2\right)+\sum_{i<j}\frac{e_ie_j}{r_{ij}}-\sum_i c\,(\boldsymbol{\gamma}_i\cdot\mathbf{p}_i)-\sum_i m_ic^2\delta_i+$$
$$+c\sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}}\sum_{is}e_i\,(\boldsymbol{\gamma}_i\cdot\mathbf{A}_s)\,q_s\sin\Gamma_{si}. \qquad (11)$$

В этой формуле использованы те же самые обозначения, что и в цитированной работе [5], с той только разницей, что компоненты излучения нумеруются не двумя индексами s_1 и s_2, а одним s; при этом, несмотря на бесконечно большие собственные энергии электронов, их кулоновское взаимодействие записано явно.

Для вывода формулы Брейта нам нужно в невозмущенную систему ввести кулоновскую силу. Таким образом, за невозмущенную функцию Гамильтона мы примем сумму энергии излучения

$$H_s=\sum_s\left(\frac{1}{2}p_s^2+2\pi^2\nu_s^2q_s^2\right) \qquad (12)$$

и энергии частиц

$$H_M=\sum_i-c\,(\boldsymbol{\gamma}_i\cdot\mathbf{p}_i)-m_ic^2\delta_i+\sum_{i<j}\frac{e_ie_j}{r_{ij}}. \qquad (13)$$

Возмущением будем считать энергию взаимодействия частиц и поля:

$$H=c\sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}}\sum_{is}e_i\,(\boldsymbol{\gamma}_i\cdot\mathbf{A}_s)\,q_s\sin\Gamma_{si}. \qquad (14)$$

Состояния невозмущенной системы характеризуются квантовым числом n, которое посредством гамильтоновой функции H_M определяет состояние частиц системы, и квантовыми числами $n_1, n_2, \ldots, n_s, \ldots$ излучающих осцилляторов. Соответствующими амплитудами вероятности будут

$$a_{nn_1n_2\ldots n_s\ldots}. \qquad (15)$$

Благодаря энергии взаимодействия (14), амплитуды a изменяются во времени в соответствии с известными уравнениями:

$$\dot{a}_{n'n_1'n_2'\ldots n_s'}=-\frac{2\pi i}{h}\sum_{nn_1n_2\ldots}H^{nn_1n_2\ldots}_{n'n_1'n_2'}a_{nn_1n_2\ldots}\,e^{\frac{2\pi i}{h}(E_{n'n_1'\ldots}-E_{nn_1\ldots})t}. \qquad (16)$$

Как мы знаем, единственными отличными от нуля матричными элементами H являются

$$H^{nn_1n_2\ldots n_s\ldots}_{n'n_1n_2\ldots n_s\pm 1\ldots} = c\sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}}\,Q_{n'n}(s)\sqrt{\frac{h}{8\pi^2\nu_s}}\cdot\begin{cases}\sqrt{n_s+1}\\ \sqrt{n_s},\end{cases} \qquad (17)$$

где $Q_{n'n}(s)$ — матричный элемент $n'n$ величины

$$Q(s) = \sum_i e_i(\gamma_i\cdot\mathbf{A}_s)\sin\Gamma_{si}. \qquad (18)$$

Предположим теперь, что сначала система частиц находится в состоянии n и ни один из осцилляторов излучения не возбужден. В этом случае

$$|a_{n00\ldots0\ldots}| = 1.$$

Посмотрим, каким образом действие возмущения сказывается на амплитуде вероятности состояния $n'00\ldots0\ldots$. Матрица возмущения (17) не содержит ни одного элемента, который прямо связывал бы оба состояния $n000\ldots$ и $n'000\ldots$. Подобный переход может происходить только через промежуточное состояние; в качестве таких переходов учитывают, согласно формуле (17), состояния $m00\ldots1_s\ldots$, которые комбинируют с начальным и конечным состояниями. Пользуясь в случае перехода $n000\ldots\to m000\ldots1_s\ldots$ соотношением (16), сразу же имеем:

$$\dot a_{m0\ldots1_s\ldots} = -\frac{2\pi i}{h}H^{n00\ldots0\ldots}_{m00\ldots1_s\ldots}a_{n00\ldots0\ldots}e^{2\pi i(\nu_{mn}+\nu_s)t},$$

где (19)

$$\nu_{mn} = \frac{E_m - E_n}{h}.$$

Поскольку амплитуда $a_{n00\ldots0\ldots}$ практически постоянна, это выражение можно проинтегрировать и получить, что

$$a_{m0\ldots1_s\ldots} = -\frac{H^{n\ldots0\ldots}_{m\ldots1_s\ldots}}{h(\nu_{mn}+\nu_s)}a_{n00\ldots}e^{2\pi i(\nu_{mn}+\nu_s)t}. \qquad (20)$$

Теперь снова нужно применить соотношение (16) к переходу $m0\ldots1_s\ldots\to$ $\to n'0\ldots0\ldots$; находим

$$\dot a_{n'0\ldots0\ldots} = -\frac{2\pi i}{h}\sum_{ms}H^{m0\ldots1_s\ldots}_{n'0\ldots0\ldots}a_{m0\ldots1_s\ldots}e^{2\pi i(\nu_{n'm}-\nu_s)t} =$$

$$= -\frac{2\pi i}{h}\sum_{ms}\left(-\frac{1}{h}\frac{H^{n\ldots0\ldots}_{m\ldots1\ldots}H^{m\ldots1_s\ldots}_{n'\ldots0\ldots}}{\nu_{mn}+\nu_s}\right)\cdot a_{n\ldots0\ldots}e^{2\pi i\nu_{n'n}t}. \qquad (21)$$

Величину

$$K_{n'n} = -\frac{1}{h}\sum_{ms}\frac{H^{n\ldots 0\ldots}_{m\ldots 1_s\ldots}\,H^{m\ldots 1_s\ldots}_{n'\ldots 0\ldots}}{\nu_{mn}+\nu_s} \tag{22}$$

можно понимать как матричный элемент, который непосредственно разрешает переходы между состояниями $n0\ldots 0\ldots \to n'0\ldots 0\ldots$. Соответствующая величина K представляет собой поправку, которую нужно ввести в кулоновское взаимодействие, чтобы учесть запаздывание потенциалов.

С помощью выражения (17) находим из (22):

$$K_{n'n} = -\frac{c^2}{\pi\Omega}\sum_{ms}\frac{Q_{n'm}(s)\,Q_{mn}(s)}{\nu_s(\nu_s+\nu_{mn})}. \tag{23}$$

Далее мы должны выразить величину K через координаты и импульсы частиц. Это легко сделать, если в первом приближении пренебречь ν_{mn} в знаменателе выражения (23) по сравнению с ν_s. (Вспомним, что по порядку величины отношение ν_{mn}/ν_s равно v/c.) После этого получим

$$K_{n'n} = -\frac{c^2}{\pi\Omega}\sum_{sm}\frac{1}{\nu_s^2}\sum_m Q_{n'm}(s)\,Q_{mn}(s) = -\frac{c^2}{\pi\Omega}\sum_s\frac{1}{\nu_s^2}[Q^2(s)]_{n'n}. \tag{24}$$

Таким образом, мы имеем

$$K = -\frac{c^2}{\pi\Omega}\sum_s\frac{1}{\nu_s^2}Q^2(s). \tag{25}$$

Для того чтобы доказать тождественность найденной величины с брейтовской функцией взаимодействия, остается лишь просуммировать по s.

Подставим в формулу (25) выражение (18) для Q и найдем

$$K = -\sum_{ij}e_ie_j\,\frac{c^2}{\pi\Omega}\sum_s\frac{1}{\nu_s^2}(\gamma_i\cdot\mathbf{A}_s)(\gamma_j\cdot\mathbf{A}_s)\sin\Gamma_{si}\sin\Gamma_{sj}. \tag{26}$$

Известным методом сумма по s преобразуется в интеграл; при этом $\sum_i$ заменяется на $\int_0^\infty \frac{8\pi}{c^3}\Omega\nu_s^2 d\nu_s$, а выражение

$$(\gamma_i\cdot\mathbf{A}_s)(\gamma_j\cdot\mathbf{A}_s)\sin\Gamma_{si}\sin\Gamma_{sj}$$

усредняется по всем фазам, поляризациям и направлениям распространения. Таким образом, находим

$$K = -\sum_{ij}e_ie_j\cdot\frac{8}{c}\int_0^\infty\overline{(\gamma_i\cdot\mathbf{A}_s)(\gamma_j\cdot\mathbf{A}_s)\sin\Gamma_{si}\sin\Gamma_{sj}}\,d\nu_s. \tag{27}$$

Усреднение можно произвести сразу же, выполнив свободные от каких-либо принципиальных трудностей вычисления, в которых учитывается формула (147) (см. [5]):

$$\overline{(\gamma_i\cdot\mathbf{A}_s)(\gamma_j\cdot\mathbf{A}_s)\sin\Gamma_{si}\sin\Gamma_{sj}} = \frac{(\gamma_i\cdot\gamma_j)}{4}\left(\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}+\frac{\cos\vartheta}{\vartheta^2}-\frac{\sin\vartheta}{\vartheta^3}\right) =$$

$$= \frac{(\gamma_i\cdot\mathbf{r}_{ij})(\gamma_j\cdot\mathbf{r}_{ij})}{\vartheta r_{ij}^2}\left(\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}+3\frac{\cos\vartheta}{\vartheta^2}-3\frac{\sin\vartheta}{\vartheta^3}\right), \tag{28}$$

где

$$\vartheta = \frac{2\pi r_{ij}}{c}\nu_s. \tag{29}$$

Следовательно, вводя в качестве переменной интегрирования ϑ вместо ν_s, получаем из (27):

$$K = -\sum_{ij}\frac{e_ie_j}{\pi r_{ij}}\left\{(\gamma_i\cdot\gamma_j)\int_0^\infty\left(\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}+\frac{\cos\vartheta}{\vartheta^2}-\frac{\sin\vartheta}{\vartheta^3}\right)d\vartheta -\right.$$

$$\left.-\frac{(\gamma_i\cdot\mathbf{r}_{ij})(\gamma_j\cdot\mathbf{r}_{ij})}{r_{ij}^2}\cdot\int_0^\infty\left(\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}+\frac{3\cos\vartheta}{\vartheta^2}-\frac{3\sin\vartheta}{\vartheta^3}\right)d\vartheta\right\}. \tag{30}$$

Эти два интеграла принимают значения $+\pi/4$ и $-\pi/4$; в итоге получим

$$K = -\sum_{ij}\frac{e_ie_j}{4r_{ij}}\left\{(\gamma_i\cdot\gamma_j)+\frac{(\gamma_i\cdot\mathbf{r}_{ij})(\gamma_j\cdot\mathbf{r}_{ij})}{r_{ij}^2}\right\}. \tag{31}$$

Эта формула содержит бесконечно большую постоянную собственную энергию электронов [7]. Исходя из этих констант, находим выражение для взаимодействия двух электронов

$$-\frac{e_ie_j}{2r_{ij}}\left\{(\gamma_i\cdot\gamma_j)+\frac{(\gamma_i\cdot\mathbf{r}_{ij})(\gamma_j\cdot\mathbf{r}_{ij})}{r_{ij}^2}\right\}, \tag{32}$$

тождественное формуле Брейта.

§ 3. Вывод формулы Мёллера из квантовой электродинамики. Для начала снова возьмем функцию Гамильтона (11), причем ограничимся случаем двух частиц 1 и 2. Однако на этот раз возмущением будем считать

[7] Это как раз и устраняет электростатическую собственную энергию. Но не следует думать, что благодаря этому устраняются трудности, связанные с бесконечной собственной энергией. Бесконечно большая собственная энергия свободного электрона снова возникает при вычислении диагонального элемента по формуле (23), когда ν_{mn} не отбрасывается, а в качестве промежуточного состояния m рассматриваются также и состояния с отрицательной энергией.

кулоновскую энергию e_1e_2/r_{12}, так что невозмущенной функцией Гамильтона будет

$$H_0 = \sum_s \left(\frac{1}{2} p_s^2 + 2\pi^2 \nu_s^2 q_s^2\right) + \sum_{i=1}^{2} (-c(\gamma_i \cdot \mathbf{p}_i) - mc^2\delta_i). \quad (33)$$

Квантовые состояния невозмущенной системы определяются квантовыми числами n_1n_2 электронов и квантовыми числами осцилляторов поля излучения. Нас интересует переход

$$n_1n_2 0 \ldots 0 \rightarrow n_1' n_2' 0 \ldots 0 \ldots. \quad (34)$$

Благодаря кулоновскому взаимодействию этот переход может осуществляться, во-первых, непосредственно и, во-вторых, через промежуточное состояние

$$m_1m_2 0 \ldots 1_s \ldots \quad (35)$$

— за счет механизма, который обсуждался в предыдущих параграфах. Первому процессу отвечает матричный элемент

$$\left(\frac{e_1e_2}{r_{12}}\right)_{n_1n_2}^{n_1'n_2'}, \quad (36)$$

второму же, согласно формуле (23),

$$K_{n_1n_2}^{n_1'n_2'} = -\frac{c^2}{\pi\Omega} \sum_{m_1m_2s} \frac{Q_{m_1m_2}^{n_1'n_2'}(s)\, Q_{n_1n_2}^{m_1m_2}(s)}{\nu_s(\nu_s + \nu_{m_1n_1} + \nu_{m_2n_2})}. \quad (37)$$

Естественно ограничиться в первом случае первым приближением, а во втором — продвинуться до второго, ибо оба выражения, (36) и (37), пропорциональны e_1e_2.

Вычислим теперь матричный элемент (37). Заметим прежде всего, что Q [равенство (18)] состоит из двух слагаемых: $Q(1s)$ и $Q(2s)$, каждое из которых зависит только от координат *одного* электрона. Поскольку собственные функции невозмущенной системы являются произведением собственных функций отдельных электронов, матричные элементы $Q(s)$ могут соответствовать только таким переходам, при которых меняется состояние только одного электрона. Благодаря этому, сумма по m_1m_2 сводится к двум членам: $m_1m_2 = n_1n_2'$ и $m_1m_2 = n_1'n_2$. Тогда выражение (37) принимает форму:

$$K_{n_1n_2}^{n_1'n_2'} = -\frac{c^2}{\pi\Omega} \sum_s \frac{Q_{n_1'n_1}(1s)\, Q_{n_2'n_2}(2s)}{\nu_s} \left(\frac{1}{\nu_s + \nu_{n_1'n_1}} + \frac{1}{\nu_s + \nu_{n_2'n_2}}\right). \quad (38)$$

Здесь $Q(1s)$ имеет вид [см. равенство (18), формулу (147) в работе [5]]

$$Q(1s) = \frac{e_1}{2i}(\gamma_1 \cdot A_s)\,[e^{\frac{2\pi i\nu_s}{c}(\alpha_s \cdot r_1)+i\beta_s} - e^{-\frac{2\pi i\nu_s}{c}(\alpha_s \cdot r_2)-i\beta_s}]. \tag{39}$$

Собственные функции состояний n_1 и n_1' запишем в такой форме:

$$u_1 = \frac{a_1}{\sqrt{\Omega}} e^{\frac{2\pi i}{h}(p_1 \cdot r_1)}, \qquad u_1' = \frac{a_1'}{\sqrt{\Omega}} e^{\frac{2\pi i}{h}(p_1' \cdot r_1)}, \tag{40}$$

где a — четырехкомпонентные константы, нормированные на единицу.

Таким образом, матричные элементы $Q(1s)$ отличны от нуля лишь в том случае, когда

$$\frac{h\nu_s}{c}\alpha_s = \pm(p_1 - p_1'). \tag{41}$$

Их значениями при этом будут

$$\mp \frac{e_1}{2i}(\tilde{a}_1'\gamma_1 a_1 \cdot A_s)\, e^{\mp i\beta}. \tag{42}$$

Для $Q(2s)$ получим соответствующие выражения. Так как по фазам β_s нужно провести усреднение, отличный от нуля вклад дадут лишь те члены, для которых знаки у $Q(1s)$ и $Q(2s)$ противоположны. Следовательно,

$$p_1 - p_1' = -(p_2 - p_2') = \pm\frac{h\nu_s}{c}\alpha_s, \qquad \nu_s = \frac{c}{h}|p_1 - p_1'|, \tag{43}$$

$$K_{n_1 n_2}^{n_1' n_2'} = -\frac{e_1 e_2 h^2}{4\pi\Omega}\sum_s \frac{(\tilde{a}_1'\gamma_1 a_1 \cdot A_s)(\tilde{a}_2'\gamma_2 a_2 \cdot A_s)}{|p_1 - p_1'|} \times$$
$$\times \left(\frac{1}{|p_1 - p_1'| + \frac{(E_1' - E_1)}{c}} + \frac{1}{|p_1 - p_1'| + \frac{(E_2' - E_2)}{c}}\right). \tag{44}$$

В силу соотношений (43) сумма по s состоит уже только из четырех членов, что соответствует двойному знаку в (43) и двум взаимно перпендикулярным направлениям поляризации. Вместо суммирования по s, следовательно, можно усреднить по всем направлениям единичного вектора A_s, перпендикулярного $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$, и умножить на 4. Если это проделать, учитывая, что в силу закона сохранения энергии $E_1 - E_1' = E_2' - E_2$, то найдем

$$K_{n_1 n_2}^{n_1' n_2'} = -\frac{e_1 e_2 h^2}{\pi\Omega}\Big[(\tilde{a}_1'\gamma_1 a_1 \cdot \tilde{a}_2'\gamma_2 a_2) -$$
$$- \frac{(\tilde{a}_1'\gamma_1 a_1 \cdot (p_1 - p_1'))(\tilde{a}_2'\gamma_2 a_2 \cdot (p_1 - p_1'))}{(p_1 - p_1')^2}\Big]\frac{1}{(p_1 - p_1')^2 - \left(\frac{E_1 - E_1'}{c}\right)^2}. \tag{45}$$

К выражению (45) мы должны еще добавить матричный элемент (36);

согласно Мёллеру, его значение есть

$$\left(\frac{e_1e_2}{r_{12}}\right)^{n_1'n_2'}_{n_1n_2} = \frac{e_1e_2h^2}{\pi\Omega}\,\frac{(\tilde{a}_1'a_1)(\tilde{a}_2'a_2)}{(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2')^2}\,. \tag{46}$$

Сумма равна:

$$H^{n_1'n_2'}_{n_1n_2} = K^{n_1'n_2'}_{n_1n_2} + \left(\frac{e_1e_2}{r_{12}}\right)^{n_1'n_2'}_{n'_1n_2} = \frac{e_1e_2h^2}{\pi\Omega}\cdot\frac{(\tilde{a}_1'a_1)(\tilde{a}_2'a_2)-(\tilde{a}_1'\gamma_1a_1\cdot\tilde{a}_2'\gamma_2a_2)}{(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_1')^2-\left(\frac{E_1-E_1'}{c}\right)^2}+$$

$$+\frac{e_1e_2h^2}{\pi\Omega\,|\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_1'|^2}\,\frac{-\left(\frac{E_1-E_1'}{c}\right)^2(\tilde{a}_1'a_1)(\tilde{a}_2'a_2)+(\tilde{a}_1'\gamma_1a_1\cdot(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_1'))(\tilde{a}_2'\gamma_2a_2\cdot(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_1'))}{(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_1')-\left(\frac{E_1-E_1'}{c}\right)^2}\,. \tag{47}$$

Первое слагаемое в правой части есть в точности мёллеровская энергия взаимодействия. Таким образом, нам предстоит доказать, что второе слагаемое равно нулю. Прежде всего, используя законы сохранения энергии и импульса, запишем его числитель в симметричной форме:

$$+\frac{E_1-E_1'}{c}(\tilde{a}_1a_1)\frac{E_2-E_2'}{c}(\tilde{a}_2'a_2)-(\tilde{a}_1'\gamma_1a_1\cdot(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_1'))(a_2'\gamma_2a_2\cdot(\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_2')).$$

Для доказательства равенства нулю этого выражения достаточно показать, что

$$(E_1-E_1')\tilde{a}_1'a_1 = -c\,(\tilde{a}_1'\gamma_1a_1\cdot(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_1')) \tag{49}$$

и что соответствующее соотношение справедливо для второй частицы. Но (49) следует непосредственно из уравнения Дирака

$$E_1a_1 = -c\,(\mathbf{p}_1\gamma_1a_1) - m_1c^2\delta_1a_1 \tag{50}$$

и соответствующего уравнения для $\tilde{a}_1'$.

Между прочим, легко убедиться, что формулу Мёллера можно вывести точно таким же путем, если одна из частиц является связанной.

Представляется удовлетворительным, что в нашем приближении не будет происходить никакого излучения. Может показаться, что будут возможны процессы, при которых оба электрона меняют свое состояние и излучается два кванта. Однако в таких процессах закон сохранения импульса должен был бы выполняться дважды (импульс одного из квантов должен равняться изменению импульса одного из электронов и то же самое должно иметь место для другого кванта и другого электрона), а закон сохранения энергии — один раз. Но это невозможно, поскольку ни один из электронов не обладает отрицательной энергией в конечном состоянии.

Один их нас (Г. Бете) хотел бы поблагодарить Фонд Рокфеллера за предоставление стипендии, сделавшей возможным его пребывание в Риме.

Рим, Институт теоретической физики

К статье 50

Статьи [Б68], [Б69] и 50 посвящены теории раман-эффекта. Интерес Ферми к этой области был вызван главным образом экспериментами Разетти, выполненными им в Пасадене (в лаборатории Милликена) и в Риме.

В Пасадене Разетти обнаружил, что полностью симметричное колебание молекулы CO_2 проявляется в рамановском спектре как группа из четырех близко расположенных линий вместо ожидавшейся одной линии. Этот загадочный результат стал предметом многочисленных обсуждений с Ферми, когда Разетти вернулся в Рим. Несколько неудовлетворительных объяснений было отброшено, пока, наконец, Ферми не нашел верной интерпретации — случайного вырождения первого возбужденного состояния упоминавшегося выше колебания молекулы CO_2 (статья [Б68]). Это был первый пример явления, позднее наблюдавшегося в нескольких органических молекулах (оно получило название резонанса Ферми.— *Ред.*). Объяснение аномального на первый взгляд раман-эффекта в CO_2 вызвало большой интерес на Лейпцигской конференции по структуре молекул, где оно было доложено Разетти.

Экспериментальная часть работы [Б69] была выполнена Разетти методом возбуждения рамановского спектра резонансным излучением ртути с последующим поглощением возбуждающего излучения парами ртути. С помощью этого метода удалось сфотографировать слабый рамановский спектр второго порядка кристалла NaCl (этот кристалл вследствие симметрии решетки не дает спектра первого порядка).

В принадлежащей целиком Ферми теоретической части работы было показано, что в согласии с экспериментом рамановский спектр второго порядка NaCl должен быть непрерывным и простираться до удвоенной инфракрасной частоты поглощения, характерной для кристалла.

В 1947 г. Борн и Бредберн разработали гораздо более детальную теорию эффекта и нашли еще лучшее согласие с экспериментальными данными для NaCl. Возражения, высказывавшиеся Раманом и сотрудниками по поводу существования непрерывного спектра и его интерпретации, по-видимому, лишены оснований.

В статье 50 Ферми суммировал некоторые свои предыдущие результаты по теории раман-эффекта и распространил их на случаи, не рассматривавшиеся ранее.

Ф. Разетти

50

РАМАН-ЭФФЕКТ В МОЛЕКУЛАХ И КРИСТАЛЛАХ *

Эта работа, в первой части которой содержится краткий обзор общих критериев для интерпретации раман-эффекта в молекулах и кристаллах, посвящена изучению некоторых исключительных случаев, примечательных тем, что они позволяют интерпретировать рамановские спектры углекислого газа и четыреххлористого углерода; они объясняют также появление крайне слабого непрерывного спектра в каменной соли, для которой обычная теория предсказала бы отсутствие эффекта Рамана; они же позволяют полностью упорядочить рамановские спектры кальцита и азотнокислого натрия.

1. В рамановском спектре молекулы газа или жидкости обычно наблюдаются некоторые линии, соответствующие всем или некоторым колебательным частотам молекулы, находящейся в основном электронном состоянии; гораздо реже наблюдаются линии, соответствующие изменению вращательного состояния. Действительно, за очень немногими исключениями, последние появляются со значительной интенсивностью только вокруг возбуждающей линии и часто маскируются окружающим ее «гало»; кроме того, они хорошо наблюдаются только в газах, поскольку в жидкостях обычно они накладываются друг на друга. Наконец, известен только один случай раман-эффекта, в котором наверняка наблюдался переход между двумя электронными уровнями. В настоящей работе мы ограничимся обсуждением «колебательного эффекта Рамана», представляющего собой самый распространенный случай. И особенно мы займемся здесь некоторыми исключениями из обычных правил отбора для раман-эффекта, которые следует всегда учитывать при интерпретации рамановского спектра молекулы или кристалла. Некоторые из этих исключительных случаев уже были рассмотрены в предварительных сообщениях [1]. Обсуждению этих исключительных случаев предпошлем краткое резюме критериев, принимающихся для установления обычных правил отбора в раман-эффекте.

При описании колебаний молекулы ее деформации удобно рассматривать в системе нормальных координат $q_1, q_2 \ldots, q_f$, число которых равняется числу главных колебаний молекулы.

С помощью этих координат потенциальная энергия упругой деформации молекулы в первом приближении записывается в форме

$$\sum_i 2\pi^2 \nu_i^2 q_i^2, \qquad (1)$$

* *L'effetto Raman nelle molecole e nei cristalli.* Memorie Accad. d'Italia, 1932, 3 (1), Fis., 239—256. Представлена на заседании 11 марта 1932 г.

[1] E. Fermi. Zs. f. Phys., 1931, 71, 250; E. Fermi, F. Rasetti, Zs. f. Phys., 1931, 71, 689.

а кинетическая энергия имеет также ортогональную форму

$$\frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{q}_i^2. \tag{2}$$

Во втором приближении в потенциальной энергии появляются члены третьей и более высокой степени по q; эти члены приводят к некоторой ангармоничности колебаний молекулы.

Как известно, пульсации электрической поляризуемости молекулы определяют, по существу, условия образования рамановских линий. Для рассмотрения этих пульсаций заметим, что электрическая поляризуемость, а потому и все компоненты α_{xx}, $\alpha_{xy}, \ldots$ представляющего ее тензора — функции координат q; разлагая такие функции в степенной ряд, находим

$$\alpha_{xy} = \alpha_{xy_0} + \sum_i \alpha_{xyi} q_i + \sum_{ij} \alpha_{xyij} q_i q_j + \ldots \tag{3}$$

и аналогичные выражения для других компонент тензора.

В первом приближении, когда изучаются только самые интенсивные линии, в разложении (3) следует сохранить только линейные члены, не учитывая ангармоничность колебаний. Так как в гармоническом осцилляторе координаты представлены матрицами, в которых отличны от нуля только элементы, соответствующие переходам с изменением колебательного квантового числа на ± 1, то из этого сразу следует, что в нашем приближении в раман-эффекте смогут появиться только основные частоты. Для того чтобы одна из основных частот действительно наблюдалась, коэффициент при соответствующей координате в разложении (3) должен быть отличным от нуля, по крайней мере для одной из компонент тензора.

Далее, как нередко бывает, специфическая симметрия молекулы приводит к тому, что при некоторых координатах коэффициенты точно равны нулю; в этих случаях соответствующая частота в эффекте Рамана будет запрещена. Не углубляясь в обсуждение зависимости этих правил отбора от элементов молекулярной симметрии [2], проиллюстрируем это на простом примере молекул типа AB_2, в которых атом A в равновесном состоянии находится в центре отрезка, соединяющего два атома B. В молекуле этого типа имеются три основные частоты ν_1, ν_2, ν_3, одна из которых дважды вырождена. Соответствующие формы колебаний схематически изображены на рис. 1. Частота ν_2 вырождена, поскольку соответствующее колебание может совершаться как в плоскости рисунка, так и в перпендикулярной ей плоскости. Симметрия приводит к тому, что, если колебания молекулы происходят по типу колебаний с частотами ν_2 или ν_3, все компоненты ее поляризуемости явно будут четными функциями удаления

[2] G. Placzek. В кн. «Leipziger Vorträge», Leipzig, 1931.

от равновесного положения (действительно, в противоположных по фазе положениях поляризуемость одинакова). Тогда в разложении поляризуемости в степенной ряд по нормальным координатам будут равны нулю все коэффициенты при нечетных степенях нормальных координат, соответствующих ν_2 и ν_3; в частности, будут отсутствовать линейные члены и, следовательно, соответствующие частоты будут неактивными в эффекте Рамана. Частота же ν_1 будет рамановски активной. Из соображений подобного типа сразу видно также, что частоты ν_2 и ν_3 активны в инфракрасном спектре, а ν_1 — нет.

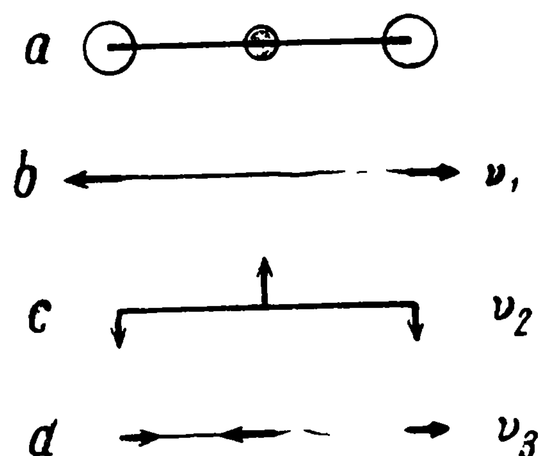


Рис. 1

Рассуждения, аналогичные развитым здесь для простого примера, помогают в ряде случаев получить представление о природе самых интенсивных рамановских линий; при этом наблюдения эффекта Рамана следует по возможности дополнять изучением спектра инфракрасного поглощения и поляризации рамановских и инфракрасных линий.

Кроме линий, соответствующих основным колебательным частотам, иногда в рамановских спектрах наблюдаются также линии, как правило, малой интенсивности, связанные с обертонами и комбинационными частотами. Их появление обусловлено двумя причинами, а именно:

а) присутствием в разложении (3) членов второго и более высокого порядков, разрешающих переходы с изменением колебательных квантовых чисел более чем на единицу;

б) ангармоничностью колебаний.

Соображения, подобные развитым здесь в случае молекул, могут также служить руководством для интерпретации рамановских спектров кристаллов. Мы возвратимся к этой проблеме позднее, когда будем обсуждать раман-эффект на каменной соли.

Упомянутые здесь (как и обсуждаемые далее для случая кристаллов) правила отбора иногда не соблюдаются; эти исключения всегда необходимо учитывать при интерпретации рамановских спектров. Рассмотрим эти исключения на некоторых характерных примерах.

2. Рамановский спектр углекислого газа. Интересное исключение из обычных правил отбора в эффекте Рамана на многоатомных молекулах

может встретиться в том случае, когда случайно одна из основных частот и одна из комбинационных почти совпадают. Проиллюстрируем это на примере углекислого газа.

Рамановский спектр газообразного CO_2 [3] состоит из четырех линий. Две из них, довольно интенсивные, имеют частоты 1285 и 1388 *см*$^{-1}$, а две другие, значительно более слабые, — 1265 и 1408 *см*$^{-1}$. Поскольку молекула углекислого газа относится к типу, представленному на рис. 1, обычные правила отбора, которые уже обсуждались для этого случая, предсказали бы существование только одной интенсивной рамановской линии, соответствующей единственной основной (активной) частоте ν_1. Из данных по инфракрасному поглощению известны основные частоты ν_2 и ν_3, значения которых оказываются приблизительно равными соответственно 673 и 2350 *см*$^{-1}$. Зная ν_3, можно грубо оценить и частоту ν_1: если предположить, что взаимодействием двух атомов кислорода между собой можно пренебречь, путем несложного расчета получим

$$\nu_1 \cong \nu_3 \sqrt{\frac{12}{2\cdot 16 + 12}} \cong 1230 \text{ см}^{-1}$$

(12 и 16 — атомные веса углерода и кислорода).

Частоты четырех линий, которые фактически наблюдаются, не очень далеки от этого значения; однако необходимо объяснить, почему наблюдаются четыре линии вместо одной.

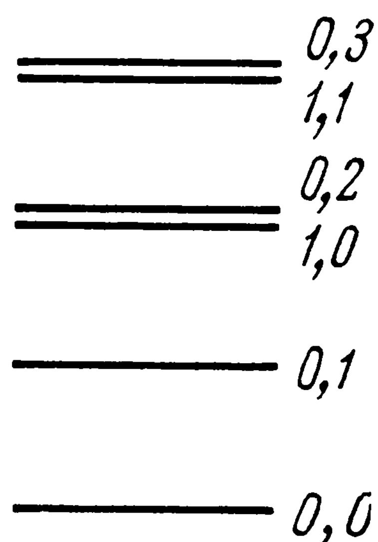


Рис. 2

Рассмотрим сначала две самые интенсивные линии; впоследствии увидим, как можно интерпретировать и две слабые компоненты.

Появление двух интенсивных линий вместо одной определяется тем, что случайно частота ν_1 почти совпадает с удвоенным значением частоты ν_2. На рис. 2 представлена теоретическая схема самых глубоких колебательных уровней CO_2. Эта схема упрощена, так как пренебрегалось вырожде-

[3] F. Rasetti. Nature, 1929, **123**, 205.

нием частоты ν_2 и допускалось, что два колебания с частотами ν_1 и ν_2 — точно гармонические и никак не связаны между собой. Частота ν_3 значительно выше двух других и поэтому здесь не играет роли. Числами на рисунке указаны колебательные квантовые числа уровней для частот ν_1 и ν_2. Согласно обычным правилам отбора, можно было бы ожидать только одну рамановскую линию, соответствующую переходу $(1,0) \to (0,0)$.

Тот же факт, что все-таки наблюдаются две интенсивных линии, зависит от того обстоятельства, что два энергетических уровня (1,0) и (0,2) случайно оказываются очень близкими друг к другу и поэтому сильно возмущают друг друга. По этой причине собственные функции, соответствующие им, по существу, даются линейными комбинациями невозмущенных функций с коэффициентами порядка единицы при обеих функциях. Из этого следует, что и то и другое состояния в эффекте Рамана могут интенсивно комбинировать с основным состоянием (0,0), поскольку в обоих

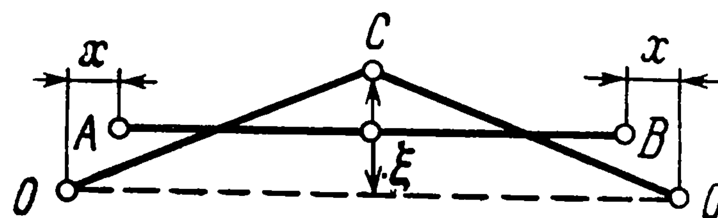


Рис. 3

состояниях представлена большая доля невозмущенной собственной функции состояния (1,0), которая интенсивно комбинирует с основным состоянием.

В действительности, ситуация несколько сложнее, поскольку, как уже было сказано, частота ν_2 вырождена. Поэтому следует пронумеровать собственные функции тремя квантовыми числами (даже если не рассматривать частоту ν_3, что, естественно, допустимо в нашем случае). Для определения колебаний молекулы выберем следующие координаты:

x — проекция смещения атомов кислорода на направление молекулярной оси;

ξ и η — проекция отрезка, соединяющего атом C с одним из атомов O, на два направления, перпендикулярные между собой, а также оси молекулы.

На рис. 3 линия AB соответствует равновесному положению молекулы; C, O, O — мгновенные положения углерода и двух атомов кислорода; схема спроектирована на плоскость, параллельную оси молекулы и ξ. Координата x соответствует частоте ν_1, а соответствующая колеблющаяся масса

$$m_1 = 2m,$$

где m — масса атома кислорода.

Две другие координаты ξ и η соответствуют вырожденной частоте ν_2; для них колеблющаяся масса

$$m_2 = \frac{2mM}{2m + M},$$

где M — масса атома углерода.

Чтобы охарактеризовать квантовое состояние невозмущенной системы, следует задать три квантовых числа (n_1, n_2', n_2''), относящиеся к трем координатам x, ξ и η. Энергия невозмущенной системы (без нулевой энергии) задается формулой

$$E_{n_1 n_2' n_2''} = h\nu_1 n_1 + h\nu_2 (n_2' + n_2'').$$

Так как $\nu_1 \cong 2\nu_2$, то четыре невозмущенных собственных значения (1, 0, 0) (0, 2, 0) (0, 1, 1) (0, 0, 2) почти совпадают друг с другом. Потенциальная энергия невозмущенной системы имеет вид

$$kx^2 + \alpha(\xi^2 + \eta^2),$$

где k и α — константы, значения которых сразу можно определить, зная частоты ν_1 и ν_2.

В качестве возмущения рассмотрим отклонения потенциальной энергии от квадратичной формы и прежде всего проанализируем эффект членов третьей степени по координатам. Сразу видно, что вследствие симметрии члены третьей степени приводятся только к двум типам

$$x^3 \text{ и } x(\xi^2 + \eta^2).$$

Первый член, зависящий только от координаты x, не связывает между собой различных колебаний; он представляет только ангармоничность колебания ν_1, так что нет необходимости его учитывать; он может быть включен в невозмущенную потенциальную энергию. Как возмущающую потенциальную энергию мы должны рассматривать только один член вида

$$U = \beta x(\xi^2 + \eta^2),$$

где β — константа.

Мы должны вычислить элементы матрицы возмущения, относящиеся к комбинациям четырех членов (1, 0, 0) (0, 2, 0) (0, 1, 1) (0, 0, 2). Это можно сделать сразу с помощью известных формул, представляющих матричные элементы координаты q осциллятора с массой m:

$$q_{n+1,\,n} = q_{n,\,n+1} = \sqrt{\frac{h}{8\pi^2\nu m}}\sqrt{n+1}.$$

Из этой формулы следует, что

$$x_{10} = x_{01} = \sqrt{\frac{h}{8\pi^2\nu_1 m_1}}, \qquad (\xi^2)_{02} = \xi_{01}\xi_{12} = \frac{h}{8\pi^2\nu_2 m_2}\sqrt{2};$$

отсюда сразу получаются искомые матричные элементы
$U(100, 020) = U(100, 002) = P, \quad U(100, 011) = 0$, где мы положили

$$P = \frac{\beta h^{3/2}}{16\pi^3 \sqrt{\nu_1 m_1}\, \nu_2 m_2}.$$

Итак, видно, что собственная функция (0, 1, 1) не связана возмущением с другими функциями; и поскольку она в невозмущенной задаче «неактивна» в эффекте Рамана, мы можем вовсе ее не рассматривать. Та часть матрицы, представляющей энергию, которая соответствует комбинациям трех других собственных функций, тогда будет

$$\begin{vmatrix} A & P & P \\ P & B & 0 \\ P & 0 & B \end{vmatrix},$$

где A — невозмущенное собственное значение функции (1, 0, 0) и B — невозмущенное собственное значение двух вырожденных собственных функций (0, 2, 0) и (0, 0, 2). Собственные значения предыдущей матрицы

$$B, \qquad \frac{A+B}{2} \pm \sqrt{2P^2 + \left(\frac{A-B}{2}\right)^2};$$

они соответствуют собственным функциям, которые являются линейными комбинациями невозмущенных функций (1, 0, 0) (0, 2, 0) (0, 0, 2). Собственное значение B соответствует линейной комбинации

$$(002) - (020),$$

не содержащей «активной» собственной функции (1, 0, 0). Поэтому линия, соответствующая переходу с этого уровня на основной, в эффекте Рамана не наблюдается. Итак, остаются два других собственных значения

$$\frac{A+B}{2} \pm \sqrt{2P^2 + \left(\frac{A-B}{2}\right)^2}, \tag{4}$$

собственные функции которых — линейные комбинации

$$\frac{1}{P}\left[\frac{A-B}{2} \pm \sqrt{2P^2 + \left(\frac{A-B}{2}\right)^2}\right]\cdot(100) + (020) + (002). \tag{5}$$

Они содержат «активную» собственную функцию (1, 0, 0), и, следовательно, обе являются «активными» в раман-эффекте.

Таким образом, прояснилось появление двух интенсивных рамановских линий. Наблюдавшийся эффект Рамана можно объяснить, предполагая, что два невозмущенных энергетических уровня A и B почти точно совпадают. Полагая в выражении (4) $A = B$, находим два энергетических

уровня

$$A \pm \sqrt{2}\,P, \tag{6}$$

которые, комбинируя с основным состоянием (0, 0, 0), и обусловливают две интенсивные рамановские линии; разность их частот равна

$$\Delta\nu = 2\sqrt{2}\,P. \tag{7}$$

Итак, из экспериментальной разности $\Delta\nu = 103$ *см*$^{-1}$ должны иметь $P = 36$ *см*$^{-1}$; эта величина P очень правдоподобна и приводит к значению константы B правильного порядка величины. В предположении $A = B$ линейные комбинации (5) имеют вид

$$\pm\sqrt{2}\cdot(100) + (020) + (002).$$

Доля «активной» собственной функции (1, 0, 0) в этих двух собственных функциях составляет около 50%, что привело бы к одинаковой интенсивности для двух рамановских линий. Так как на опыте найдено, что интенсивность линии 1388 *см*$^{-1}$ несколько выше интенсивности линии 1285 *см*$^{-1}$, то B должно быть немного меньше A.

Остается обсудить природу двух слабых линий. Они, по-видимому, обусловлены влиянием молекул, в которых квант с частотой $\nu_2 = 673$ *см*$^{-1}$ возбуждается тепловым движением и которые поэтому находятся в состоянии (0, 1) упрощенной схемы, приведенной на рис. 2. При обычной температуре фактор Больцмана для этого состояния составляет 1/28; поскольку статистический вес равен 2, примерно 1/14 всех молекул находится в этом состоянии. Состояние (0, 1) в эффекте Рамана комбинирует с состоянием (1, 1); поскольку последнее лежит довольно близко к уровню (0, 3) (см. рис. 2), согласно прежнему механизму мы снова обнаруживаем две рамановские линии вместо одной.

Для количественного расчета, естественно, необходимо учитывать, что частота ν_2 вырождена. Точнее, следует рассмотреть матрицу энергии, соответствующую комбинациям шести квантовых состояний (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 3, 0), (0, 2, 1), (0, 1, 2), (0, 0, 3).

Используя прежние обозначения, находим следующую матрицу

$$\begin{vmatrix} A' & 0 & \sqrt{3}P & 0 & P & 0 \\ 0 & A' & 0 & P & 0 & \sqrt{3}P \\ \sqrt{3}P & 0 & B' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & B' & 0 & 0 \\ P & 0 & 0 & 0 & B' & 0 \\ 0 & \sqrt{3}P & 0 & 0 & 0 & B' \end{vmatrix},$$

где A' и B' — невозмущенные энергетические уровни.

Предыдущая матрица делится на две равные матрицы третьего порядка, связывающие собственные функции (1, 1, 0) (0, 3, 0) (0, 1, 2) или остальные (1, 0, 1) (0, 0, 3) (0, 2, 1). Эти матрицы таковы

$$\begin{vmatrix} A' & \sqrt{3}P & P \\ \sqrt{3}P & B' & 0 \\ P & 0 & B' \end{vmatrix}.$$

Они имеют собственные значения

$$B', \quad \frac{A'+B'}{2} \pm \sqrt{4P^2 + \left(\frac{A'-B'}{2}\right)^2}. \tag{8}$$

Собственное значение B' не наблюдается в эффекте Рамана, поскольку соответствующая собственная функция

$$(030) - \sqrt{3}(012)$$

не содержит «активной» собственной функции (1, 1, 0). Остальные два собственных значения соответствуют двум функциям

$$\frac{1}{P}\left\{\frac{A'-B'}{2} \pm \sqrt{4P^2 + \left(\frac{A'-B'}{2}\right)^2}\right\}(110) + \sqrt{3}(030) + (012),$$

содержащим функцию (1, 1, 0), которая и делает возможными рамановские переходы. Если в этом случае мы предположим $A' = B'$, то найдем два собственных значения $A \pm 2P$. Поэтому расщепление двух слабых рамановских линий будет

$$\Delta\nu' = 4P. \tag{9}$$

Итак, сравнение с выражением (6) дает

$$\frac{\Delta\nu'}{\Delta\nu} = \sqrt{2}$$

в прекрасном согласии с экспериментальным значением 1,4 для соотношения между расщеплениями слабых и интенсивных линий.

Явления, аналогичные обсужденному здесь для случая углекислого газа, свойственны также и другим молекулам. Примером этого может служить четыреххлористый углерод. В молекуле этого вещества имеются четыре основных частоты, каждая из которых активна в раман-эффекте.

Экспериментально найдено, что самая высокая из этих частот расщепляется на две компоненты с частотами 758 и 789 $см^{-1}$. Этот факт объясняется тем, что две другие основные частоты, наблюдаемые в эффекте Рамана, 314 и 459 $см^{-1}$, в сумме дают 773 $см^{-1}$. Эта сумма находится почти точно посередине между частотами 758 и 789 $см^{-1}$. Поэтому мы снова имеем

дело со случайным вырождением, обусловливающим расщепление на две компоненты указанной рамановской частоты. Четыреххлористый углерод представляет также интересный пример появления обертона в раман-эффекте; в действительности слабая рамановская линия наблюдается при 1540 *см*$^{-1}$, что соответствует удвоенному значению частоты, расщепленной на дублет вследствие случайного вырождения.

3. Эффект Рамана в кристаллах каменной соли. Общие правила, позволяющие определить, какие именно линии должны появиться в рамановском спектре кристалла, можно вывести подобно тому, как это делается в случае молекул.

Кристалл состоит из колоссального количества атомов, так что, естественно, он всегда имеет огромное число характеристических частот, расположенных так, что они составляют непрерывный спектр. Однако в эффекте Рамана обычно наблюдают дискретные линии; как мы увидим, это зависит от того, что в рамановском спектре кристалла, по крайней мере в первом приближении, наблюдаются только те «упругие» частоты, которые соответствуют упругим колебаниям кристалла с бесконечной длиной волны.

В кристалле, состоящем в совокупности n-атомных элементарных ячеек, упругие колебания, как известно, можно охарактеризовать длиной волны и направлением распространения упругих волн. Для каждой длины волны и направления распространения, вообще говоря, имеются $3n$ упругих частоты, три из которых при увеличении длины волны стремятся к нулю, в то время как остальные $3n - 3$ стремятся к типичным для инфракрасных частот значениям.

Чтобы нагляднее проследить поведение этих различных упругих частот в эффекте Рамана, рассмотрим некоторую часть кристалла, размеры которой меньше длины волны света, но больше расстояния между атомами. Пусть в кристалле возбуждается упругое колебание; оно будет вызывать существенные для раман-эффекта пульсации электрической поляризуемости кристалла. Можно предположить, что в первом приближении изменение электрической поляризуемости в некотором месте кристалла будет пропорционально упругой деформации кристалла именно в этой области. Поэтому если длина волны упругого колебания, определяющего изменения поляризуемости, меньше размеров рассматриваемой части кристалла, то изменения электрической поляризуемости в точках, находящихся в противоположной фазе упругих колебаний, противоположны друг другу, так что эффект, усредненный по всему кристаллу, будет равен нулю. Отличный от нуля эффект в этом приближении может существовать только благодаря упругим колебаниям с длиной волны, сравнимой с размерами кристалла, т. е. практически бесконечной. Более точный анализ показывает, что активными в эффекте Рамана будут те упругие колебания, длина волны которых равна по порядку величины длине волны света, т. е. гораздо больше межатомных расстояний.

Это объясняет, почему обычно в раман-эффекте на кристаллах наблюдают дискретные частоты вместо непрерывного спектра; действительно, наблюдаемые частоты соответствуют колебаниям, в которых составляющие кристаллическую решетку отдельные элементарные ячейки остаются «жесткими» и колеблются друг относительно друга. Естественно, и для этих колебаний имеются дополнительные правила отбора, вполне аналогичные правилам, справедливым для молекул, и определяющиеся особыми симметриями, характерными для атомной структуры кристалла. В частности, симметрия кристалла может быть такова, что все частоты в раман-эффекте запрещены, так что в первом приближении эффект Рамана на кристалле отсутствует.

Такой случай и имеет место в каменной соли. Решетка этого кристалла, как хорошо известно, состоит из двух простых кубических гранецентрированных решеток, одна из которых заполняется атомами хлора, другая — атомами натрия. Упругие колебания с бесконечной длиной волны получаются в том случае, когда одна решетка может как целое колебаться относительно другой; итак, имеется только одна, трижды вырожденная частота. Нетрудно убедиться, что в эффекте Рамана она неактивна, поскольку зависимость поляризуемости кристалла от относительного смещения двух решеток хлора и натрия не ниже квадратичной.

Отсюда следует, что в каменной соли не должно быть никакого эффекта Рамана, по крайней мере, если ограничиться наблюдением интенсивного явления первого порядка; и этот вывод вполне согласуется с опытом. Однако Разетти удалось обнаружить рамановский спектр также и в каменной соли, но при помощи достаточно светосильной установки и очень продолжительных экспозиций.

Однако у этого спектра совсем другой вид, чем у спектров, которые обычно наблюдаются на кристаллах. В то время как обычные спектры состоят из дискретных линий, рамановский спектр каменной соли — непрерывный спектр, который, начиная от возбуждающей линии (в наблюдениях Разетти это линия ртути 2537 $см^{-1}$), распространяется от нее с довольно нерегулярным распределением интенсивности на расстояние около 365 $см^{-1}$.

Теоретическую интерпретацию этого раман-эффекта легко получить, если предположить, что это эффект второго порядка. Чтобы без труда убедиться в том, что рамановский спектр второго порядка должен быть непрерывным, а не дискретным, следует заметить, что локальные изменения электрической поляризуемости в кристалле зависят от локальной деформации кристалла. Если в первом приближении изменение поляризуемости предполагается пропорциональным деформации, то усредненный по всему кристаллу эффект равен нулю, за исключением упругих колебаний с бесконечной длиной волны. Поэтому, как уже указывалось, имеются дискретные рамановские линии, соответствующие именно частотам упругого колебания кристалла с бесконечной длиной волны. Если же линейные по изменению электрической поляризуемости члены равняются

нулю, как это бывает в случае каменной соли, то следует рассматривать и квадратичные члены, которые уже не обращаются в нуль даже для упругих волн малой длины (поскольку и в точках противоположной фазы они имеют одинаковый знак и поэтому не сокращаются при усреднении по всему кристаллу). Таким образом, в то время как в раман-эффекте первого порядка активны только частоты упругих колебаний с бесконечной длиной волны, в эффекте второго порядка активными являются частоты всех длин волн: спектр второго порядка оказывается непрерывным, что и наблюдается на самом деле.

Для более точного изучения случая каменной соли введем систему координат x, y, z, в начале которой находится один из атомов Cl. Если обозначить через a расстояние между соседними атомами Cl и Na, то координаты равновесных положений атомов будут $x = n_1 a$, $y = n_2 a$, $z = n_3 a$, где n_1, n_2, n_3 — целые числа. В зависимости от того, будет ли сумма $n_1 + n_2 + n_3$ четной или нечетной, получим атом Cl или Na.

При каждом значении волнового вектора $f \equiv (f_1, f_2, f_3)$ кристаллическая решетка обладает шестью характеристическими колебаниями с шестью собственными частотами

$$\omega_i(f) \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6),$$

и каждому из этих колебаний соответствует нормальная координата q_{if}. Смещение атома решетки, выраженное через нормальные координаты, будет

$$\xi_n = \sum_f \sum_{i=1}^{6} q_{if} \left| \begin{matrix} A_{if} \\ B_{if} \end{matrix} \right| \cos\left[2\pi a (n_1 f_1 + n_2 f_2 + n_3 f_3) + \begin{matrix} \varphi_{if} \\ \psi_{if} \end{matrix}\right], \tag{10}$$

где верхние (A, φ) или нижние (B, ψ) величины следует взять в зависимости от того, четным или нечетным будет $n_1 + n_2 + n_3$, т. е. от того, идет ли речь об атоме хлора или натрия. Суммировать необходимо по всем волновым числам спектра Дебая.

Очевидно, что поляризуемость k атома (n) зависит от его смещения относительно соседних атомов; поэтому она является функцией величин $\xi_{n+l} - \xi_n$, где n и l — сокращенные обозначения для совокупности трех величин $n_1 n_2 n_3$ и $l_1 l_2 l_3$. Разлагая эту функцию в степенной ряд до членов второго порядка, можно найти

$$k = k_0 + \sum_l \alpha_l (\xi_{n+l} - \xi_n) + \sum_{jl} \beta_{jl} (\xi_{n+j} - \xi_n)(\xi_{n+l} - \xi_n). \tag{11}$$

Вследствие особой симметрии нашей решетки (каждый атом которой находится в некотором центре симметрии), очевидно, будет $\alpha_l = -\alpha_{-l}$. Поэтому предыдущее выражение принимает вид

$$k = k_0 + \frac{1}{2} \sum_l \alpha_l (\xi_{n+l} - \xi_{n-l}) + \sum_{jl} \beta_{jl} (\xi_{n+j} - \xi_n)(\xi_{n+l} - \xi_n). \tag{12}$$

Среднюю поляризуемость всего кристалла можно будет получить, заменяя ξ их выражениями из соотношения (10) и усредняя по всей решетке; при этом следует заметить, что атомы $n + l$ и $n - l$ являются атомами одного и того же типа. Поскольку все другие члены при усреднении сокращаются, то без труда можно найти выражение вида

$$\overline{k} = k_0 + \sum_f \sum_{r, s=1}^{6} A_{rsf} q_{rf} q_{sf}. \qquad (13)$$

Этому изменению электрической поляризуемости кристалла явно соответствуют рамановские частоты

$$\omega_i(f) + \omega_k(f), \qquad \omega_i(f) - \omega_k(f), \qquad 2\omega_i(f), \qquad (14)$$

т. е. комбинационные частоты, которые получаются сложением или вычитанием двух упругих частот с одинаковым значением волнового вектора f.

Поэтому рамановский спектр второго порядка будет распространяться (с изменениями интенсивности, которые трудно было бы рассчитать количественно) от нулевой частоты вплоть до частоты, равной удвоенной максимальной частоте. Значение последней известно из наблюдений в инфракрасной области и лежит в районе 60 *мкм*, а из рамановского спектра можно рассчитать частоту, оказывающуюся довольно близкой к этому значению, около 55 *мкм*.

4. Рамановский спектр кальцита. В рамановском спектре кальцита [4] наблюдается шесть частот: 155, 282, 714, 1088, 1438, 1741 $см^{-1}$. Интерпретация пяти низших частот не имеет никаких интересных особенностей, и поэтому настоящий раздел посвящается изучению частоты 1741 $см^{-1}$, которая как раз представляет определенный интерес.

В кальците, как и во всех кристаллах, содержащих комплексные ионы CO_3, NO_3, SO_4, NH_4 и т. д., частоты могут быть разделены на внутренние и внешние. Первые, как правило, самые высокие, соответствуют колебаниям различных частей комплексного иона друг относительно друга. Вторые же соответствуют колебаниям ионов друг относительно друга без значительных внутренних деформаций. Внутренние частоты легко отличить от внешних как по тому, что они являются более высокими, так и по тому, что под влиянием кристаллической решетки они сдвигаются лишь незначительно; поэтому они с небольшими смещениями проявляются во всех кристаллах, содержащих один и тот же комплексный ион, и даже в растворах, содержащих его. Итак, следует ожидать, что в кальците будут присутствовать некоторые внутренние частоты, соответствующие колебаниям иона CO_3, и некоторые внешние частоты.

[4] Эти данные цитируются в кн.: K. W. F. Kohlrausch. Der Smekal-Raman Effekt, Berlin, 1931. По-видимому, другие линии, приводимые Кольраушем как неопределенные, обусловлены примесями.

Ион CO_3 имеет плоскую структуру, причем атом углерода находится в центре равностороннего треугольника, в вершинах которого расположены три атома кислорода. Простой анализ упругих частот такой системы показывает, что их четыре, а именно:

одна частота ν_1 соответствует колебанию, в котором атом углерода остается в покое, в то время как треугольник из трех атомов кислорода попеременно сужается и расширяется, сохраняя собственную симметрию;

две частоты ν_2 и ν_3, дважды вырожденные, соответствуют колебаниям четырех атомов в той плоскости, в которой они лежат;

одна частота ν_4 соответствует колебанию атома углерода по направлению, перпендикулярному к плоскости трех атомов кислорода, которые, сохраняя неизменным расстояние между собой, колеблются «дополнительным» к колебанию атома углерода образом, так что центр тяжести системы остается неподвижным.

Легко видеть, что для свободного иона CO_3 частоты ν_1, ν_2, ν_3 активны в рамановском спектре, а частоты ν_2, ν_3, ν_4 — в инфракрасном спектре.

Значения этих четырех частот слегка изменяются для связанного в кристаллической решетке иона CO_3. Итак, в случае кальцита три рамановски активных частоты иона CO_3 могут быть идентифицированы следующим образом: $\nu_1 = 1088$, $\nu_2 = 714$, $\nu_3 = 1438$ *см*$^{-1}$. Неактивная частота ν_4, которая не наблюдается в эффекте Рамана, все-таки известна из измерений инфракрасного поглощения; она близка к 870 *см*$^{-1}$. Такую же частоту, кстати, наблюдают и в виде крайне слабой рамановской линии в других содержащих ион CO_3 кристаллах, например в арагоните, где положение иона в кристаллической решетке вызывает легкие его деформации, делающие рамановски активной частоту ν_4, которая, согласно сказанному, неактивна как в случае свободного иона, так и в том случае, когда он связан в кристаллической решетке кальцита. Две частоты 155 и 282 *см*$^{-1}$ рамановского спектра кальцита интерпретируются без труда; они обусловлены внешними колебаниями решетки. Итак, остается объяснить лишь самую высокую частоту 1741 *см*$^{-1}$.

Довольно хорошее совпадение этой частоты с удвоенным значением неактивной частоты ν_4 иона CO_3 делает правдоподобным предположение о какой-то ее связи с обертоном частоты ν_4. Однако имеется характерная трудность для такой интерпретации; действительно, мы видели, что в кристаллах следует ожидать как раз непрерывный, а не дискретный рамановский спектр второго порядка. Теперь мы приведем аргументы, имеющие целью доказать, что при определенных обстоятельствах линии, соответствующие высшим гармоникам, могут наблюдаться и в эффекте Рамана на кристаллах.

Попытаемся понять, как будет выглядеть раман-эффект второго порядка, соответствующий некоторой внутренней частоте группы CO_3 кальцита.

Прежде всего заметим, что каждая кристаллическая ячейка в решетке кальцита содержит две молекулы $CaCO_3$. Поэтому имеется две

простые решетки ионов CO_3. Группы CO_3, принадлежащие этим двум простым решеткам, расположены в параллельных плоскостях, перпендикулярных тройной оси, и отличаются тем, что одна группа повернута в своей плоскости на 60° по отношению к другой. При наличии в кристаллической решетке упругой волны, деформирующей ионы CO_3, упругие силы, стремящиеся восстановить нормальную конфигурацию ионов, в первом приближении будут силами, действующими между принадлежащими одному и тому же иону атомами; только в следующем приближении необходимо рассматривать также силы, обусловленные влиянием деформации окружающих ионов, в свою очередь деформированных.

Итак, частота колебания будет мало зависеть от длины волны упругой деформации. Изменение частоты некоторого типа внутренних колебаний, возникающее при изменении длины упругих волн, по порядку величины (несколько десятков волновых чисел) будет таким же, как и изменение частоты этого типа внутренних колебаний, соответствующее принадлежности данного иона к различным кристаллическим решеткам.

Уже этот факт приводит к тому, что непрерывные спектры, которые в раман-эффекте второго порядка соответствуют высшим гармоникам одного внутреннего колебания, фактически должны сократиться до полос довольно малой ширины. При определенных обстоятельствах эта ширина может еще значительно уменьшиться, так что непрерывный спектр в конце концов превратится в линию. Причины этого таковы.

В ячейке решетки кальцита содержатся два иона CO_3; поэтому при любом значении волнового вектора каждой собственной частоте иона CO_3 будут соответствовать две частоты, не очень далекие от частоты соответствующего колебания в свободном ионе. В определенных условиях, как мы покажем на примере, может оказаться, что сумма этих частот не зависит от длины упругих волн, хотя сами частоты зависят от нее (правда, слабо). Тогда непрерывный спектр, который обычно в эффекте Рамана второго порядка соответствует сумме двух указанных частот, очевидно, превращается в линию.

Приведем очень простой пример тех обстоятельств, при которых сумма двух частот может оказаться не зависящей от длины упругих волн: рассмотрим цепочку равноотстоящих друг от друга атомов (одномерную решетку). Пусть каждый атом подвергается действию довольно интенсивной упругой силы, которая стремится удержать его в равновесном положении (эта сила в нашей модели соответствует *внутренним* восстанавливающим силам иона). Далее, предположим, что на атом действуют также силы, пропорциональные изменениям его расстояния от двух соседних атомов; но пусть последние силы будут значительно слабее предыдущих, так чтобы они могли вызвать только незначительные изменения частот колебания атомов. Следует как-то отобразить в нашей одномерной модели то обстоятельство, что решетка кальцита содержит два иона CO_3 в каждой ячейке. Для этого предположим, что в указанной цепочке каждая ячейка составлена из совокупности двух атомов так, что различные атомы,

хотя и имеющие одинаковую массу, регулярно чередуются (заметим, что в решетке кальцита различие между двумя ионами CO_3, принадлежащими разным простым решеткам, состоит в разной ориентации треугольника из трех атомов кислорода).

Обозначим через a расстояние между двумя соседними атомами цепочки, так что периодичность линейной решетки будет $2a$. Пусть k — коэффициент упругой силы, стремящейся возвратить каждый атом в его равновесное состояние, и r — коэффициент силы, связывающей его с двумя соседними атомами; по предположению $k \gg r$. Нетрудно записать уравнение движения наших атомов: если x_n — смещение n-го атома цепочки, то

$$m\ddot{x}_n = -kx_n + r(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n). \tag{15}$$

Эту систему уравнений сразу можно проинтегрировать, полагая

$$x_n = Ae^{2\pi i(\omega t - gn)}, \tag{16}$$

где A — постоянная амплитуда. Подстановка в уравнение (15) дает

$$-4\pi^2 m\omega^2 = -k + 2r(\cos 2\pi g - 1), \tag{17}$$

т. е.

$$\omega^2 = \frac{k}{4\pi^2 m} + \frac{r}{2\pi^2 m}(1 - \cos 2\pi g). \tag{18}$$

Вспомнив, что по предположению $k \gg r$, для извлечения квадратного корня из выражения (18) разложим его по r и пренебрежем квадратичными членами. Таким образом, находим частоту ω колебания в зависимости от g:

$$\omega = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} + \frac{r}{2\pi\sqrt{km}}(1 - \cos 2\pi g). \tag{19}$$

Поскольку период нашей решетки равен $2a$, упругие волны, для которых значения g отличаются на $1/2$, имеют одинаковую длину волны. Итак, рассмотрим две упругие волны, у которых g имеют значения

$$g_1 = \frac{f}{2}; \qquad g_2 = \frac{f+1}{2} \tag{20}$$

и которые поэтому соответствуют одному и тому же волновому числу $f/2a$ упругих колебаний. Частоты, соответствующие этим двум волнам, согласно формуле (19), будут

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} + \frac{r}{2\pi\sqrt{km}}(1 - \cos \pi f), \\ \omega_2 &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} + \frac{r}{2\pi\sqrt{km}}(1 + \cos \pi f). \end{aligned} \tag{21}$$

В эффекте Рамана второго порядка можно наблюдать сумму двух частот, имеющих одинаковое волновое число упругих колебаний. В нашем случае такая сумма имеет вид

$$\omega_1 + \omega_2 = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} + \frac{r}{\pi\sqrt{mk}} \tag{22}$$

и не зависит от волнового числа. Можно заключить, что при этих обстоятельствах во втором порядке будет наблюдена четко выраженная рамановская линия, а не непрерывный спектр, как это обычно происходит.

Из этих соображений следует, что, вероятно, линия 1741 *см*$^{-1}$ кальцита соответствует высшей гармонике неактивной частоты иона CO_3. Кстати, аргументы, только что развитые для случая одномерной решетки, легко обобщить и на случай трехмерной решетки. Не вдаваясь в подробности этого расчета, упомяну только о результате. Для каждого значения волнового вектора имеются две частоты, связанные с каждой внутренней упругой частотой; они соответствуют двум частотам (21) в предыдущем примере и мало отличаются от соответствующей частоты, которая существовала бы для свободного иона. Если же оправдано предположение о том, что на ионы данной простой решетки действуют упругие силы, обусловленные деформацией только ионов другой простой решетки, то сумма этих двух частот не будет зависеть от значения волнового вектора. В случае кальцита ионы CO_3, наиболее близкие к определенному иону CO_3, принадлежат иной простой решетке; однако на несколько большем расстоянии уже будут находиться ионы той же самой простой решетки. Поэтому следует полагать, что по какой-то неизвестной причине влияние ионов той же самой решетки является довольно слабым.

Спектр, довольно близкий к спектру кальцита, наблюдается и в азотнокислом натрии, кристаллическая структура которого очень похожа на структуру кальцита. В этом кристалле также наблюдается рамановская линия с частотой 1670 *см*$^{-1}$, которую, вероятно, можно интерпретировать как гармонику неактивной частоты иона NO_3.

К статье 51

В период между 1931 и 1933 гг. состоялось три важных международных конференции по ядерной физике. Первая, «Совещание по ядерной физике», состоялась в Риме с 11 по 18 октября 1931 г. при участии около сорока пяти физиков. Эта конференция происходила по инициативе Ферми и Корбино под покровительством Итальянской Академии. Опубликованные труды конференции «Fondazione Alessandro Volta, Convegno di fisica nucleare» (Reale Accademia d'Italia, Roma, 1932) включают только доклады и не содержат никаких протоколов обсуждений. В них нельзя найти ни одного упоминания о нейтроне или нейтрино. Однако нам известно, что на этой конференции Ферми и Паули беседовали о нейтрино (см. вводные замечания к статье 58).

Вторая конференция проходила в июле 1932 г. (Париж) в рамках Пятой международной конференции по электричеству.

Ферми был приглашен выступить с докладом; темой он избрал ядро, прочитав 7 июля 1932 г. доклад «Современное состояние физики атомного ядра» (статья 51).

Интерпретация опытов Боте и Кюри — Жолио, приведших к открытию нейтрона, еще оставалась неясной, а Майорана в Риме сразу же понял, что наблюдалось то самое, что он назвал «нейтральным протоном». Майорана стал развивать модель ядра, построенного только из протонов и «нейтральных протонов», и весьма далеко продвинулся в описании сил, действующих между этими частицами. Он рассказал Ферми и некоторым своим друзьям об этой работе. Ферми сразу же осознал ее важность и стал торопить Майорану с публикацией, но тот колебался, считая, что достигнутые им к тому времени результаты являются слишком неполными. Он сказал, что пока не хотел бы писать статью по этому поводу. Ферми попросил у Майораны разрешения сообщить (конечно, ссылаясь на него) результаты на Парижской конференции. Майорана же ответил, что он дал бы такое разрешение, если только эти идеи будут приписаны одному старому профессору электротехники, который, между прочим, как будто должен был присутствовать на конференции. Но это было совершенно невозможным, и по этим причинам идеи Майораны стали известны лишь гораздо позднее, когда они независимо были высказаны другими физиками [1].

Из доклада Ферми видно, что по поводу нейтрона в то время все еще господствовала неясность.

За сообщением Ферми последовало обсуждение, во время которого [см. «Comptes Rendus de la première section du Congrès International d'Electricité» (Gauthier—Villar, Paris, 1932] имел место следующий обмен мнениями с польским физиком Вертенштейном:

«Г-н Вертенштейн просит объяснений по поводу возможного испускания излучения, которое сопровождает естественные β-лучи радиоактивных веществ и восстанавливает сохранение энергии; он не представляет себе, что это могли бы быть нейтроны, из-за их массы.

....

[1] Гипотеза о том, что атомные ядра состоят из протонов и нейтронов, была опубликована Д. Д. Иваненко (Nature, 1932, 129, 798), В. Гейзенбергом (Zs. f. Phys., 1932, 77, 1) и Э. Майораной (Zs. f. Phys., 1933, 82, 137).— *Прим. ред.*

Г-н Ферми отвечает, что такими нейтронами являются не те, которые были открыты, но нейтроны с гораздо меньшей массой».

Этот разговор показывает, что гипотеза нейтрино стала к тому времени известна физикам, которые интересовались бета-распадом.

М. Кюри также представила доклад, в котором описала новые опыты по нейтрону, и в последовавшем за ее докладом обсуждении мы находим замечания Ферми.

Наконец, в 1933 г. (с 22 по 29 октября) в Брюсселе состоялся Сольвеевский конгресс, на котором присутствовало около 40 ученых. К тому времени ядерная физика сделала гигантские успехи, существование нейтрона было надежно установлено, а ускорительные установки стали приносить важные результаты. Ферми принимал участие в этом конгрессе и неоднократно выступал в обсуждениях. В замечаниях Паули появляется термин «нейтрино».

Труды этого конгресса изданы под названием «Institut International de Physique Solvay, Structure et propriétés des noyaux atomiques» (Gauthier-Villar, Paris, 1934).

Э. Сегре

Эта статья представляет большой историко-научный интерес; в ней мастерски излагаются те проблемы ядерной физики, которые в памятном 1932 году волновали физиков. В переводе сознательно сохранена терминология того времени; например, в статье термин «нейтрон» используется для обозначения двух частиц, которые сегодня называются нейтроном и нейтрино; Ферми уже тогда вполне осознал различие «большого» и «маленького» нейтронов.

Статья интересна также тем, что показывает ту подготовительную работу, через которую прошел Ферми до создания теории β-распада (см. обсуждение трудностей с «ядерными электронами»).

Б. Понтекорво

51

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ФИЗИКИ АТОМНОГО ЯДРА *

Современное состояние физики атомного ядра по ряду признаков можно сравнить с состоянием физики атома 30 лет тому назад. Действительно, тогда физика атома встретилась с рядом явлений, которые не поддавались интерпретации в рамках теории того времени, основывавшейся на классических динамике и электродинамике. Эти явления нашли естественное истолкование в теории квантов, сначала почти исключительно в качест-

* *Lo stato attuale della fisica del nucleo atomico.* Ric. Scientifica, 1932, 3(2), 101—113.

венной форме, а сегодня, по крайней мере в большинстве случаев, и в количественной. Естественно, что квантовые законы справедливы не только для явлений атомного масштаба, но также и для явлений макроскопического мира; для последних, однако, значение этих законов уменьшается и классические законы дают вполне достаточное приближение. Необходимость замены классических законов на квантовые определяется изменением размеров изучаемых объектов при переходе от обычных масштабов к атомным.

При переходе от атомной физики к ядерной мы еще раз сталкиваемся с новым изменением масштаба явлений: действительно, от атомных размеров $\sim 10^{-8}$ *см* мы спускаемся до ядерных размеров порядка 10^{-13} *см*, иными словами, мы переходим к изучению объектов с размерами, приблизительно в 100 000 раз меньшими размеров атомов. Природа атомных явлений наводит на мысль, что законы, которым подчиняется поведение частиц, составляющих атом, нельзя применить без глубоких изменений к изучению поведения частиц, составляющих атомное ядро. Эта гипотеза, как нам кажется, подтверждается совокупностью сегодняшних знаний о ядерных явлениях, особенно в отношении поведения электронов, находящихся внутри атомных ядер. Поэтому в докладе я попытаюсь обратить внимание особенно на те явления, которые трудно объяснимы с точки зрения современной механики микроскопических тел.

I. Атомные веса и дефект массы

Открытие изотопов и фундаментальный факт, что атомные веса всех атомов в очень хорошем приближении есть целые числа, позволили сформулировать следующую гипотезу: все атомные ядра состоят из двух типов частиц — электронов и ядер атомов водорода (или протонов). Коль скоро это предположение принято, то число протонов и электронов, находящихся в составе ядра, можно немедленно получить из атомного веса M и электрического заряда ядра, равного атомному номеру Z элемента (за единицу принимается абсолютное значение заряда электрона). Если через N_p и N_e обозначить числа протонов и электронов, содержащихся внутри атомного ядра, то имеем

$$N_p = M, \qquad N_e = M - Z. \tag{1}$$

Здесь M, конечно, есть атомный вес атома, округленный до ближайшего целого числа. Можно задаться вопросом: имеются ли другие аргументы, кроме изложенных, в пользу гипотезы о том, что все атомные ядра состоят из протонов и электронов? То, что атомные ядра или, по крайней мере, некоторые из них, действительно содержат электроны, демонстрируется тем, что мы наблюдаем эти электроны (ядерной природы) в излучении β-радиоактивных веществ. Вне области радиоактивности тяжелых

элементов электроны также наблюдаются в слабом β-излучении калия и рубидия. Присутствие электронов в других ядрах, хотя и довольно вероятно по причинам аналогии, все-таки до сих пор прямо не подтверждено. Прямое же доказательство существования протонов внутри атомных ядер дается искусственным расщеплением: бомбардируя атомное ядро азота или другого легкого элемента α-частицами большой скорости, можно наблюдать протоны, испускаемые также с большой скоростью; последние следует рассматривать как продукт расщепления ядер азота в результате соударения с α-частицей.

Установив существование протонов и электронов внутри атомного ядра или, по крайней мере, внутри некоторых атомных ядер, можно поставить вопрос: только ли эти элементарные частицы на самом деле входят в состав ядра? Конечно, сегодня невозможно с уверенностью ответить на этот вопрос; в то же время нельзя закрывать глаза на то, что интерпретация атомного ядра как агрегата, состоящего только из протонов и электронов, встречает серьезные трудности, о которых речь будет идти далее.

Часто внутри ядер образуются стабильные агрегаты из четырех протонов и двух электронов — α-частицы или ядра гелия, которые сохраняют определенную индивидуальность. Что касается существования α-частиц внутри атомных ядер, то прямым свидетельством этого являются α-излучения радиоактивных веществ; косвенное подтверждение присутствия α-частиц внутри ядер мы находим при изучении атомных весов различных изотопов. Для изучения свойств атомного ядра крайне важно очень точно знать его массу. Разность между суммарной массой электронов и протонов, находящихся в составе ядра [рассчитываемой на основании чисел протонов и электронов из формулы (1)], и действительной массой ядра называется «дефектом массы». Если предположить, что атомное ядро состоит из протонов и электронов, то эту разность масс следует рассматривать как массу, эквивалентную, согласно теории относительности, энергии, освобождаемой при синтезе атомного ядра из протонов и электронов. Если на графике по оси абсцисс откладывать атомные веса, а по оси ординат — дефекты массы, то найдем, что дефект массы регулярно зависит от атомного веса и в первом приближении пропорционален ему.

Этот эффект легко интерпретировать с помощью следующей гипотезы: предположим, что электроны и протоны, содержащиеся внутри атомного ядра, ассоциируются в группы из четырех протонов и двух электронов, соединенных в конфигурацию α-частицы, и поэтому составляющих стабильный агрегат; атомное ядро в целом тогда можно рассматривать как состоящее из α-частиц плюс несколько избыточных протонов и электронов в количестве, недостаточном для образования еще одной α-частицы. Энергия образования атомного ядра из протонов и электронов состоит поэтому из двух частей. Первая часть, наибольшая, обусловлена энергией образования максимального числа α-частиц, которое может быть составлено из протонов и электронов, входящих в состав ядра; вторая часть, мень-

шая, представляющая энергию образования атомного ядра при соединении α-частиц с избыточными протонами и электронами. С этой точки зрения интересно построить кривую дефектов масс не по отношению к полной массе электронов и протонов, составляющих ядро, а по отношению к массе α-частиц и избыточных протонов и электронов; тогда найдем много меньшие дефекты масс, которые можно интерпретировать как энергии образования атомного ядра из α-частиц и избыточных протонов и электронов. Среди всех попыток теоретической интерпретации кривой дефектов масс следует упомянуть прежде всего попытку Гамова; однако речь идет об усилиях, по необходимости основанных на довольно примитивных предположениях.

Соотношение между энергиями образования различных атомных ядер и их массами в принципе можно было бы проверить для ядер каждого радиоактивного семейства. В самом деле, мы знаем с достаточной точностью энергию, освобождаемую в последовательных процессах распада, и поэтому располагаем способом теоретического расчета кривой дефектов масс для элементов каждого радиоактивного вещества; однако точность, с которой мы знаем атомный вес, недостаточна для такой проверки. Такая точность также является недостаточной для обнаружения изменений атомного веса, которые имеют место при образовании изотопа кислорода O^{17} в результате искусственного расщепления азота.

II. Механические моменты атомных ядер и статистики ядер

Замечательное свойство некоторых атомных ядер состоит в том, что они обладают собственным механическим моментом. Когда этот момент выражается в единицах $h/2\pi$, он принимает значение, равное целому или полуцелому числу.

Существование момента количества движения ядер проявляется в различных явлениях, изучение которых, по крайней мере в некоторых случаях, позволяет измерить его. Основные явления, в которых обнаруживается существование момента ядра, таковы:

а) чередование интенсивностей в полосатых спектрах;

б) сверхтонкая структура спектральных линий атомов.

Чередующиеся интенсивности наблюдаются в спектрах двухатомных молекул, состоящих из одинаковых атомов, например в полосах N_2. Последовательные вращательные линии этих полос имеют чередующиеся, слабые и сильные интенсивности. Это чередование интенсивностей было объяснено Гейзенбергом квантовым явлением «обмена» между двумя атомными ядрами молекулы. Если одинаковые атомные ядра двухатомной молекулы не обладают собственным моментом, то из теории следует, что в спектре молекул половина линий должна отсутствовать, что действительно и наблюдается, например, в полосах гелия и кислорода.

Если же атомное ядро обладает отличным от нуля моментом, то линии, которые иначе отсутствовали бы, появляются с меньшей интенсивностью, что и приводит к характерному чередованию интенсивностей. Более того, легко найти соотношение между отношением интенсивностей сильных и слабых последовательных линий и значением J момента ядра (обычно измеряемого в единицах $h/2\pi$). Отношение интенсивностей оказывается равным

$$\frac{J+1}{J}. \qquad (2)$$

Из этой формулы, в частности, следует, что чередующиеся интенсивности изменяются тем больше, чем меньше момент ядра; например, для $J = 1/2$ отношение интенсивностей последовательных линий равно 3, при $J = 1$ отношение интенсивностей равно 2 и т. д. Поэтому с помощью формулы (2) можно определить значения моментов ядра, измерив отношения интенсивностей последовательных линий в спектральной полосе. Измерения такого типа уже выполнялись для ряда атомных ядер. Практически они возможны только для не слишком тяжелых атомных ядер; иначе спектральные полосы становятся слишком узкими и отношение интенсивностей измерить нельзя.

С помощью этого метода, например, стало возможным установить, что протон обладает моментом количества движения, равным половине, т. е. собственному моменту электрона; это можно интерпретировать, предположив, что протон, как и электрон, суть элементарная частица, подчиняющаяся волновому уравнению, аналогичному установленному Дираком в его релятивистской теории электрона. Аналогично можно прийти к выводу, что, например, альфа-частица и атомное ядро кислорода имеют момент, равный нулю, и что ядро атома азота обладает собственным моментом 1. Далее мы вернемся к трудностям, встречающимся при теоретической интерпретации этого результата для азота.

Прежде чем перейти к обсуждению способа определения собственных моментов ядер из наблюдений сверхтонкой структуры, укажем еще одно свойство ядра, которое можно найти с помощью наблюдения чередования интенсивностей. Спектральные линии обусловлены переходами от одних термов молекулы к другим; чередование интенсивностей связано с тем, что термы молекулы имеют волновые функции, поочередно симметричные и антисимметричные по отношению к обмену координатами центров тяжести двух атомных ядер. В том случае, когда атомное ядро не обладает собственным моментом, его состояние характеризуется простым заданием координат центра тяжести, и поэтому симметричные и антисимметричные термы отсутствуют поочередно в зависимости от того, что́ справедливо для рассматриваемого типа ядра — принцип Паули или статистика Бозе — Эйнштейна. Наличие у ядра момента количества движения приводит к тому, что будут проявляться термы, которые иначе совсем отсутствовали бы; однако вероятность их проявления меньше,

чем у других термов, так что соответствующие линии являются менее интенсивными и возникает явление чередования интенсивностей. Если знать характер симметрии термов, обусловливающих интенсивные линии, можно вывести тип статистики, которому подчиняется атомное ядро; но для этого необходимо проанализировать электронные термы молекулы. Например, было доказано, что протон ведет себя так же, как электрон, и подчиняется принципу Паули, в то время как ядра атомов гелия, кислорода и азота подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна.

Второй очень важный метод определения механических моментов атомных ядер состоит в изучении сверхтонкой структуры. Если с помощью аппаратуры высокой разрешающей способности наблюдать спектральные линии некоторых атомов, то они оказываются расщепленными на ряд компонент, близких друг к другу. Было установлено, что это расщепление на ряд компонент определяется влиянием собственного момента ядра на орбиты электронов атома.

Это явление можно представить себе следующим образом: электроны атома, вращаясь вокруг атомного ядра, образуют магнитное поле H, в котором и находится само атомное ядро. Далее логично предположить, что собственный момент ядра, как и электронов, ассоциируется с некоторым магнитным моментом; для ядер магнитный момент должен быть много меньше магнетона Бора. В зависимости от ориентации ядерной оси по отношению к полю H появляются различные энергии связи между атомным ядром и системой электронов; отсюда возникает расщепление термов и, следовательно, спектральных линий на компоненты, очень близкие друг к другу. Число компонент зависит не только от рассматриваемого терма атома, но и от значения собственного момента ядра, и поэтому, по крайней мере в некоторых случаях, может служить для определения этого момента. В частности, это определение может быть сделано с уверенностью тогда, когда для линий возможно наблюдать эффект Зеемана. Этот метод определения моментов ядер применим главным образом для самых тяжелых элементов, поскольку тогда сверхтонкая структура, вообще говоря, более широка и поэтому ее легче наблюдать; кроме того, линии этих элементов являются более тонкими и четкими, а их уширение, связанное с эффектом Допплера, оказывается меньшим. С помощью такого метода, например, измерялись моменты ядер висмута, таллия, марганца и многих других элементов; установлено, что в случае элементов с несколькими изотопами последние очень часто обладают различными моментами количества движения. Это имеет место, например, для кадмия, один изотоп которого обладает моментом, равным единице, в то время как другой — половине. Количественное рассмотрение сверхтонкой структуры позволяет также получить сведения о магнитном моменте, связанном с механическим моментом ядра. Если бы мы были уверены в том, что единственной причиной связи между ориентацией ядерной оси и системой электронов является энергия магнитного момента ядра в магнитном поле, создаваемом вращением электронов вокруг ядра, то без труда можно было бы

прямо вывести значение магнитного момента ядра из величины расщепления сверхтонкой структуры. На самом деле расчеты такого типа нельзя сделать с большой точностью вследствие несовершенного знания собственных функций различных электронных орбит, которые обычно оцениваются с помощью численных методов, не очень точных. Кроме того, есть основание полагать, что магнитный момент атомного ядра — не единственная причина связи, определяющей сверхтонкую структуру. Поэтому расчеты такого типа могут пока дать только указание на порядок величины магнитного момента атомного ядра. Он составляет около тысячной доли магнетона Бора и поэтому сравним с магнитным моментом, который следовало бы приписать протону, если предположить, что его магнитный момент дается той же формулой, которая выражает магнетон Бора (при замене электронной массы на протонную).

Прежде чем закончить это обсуждение, мы должны упомянуть о трудностях, которые встречаются при теоретической интерпретации моментов и статистик ядер, если предположить, что все атомные ядра состоят из протонов и электронов. Поскольку протоны, как и электроны, подчиняются принципу Паули и имеют момент количества движения, равный половине, то с помощью аргументов, не зависящих от конкретных гипотез о структуре системы, можно заключить, что любая система из протонов и электронов должна:

а) подчиняться статистике Бозе — Эйнштейна или принципу Паули в зависимости от того, является ли число частиц этой системы четным или нечетным;

б) иметь собственный момент, равный целому числу или нечетному целому числу, деленному на 2, в зависимости от того, четно или нечетно число частиц в системе.

Эти правила действительно подтверждаются для некоторых атомных ядер; например, α-частица, содержащая четыре протона и два электрона, т. е. в целом шесть частиц, имеет собственный момент, равный нулю, и подчиняется статистике Бозе — Эйнштейна.

Наоборот, для других атомных ядер эти правила несправедливы. Примером может служить ядро атома азота; в нем, согласно формуле (1), должны присутствовать 14 протонов и 7 электронов, т. е. нечетное число частиц. Согласно вышеупомянутым правилам, для ядра азота должен быть справедлив принцип Паули, в то время как наблюдения Разетти над раман-эффектом для молекулы азота показали, вне всякого сомнения, что для ядра азота справедлива статистика Бозе — Эйнштейна. Кроме того, собственный момент ядра оказывается равным единице, в то время как из нечетности общего числа частиц мы должны были бы ожидать полуцелый момент количества движения. Отсюда был сделан вывод о том, что эта аномалия возникает вследствие того, что ядро атома азота содержит нечетное число электронов.

Атомных ядер, для которых известны статистика и собственный момент, слишком мало для того, чтобы можно было видеть здесь

общее правило. Трудности интерпретации ядерной структуры столь велики, что возникает сомнение в правильности гипотезы, что протоны и электроны — единственные частицы, составляющие ядро. С другой стороны, нельзя забывать, что сами фундаментальные идеи квантовой механики, вероятно, уже неприменимы к изучению структуры атомного ядра, особенно когда речь идет о поведении электронов.

Что же касается ядерного магнитного момента, то на первый взгляд можно удивляться, что атомное ядро, содержащее электроны, у которых собственный магнитный момент равен магнетону Бора, все-таки обладает результирующим магнитным моментом, по порядку величины равным тысячной доле магнетона Бора. Однако даже из обычной теории электрона следует, что его магнитный момент равен магнетону Бора только тогда, когда электрон свободен, в то время как в случае сильно связанного электрона момент тем меньше, чем меньше размеры его орбиты. Благодаря этому же факту энергия электрона может возрасти настолько, что его массой уже нельзя пренебречь и она даст заметный вклад в атомный вес элемента. Это еще раз подтверждает, что концепции обычной квантовой механики неприменимы к изучению динамики электронов в атомном ядре. Что же касается механических моментов и статистик ядер, нам еще остается сказать, что для случая протона и α-частицы с помощью независимых методов удалось проверить результаты, полученные при наблюдении спектральных полос. Для протона это было осуществлено с помощью наблюдения удельных теплоемкостей при низких температурах и вообще благодаря изучению свойств орто- и параводорода; для α-частиц — благодаря опытам Чэдвика и Блэккета по рассеянию α-частиц на гелии, которые интерпретировались с помощью теории Мотта о столкновениях между частицами, подчиняющимися статистике Бозе — Эйнштейна. Опыты такого же типа повторены Герценом с помощью каналовых лучей водорода.

III. Альфа-лучи

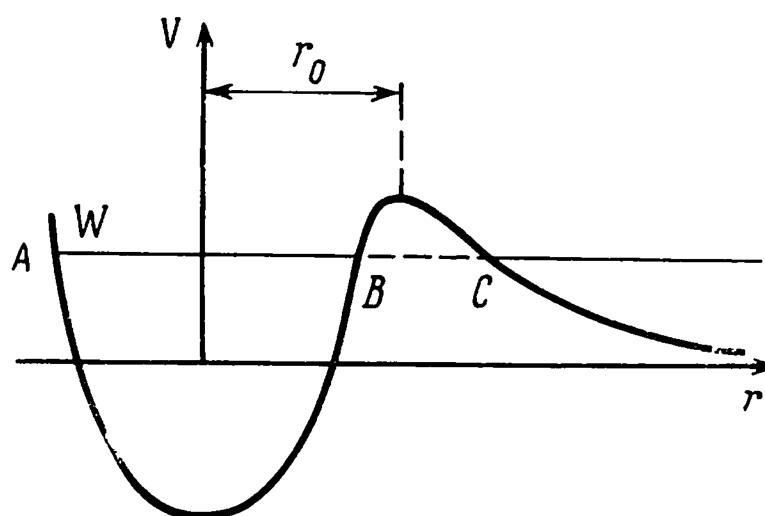
Наиболее явным образом ядерные явления обнаруживают себя в радиоактивных излучениях и превращениях. Мы ограничимся только обсуждением самых недавних результатов, имеющих значение для теоретической интерпретации ядерных явлений.

Вначале обсудим излучение α-частиц.

Теория испускания α-частиц в последние годы сделала большой шаг вперед, особенно благодаря работам Гамова. Существо теории Гамова можно изложить следующим образом. Вначале предполагается, что сила взаимодействия тяжелого атомного ядра и α-частицы представляет собой кулоновское отталкивание только на расстояниях, бо́льших некоторого расстояния от ядра (порядка величины 10^{-12} *см*); вблизи же ядра эта сила становится притяжением. Таким образом, оказывается возможным объяснить тот факт, что α-частицы не сразу вылетают из атомного ядра, в состав которого они входят.

Потенциальная энергия как функция расстояния r частицы от центра ядра показана на рисунке.

Предположим, следуя Гамову, что энергия α-частицы, находящейся внутри радиоактивного атомного ядра, соответствует уровню W на рисунке. Согласно классической механике, движение частицы, имеющей энергию W и находящейся внутри ядра, состояло бы из осцилляций между предельными положениями А и В.



Однако с точки зрения квантовой механики дело обстоит иначе: каждый раз, когда частица достигает точки В, она имеет малую, но конечную вероятность перейти в зону ВС, где по классической механике ее кинетическая энергия должна была бы быть отрицательной. Итак, она может достичь зоны за пределами С, где попадает в зону действия силы отталкивания, что и позволяет частице навсегда покинуть атомное ядро. Поэтому вероятность того, что α-частица покинет ядро, пропорциональна числу подходов частицы к точке В в единицу времени и вероятности того, что при одном подходе к В она пройдет через «потенциальный барьер» между В и С. Последняя вероятность быстро уменьшается с увеличением высоты и ширины потенциального барьера. На этой основе Гамову удалось рассчитать средние времена жизни радиоактивных элементов; если предположить, что для всех элементов одного радиоактивного семейства радиус r_0, при котором перестает быть справедливым закон Кулона, приблизительно один и тот же, то теория Гамова дает и простейшую интерпретацию эмпирически найденного Гейгером и Нэттолом соотношения между средним временем жизни радиоактивного элемента и скоростью частицы, испускаемой им при распаде.

Важный факт для понимания свойств ядра недавно открыл Розенблюм: α-лучи, испускаемые С-членами трех радиоактивных семейств, состоят из групп, имеющих различные скорости. Наблюдение этого явления стало возможным благодаря использованию большого электромагнита Бельвю, который позволяет отклонять α-частицы на полукруговые траектории и таким образом получать сфокусированные спектры скоростей α-частиц. Лорд Резерфорд подтвердил результаты Розенблюма с помощью красивого метода измерения кривой распределения пробегов

α-частиц. Из трех С-членов лучше всех был проанализирован ThC, в излучении которого были обнаружены по крайней мере четыре монохроматические группы α-частиц.

Для теоретического анализа этих результатов Гамов предложил принять следующее. Предположим, что после испускания альфа-частицы атомом С продукт распада, т. е. атом С″, находится в возбужденном состоянии. Энергия, с которой α-частица покидает ядро С, очевидно, будет тем больше, чем глубже энергетический уровень атомного ядра С″; разности между энергиями различных групп α-частиц, испускаемых веществом С, прямо дадут разности энергетических уровней ядра С″. На основании этих рассуждений Гамов построил теоретическую схему энергетических уровней ядра атома ThC″. Разности между этими энергетическими уровнями, казалось бы, должны появиться и в наблюдениях частот γ-спектра ThC″. Однако такое соответствие между γ-лучами ThC″ и α-частицами ThC экспериментально до сих пор не установлено (по крайней мере, с уверенностью). Существует определенная аналогия между тонкой структурой α-лучей веществ С и группами α-частиц, имеющих чрезвычайно большую энергию, которые наблюдаются в веществах С′, особенно в ThC′ и RaC′. В случае последнего вещества (RaC′) лорд Резерфорд наблюдал девять групп α-частиц с энергией, значительно выше обычной; интенсивность этих групп крайне мала и по порядку величины составляет одну частицу на 10^5 частиц обычной энергии. Для объяснения этих групп α-частиц с энергией выше обычной Гамов предположил, что ядро атома RaC′, образующееся при распаде RaC с испусканием β-частицы, может оставаться в возбужденном состоянии, из которого переходит в нормальное как с испусканием γ-квантов, так и путем распада с испусканием α-частицы, имеющей скорость выше нормальной. Конечно, согласно этой интерпретации должно иметь место соответствие между частотами гамма-спектра RaC′ и разностями энергии различных групп α-частиц этого элемента. Такого соответствия, однако, до сих пор не удалось установить.

IV. Бета-лучи

Бета-лучи, испускаемые радиоактивными веществами, можно подразделить на первичные β-лучи, состоящие из электронов, прямо испускаемых распадающимися атомными ядрами, и вторичные, состоящие из электронов, которые выходят не из атомного ядра, а из электронной оболочки атома; они вырываются из того же самого атома под действием γ-квантов, испускаемых ядром, благодаря некоторому типу фотоэлектрического эффекта, называемому процессом внутреннего фотоэффекта.

В то время как α-частицы, которые покидают распадающееся атомное ядро, имеют совершенно определенные скорости, первичные β-лучи покидают атомное ядро со скоростями, изменяющимися в довольно широких

пределах. Например, было найдено, что β-частицы RaE вылетают из атомного ядра с энергиями, изменяющимися непрерывным образом от минимального значения около 200 000 до максимального — 1 000 000 *эв*. В течение длительного времени предполагалось, что этот «непрерывный спектр β-лучей» — явление кажущееся, обусловленное потерями энергии β-частиц после вылета из атомного ядра. Но калориметрические измерения Эллиса и Вустера и более поздние опыты Мейтнер и Ортмана, в которых полная энергия β-частиц прямо измерялась по количеству тепла, выделяющегося внутри полностью их поглощающего цилиндра, без всякого сомнения показали, что энергия испускаемых ядром β-частиц меняется в довольно широких пределах. Этот факт имеет большую теоретическую важность, поскольку он, по-видимому, находится в противоречии со всеми теориями атомного ядра, в которых предполагается справедливость принципа сохранения энергии. Можно было бы предположить, что различия в энергиях β-частиц компенсируются непрерывным спектром γ-излучения; однако поиски такого γ-излучения не увенчались успехом.

Итак, создается впечатление, что для ядерных электронов энергия не имеет определенного значения, по крайней мере, если мы не хотим ввести гипотезу о новой форме энергии, которую не удается обнаружить с помощью существующих средств наблюдения.

Например, согласно предложению Паули, было бы возможно вообразить, что внутри атомного ядра находятся нейтроны, которые испускались бы одновременно с β-частицами. Эти нейтроны могли бы проходить через большие толщи вещества, практически не теряя своей энергии, и поэтому были бы практически ненаблюдаемы. Существование нейтрона, несомненно, могло бы просто объяснить некоторые пока непонятные вопросы, такие, как статистика атомных ядер, аномальные собственные моменты некоторых ядер, а также, быть может, природа проникающего излучения.

Вторичные же β-лучи, как уже сказано, состоят из электронов, которые не вылетают из атомного ядра. Они образуются при фотоэлектрическом эффекте, обусловленном поглощением γ-кванта в том же атоме радиоактивного вещества, из которого испускались γ-лучи, или в другом атоме. Если через K, L,. . . обозначить энергетические уровни атома, на котором происходит фотоэлектрический эффект, то энергии испускаемых фотоэлектронов будут $h\nu - K$, $h\nu - L$, ... К процессу испускания вторичных β-лучей, когда действительно испускаемый γ-квант затем поглощается, благодаря фотоэлектрическому эффекту на орбитальных электронах атома, сегодня как будто следует добавить несколько иной механизм: электроны атома, в частности K-электроны, орбиты которых являются самыми близкими к атомному ядру, могут прямо взаимодействовать с ядром, так как, строго говоря, ядро и электроны, окружающие его, следует рассматривать как одну систему. Конечно, в этой сложной системе могут происходить переходы между состояниями с одинако-

вой энергией, обусловленные связью двух частей этой же системы (атомное ядро и совокупность электронов). Итак, может иметь место переход из состояния, в котором ядро находится на возбужденном энергетическом уровне, а электрон — на уровне K, в состояние, где ядро находится на основном уровне, а электрон — на возбужденном уровне непрерывного спектра.

Итак, когда атомное ядро находится на возбужденном энергетическом уровне, имеются две возможности перехода его в основное состояние:

а) испускание, в прямом смысле этого слова, γ-кванта, который затем может быть поглощен другим атомом;

б) непосредственный переход энергии от ядра к орбитальному электрону.

В экспериментальных исследованиях было найдено, что отношение вероятностей этих двух процессов может изменяться в довольно широких пределах. Была также сделана попытка теоретически оценить вероятность процесса «б» и сравнить ее с найденной экспериментально. Однако по расчетам Фаулера, Казимира и др., теоретическая вероятность, по-видимому, меньше экспериментальной, что свидетельствовало бы в пользу того, что связь между ядром и орбитальными электронами в действительности сильнее, чем предсказывает сегодняшняя теория.

V. Гамма-лучи и ядерные энергетические уровни

Измерение кинетической энергии вторичных β-лучей, испускаемых в фотоэлектрическом эффекте или, точнее, в прямом переходе энергии от ядра к электронному облаку, которое окружает радиоактивное ядро, является самым удобным методом определения энергии γ-квантов, т. е. их частоты. Очень важно исследовать, до какой степени найденные таким образом частоты γ-лучей укладываются в схему ядерных термов. Мы уже коснулись сведений об энергетических уровнях атомных ядер, которые можно получить из рассмотрения тонкой структуры α-частиц и поведения тех уровней, которые имеют очень высокие энергии (по крайней мере, в случае веществ C′ и C″).

Независимо от этого, усилия некоторых авторов были сконцентрированы на установлении простых схем энергетических уровней, описывающих частоты спектров γ-лучей различных веществ. Однако точность, с которой в настоящее время известны частоты γ-лучей, по-видимому, недостаточна для однозначного установления схем термов; а это, в свою очередь, связано с отсутствием теоретических схем, которые могли бы служить руководством при таких исследованиях. Здесь следует упомянуть также попытку Резерфорда и Эллиса установить связь между различными γ-частотами и одновременными переходами более одной α-частицы.

Важные особенности поглощения очень жестких γ-лучей обнаружены в последние годы Чао, Мейтнер, Хупфельдом и др. [1] В экспериментах с γ-лучами ThC″ (4,7 X-единиц) они нашли, что рассчитанный на заданное число электронов коэффициент поглощения различных веществ не является постоянным, а растет с атомным весом поглощающего вещества. Для легких атомов поглощение совпадает с рассчитанным на основании формулы Клейна — Нишины, в то время как для тяжелых атомов оно больше. По-видимому, это явление обусловлено рассеянием на атомных ядрах, которое добавляется к рассеянию на атомных электронах; интенсивность рассеяния на ядрах растет с увеличением атомного веса поглощающих ядер.

VI. Искусственные расщепление и возбуждение

В то время как радиоактивные явления свидетельствуют о существовании спотанных ядерных превращений, происходящих с ядрами очень тяжелых элементов и не могущих быть ускоренными или замедленными любыми известными нам средствами, для атомных ядер легких элементов давно известна возможность искусственного их превращения при бомбардировке α-частицами высокой энергии.

С теоретической точки зрения легко понять, что это явление обнаруживается только у легких ядер. Действительно, когда α-частица сталкивается с тяжелым атомным ядром, возможностью того, что она проникнет внуть него, пройдя через потенциальный барьер, практически можно пренебречь. Напротив, частица, сталкивающаяся с легким атомным ядром, со значительной вероятностью может проникнуть внутрь него, поскольку здесь потенциальный барьер существенно ниже.

Сталкивающаяся с легким атомным ядром α-частица может вызвать испускание протона или испускание γ-лучей. Поскольку налетающая частица в этих процессах может быть либо захвачена атомным ядром, либо нет, следует различать четыре следующих случая:

а) испускание протона с захватом α-частицы;
б) испускание протона без захвата α-частицы;
в) испускание γ-кванта с захватом α-частицы;
г) испускание γ-кванта без захвата α-частицы.

Первый из этих случаев известен давно; современные исследования позволили изучить его с большей подробностью и показать, в частности, что в некоторых случаях испускаемые протоны состоят из групп с различными скоростями.

Например, в случае бора Боте обнаружил существование трех групп протонов с различной проникающей способностью. В том случае, когда α-частица захватывается атомным ядром, законы сохранения энергии

[1] В связи с этим см. статью 55.— *Прим. ред.*

и импульса позволяют сказать, как должна изменяться скорость испускаемых протонов в направлении, составляющем различные углы с направлением движения налетающей α-частицы. Действительно, эта скорость не должна зависеть от направления, когда в качестве системы отсчета применяется центр тяжести системы из атомного ядра, испытывающего соударение, и налетающей α-частицы. Поэтому если найти зависимость скорости протона от направления его движения и перейти к системе центра тяжести, то при известной массе атомного ядра, на котором происходит столкновение, можно определить скорость α-частицы в момент столкновения. Измерения такого типа были выполнены Боте в случае двух групп протонов, возникающих при искусственном расщеплении бора; для скорости налетающей α-частицы он получил значения, которые не совсем совпадают с ожидавшимися; однако это различие могло быть обусловлено неточностью измерений.

Аналогичные результаты были получены Позе для алюминия. Согласно Позе, для испускания каждой группы протонов как будто бы необходимы точно определенные скорости α-частицы; но пока эти данные не подтверждены.

С уверенностью нельзя указать ни на один случай, в котором искусственное расщепление происходило бы по схеме «б» (атомное ядро при соударении с α-частицей теряет протон, а α-частица не захватывается). Однако один случай этого типа как будто бы существует при искусственном расщеплении бора, по крайней мере для одной из трех групп протонов, испускаемых ядром.

Наконец, нам остается рассказать о процессах «в» и «г», в которых ядро при соударении испускает γ-квант. Эти процессы наблюдались совсем недавно Боте и Беккером при бомбардировке различных легких элементов α-лучами полония. Оказывается, что различные элементы под действием α-частиц испускают γ-излучение, интенсивность которого меняется довольно сильно от элемента к элементу; при этом максимальная интенсивность наблюдалась для бериллия. Такое излучение обнаруживается как в элементах, которые под действием α-частиц испускают протоны (например, в алюминии и боре), так и в элементах (литий, бериллий), которые не обнаруживают такого испускания.

Эти явления можно интерпретировать, предполагая, что α-частица захватывается атомным ядром и что при этом ее энергия передается некоторым протонам ядра; γ-излучение будет испускаться при формировании нового, создаваемого таким путем ядра.

Боте, а также И. Кюри и Жолио в своих измерениях поглощения обнаружили весьма примечательный факт: искусственное γ-излучение бериллия и бора обладает проникающей способностью, много большей, чем все известные до сих пор γ-излучения радиоактивных веществ. По оценкам И. Кюри, правда, довольно гипотетическим, излучение бериллия соответствовало бы длине волны 0,7 X-единиц, т. е. энергии около 20 млн. *эв*.

Согласно недавним опытам И. Кюри и Жолио, излучение бериллия, по-видимому, обладает свойством освобождать протоны высокой энергии из всех водородсодержащих веществ; такое явление, по мнению этих авторов, как будто бы следует интерпретировать как нечто подобное эффекту Комптона, происходящему на протонах, а не на свободных электронах.

После написания этого доклада были выполнены важные опыты по ядерной физике. Ограничиваясь самыми характерными работами, упомяну следующие.

Продолжая опыты Боте, а также И. Кюри и Жолио, Чэдвик сумел доказать, что излучение бериллия способно сообщить движение также ядрам тяжелее протона; в связи с этим он выдвинул гипотезу, что излучение бериллия представляет собой не γ-лучи, а нейтроны с массой, равной массе протона.

Другой интересный опыт был выполнен Кокрофтом и Уолтоном, которые осуществили искусственное расщепление лития с помощью каналовых лучей водорода, имевших высокую энергию.

Наконец, в области, близкой к рассмотренной здесь, Штейнке и Шиндлер показали, что космическое излучение способно освободить из свинца частицы с энергией порядка сотен миллионов электронвольт и высокой ионизирующей способностью.

К статье 52

В этой статье Ферми рассматривает влияние вращения молекулы аммиака на удвоение ее уровней. Согласно Деннисону и Харди, это удвоение возникает вследствие колебания, при котором атом азота пересекает плоскость трех атомов водорода. Однако оставалось необъясненным, почему расщепление уменьшается при возрастании вращательного квантового числа. Ферми очень просто показывает, что этот эффект обусловлен центробежной силой, которая при возрастании скорости вращения действует в сторону уменьшения вероятности прохождения атома азота через плоскость водородных атомов.

Статья 52 вместе со статьями [Б68], [Б69] и 50, в которых рассматривались случайное вырождение колебаний частиц молекулы двуокиси углерода и эффект Рамана в кристаллах, составляет серию исследований, выполненных Ферми в 1931—1933 гг. и посвященных объяснению различных молекулярных явлений. Об интересе Ферми к этому направлению свидетельствует и его книга «Молекулы и кристаллы», вышедшая в 1934 г.

Интерес Ферми к проблемам такого типа всегда диктовался желанием дать количественное объяснение результатам наблюдений. Проблемы, которым посвящены упомянутые исследования Ферми, находились тогда в центре деятельности экспериментаторов Института. Работы [Б68], [Б69] и статья 50 связаны главным образом с работами Разетти.

Статья же о молекуле аммиака связана, хотя и косвенно, с экспериментальными и теоретическими работами Г. Плачека, Э. Теллера и моими, проводившимися тогда же в Риме.

Интерес к изучению сложных молекул с помощью эффекта Рамана стимулировался присутствием Плачека в Институте; его привлекли в Рим работы Ферми и Разетти в этом направлении, и он дал глубокий критический анализ этих явлений. Именно тогда в Риме Плачек начал писать свою работу «Релеевское рассеяние и эффект Рамана», которую он закончил вскоре после этого в Копенгагене.

Зимой 1931—1932 гг. Плачек и я проводили эксперименты по изучению вращательных спектров аммиака в эффекте Рамана и подтвердили правила отбора для «ротатора типа симметричного волчка», установленные в общем случае Плачеком и Теллером. Хотя работа Ферми в то время и не была связана непосредственно с этими исследованиями, она тем не менее составляет неотъемлемую часть общей картины деятельности Института в тот период времени.

Э. Амальди

52

О КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ И ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ПОЛОСАХ АММИАКА *[1]

Молекула аммиака NH_3, как известно, имеет конфигурацию правильной треугольной пирамиды, в вершине которой находится атом азота, в то время как три атома водорода располагаются в трех вершинах ее основания. Соответственно этой структуре аммиак имеет четыре основные частоты, две из которых дважды вырожденные, а две другие — простые. Последние две частоты соответствуют таким колебаниям, при которых молекула всегда сохраняет симметрию правильной пирамиды, но при этом ее высота и стороны основания меняются. Значения двух простых частот составляют примерно 950 и 3330 $см^{-1}$. В настоящей работе особое внимание обращается на первую из них; она соответствует движению, при котором, с достаточно хорошим приближением, можно полагать, что меняется только высота пирамиды, а размеры треугольного основания остаются неизменными. Поэтому в качестве координаты, описывающей это колебание, мы можем взять расстояние x атома азота до плоскости, в которой расположены три атома водорода. Атом азота должен иметь два положения равновесия по отношению к плоскости треугольника, в вершинах которого находятся три атома водорода. Тогда потенциальная энергия $U(x)$ будет четной функцией x, имеющей два минимума, соответствующих двум равновесным положениям при $x = \pm x_0$ (см. рисунок). Отсюда следует[2], что колебательные уровни молекулы оказываются двойными; удвоение обусловлено способностью атома азота пересекать плоскость, определенную тремя атомами водорода, т. е. переходить из положений вблизи одной равновесной конфигурации в положения вблизи другой. Для этого атом должен проникнуть через потенциальный барьер, максимальная высота которого находится при $x = 0$; расщепление двух уровней, как известно, дается частотой, характерной для прохождения атома через потенциальный барьер. Поэтому оно будет увеличиваться для последующих уровней колебания, поскольку их энергия будет все больше и больше приближаться к максимуму потенциального барьера.

Вследствие этой структуры колебательных уровней все колебательные и вращательные линии удваиваются, что фактически и наблюдается, на-

---

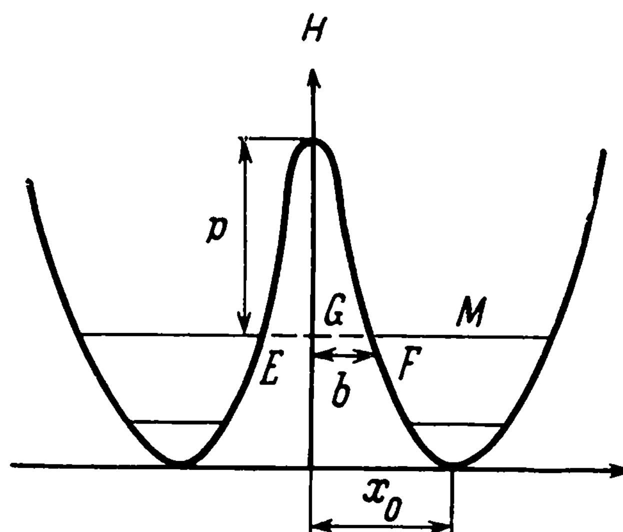
* *Sulle bande di oscillazione e rotazione dell'ammoniaca.* Rend. Lincei, 1932, **16**, 179—185; Nuovo Cimento, 1932, **9**, 277—283.

[1] Поступила в Академию 29 июля 1932 г. (Ферми был избран членом-корреспондентом Академии Линчей 27 июля 1932 г. Поэтому данная и последующие работы, опубликованные в «Rendiconti dei Lincei», представлены им самим.— *Прим. ред. итало-амер. изд.*).

[2] D. M. Dennison, J. D. Hardy. Phys. Rev., 1932, **39**, 938.

пример, в полосе, расположенной вблизи частоты 950 $см^{-1}$, где вращательные линии обнаруживают расщепление приблизительно на 30 $см^{-1}$.

Цель настоящей работы — изучение влияния вращения молекулы на расщепление; экспериментально наблюдается, что расщепление неодинаково для разных вращательных термов, а уменьшается с увеличением вращательного квантового числа, причем оно падает от начального значения около 33 $см^{-1}$ до значения, близкого к 23 $см^{-1}$, соответствующего одиннадцатому вращательному уровню [3].



Влияние вращения на расщепление можно качественно интерпретировать, заметив, что при вращении молекулы центробежная сила стремится удалить атом азота от треугольника, образованного атомами водорода, так что она препятствует прохождению атома азота через плоскость этого треугольника, действуя как дополнительное повышение потенциального барьера, который отделяет два симметричных равновесных положения. Это приводит к уменьшению вероятности обмена между двумя равновесными положениями и, следовательно, к уменьшению расщепления, тем большему, чем быстрее вращение.

Эта схематическая модель явления находится в качественном согласии с экспериментальными данными. Теперь мы покажем также, что и предсказанный теорией порядок величины рассматриваемого эффекта хорошо соответствует наблюдениям.

Чтобы полностью определить форму и размеры представляющей молекулу аммиака треугольной пирамиды, необходимо было бы знать главные моменты инерции молекулы. Вследствие симметрии их только два: A и B, где через B обозначен момент относительно оси симметрии, а через A — момент относительно прямой линии, перпендикулярной оси симметрии и проходящей через центр тяжести. Только один из этих двух моментов, A, известен из полосатого спектра: он равен $2{,}38 \cdot 10^{-40}$. Другой момент, B, можно оценить только из косвенных аргументов; согласно Деннисону [2], нужно взять $B \approx 4{,}76 \cdot 10^{-40}$. Для расчетов, приводимых далее, в которых, кстати, нас интересуют только порядки величин, мы

[3] E. F. Barker. Phys. Rev., 1929, 33, 684. Экспериментальные результаты Баркера пересмотрены Бэджером (P. M. Badger. Phys. Rev., 1930, 35, 1038).

и будем использовать эти данные. Из них следует, что сторона треугольного основания пирамиды есть

$$a = 1{,}69 \cdot 10^{-8},$$

а высота пирамиды

$$x_0 = 0{,}32 \cdot 10^{-8}.$$

Если предположить, что деформация молекулы при сохранении размеров основания состоит в изменении высоты x, то момент инерции B не изменится, в то время как момент A будет функцией x. Совершенно элементарные соображения приводят к результату:

$$A = 2{,}38 \cdot 10^{-40} + 4{,}10 \cdot 10^{-24}\, x^2 = A_0 + mx^2, \qquad (1)$$

где $m = 4{,}10 \cdot 10^{-24}$ — приведенная масса атома азота относительно треугольника из трех атомов водорода.

Поскольку эллипсоид инерции этой молекулы есть эллипсоид вращения, ее вращательная энергия дается, как известно, выражением

$$W_R = \frac{h^2}{8\pi^2}\left\{\frac{J(J+1)}{A} + \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right)\Omega^2\right\}, \qquad (2)$$

где J и $\Omega \leqslant J$ — целые числа, представляющие полный момент молекулы и момент вращения относительно оси симметрии, измеренные в единицах $h/2\pi$.

Для заданных значений J и Ω энергия вращения будет функцией x, согласно выражениям (1) и (2). Теперь легко найти, что в первом приближении сила, действующая между атомом азота и плоскостью из трех атомов водорода, пока молекула находится в состоянии вращения, может рассматриваться как соответствующая потенциальной энергии

$$V(x) = U(x) + W_R(x) + \text{const}. \qquad (3)$$

Такая энергия получается добавлением вращательной энергии (2) к потенциальной энергии $U(x)$ покоящейся молекулы; это, по существу, означает, что мы учли центробежную силу. В качестве колеблющейся массы мы обязаны взять приведенную массу m атома азота и системы из трех атомов водорода.

Сначала рассмотрим колебание невращающейся молекулы. Взяв для среднего значения частоты колебания 950 *см*$^{-1}$, получим для первого возбужденного колебательного уровня энергию (3/2)950 = 1425 *см*$^{-1}$, равную $2{,}8 \cdot 10^{-13}$ *эрг*. Это превышает энергию, которую имела бы молекула, если бы ее ядра покоились в их равновесных положениях. С другой стороны, для колебаний вокруг равновесного положения x_0 потенциальная энергия восстанавливающей силы может быть записана в виде

$$U = 2\pi^2 m\nu^2 (x - x_0)^2 = 65\,700\,(x - x_0)^2. \qquad (4)$$

Отсюда следует, что амплитуда M колебаний, соответствующая по классической теории первому колебательному уровню, равна

$$\sqrt{\frac{2{,}8\cdot 10^{-13}}{65\,700}} = 0{,}206\cdot 10^{-8}.$$

Согласно классической теории, могли бы иметь место два совершенно эквивалентных колебания вокруг двух равновесных положений, симметричных относительно плоскости из трех атомов водорода, согласно же волновой механике, существует конечная вероятность перехода одной из этих двух форм колебания в другую (вследствие прохождения через потенциальный барьер EHF). Полуширина GF $= b$ потенциального барьера, очевидно, дается половиной расстояния x_0 между двумя равновесными положениями, из которой следует вычесть амплитуду классического колебания. Поэтому в нашем случае

$$b = 0{,}32\cdot 10^{-8} - 0{,}206\cdot 10^{-8} = 0{,}114\cdot 10^{-8}. \tag{5}$$

Чтобы оценить также высоту $p =$ GH потенциального барьера, мы можем использовать тот факт, что расщепление, обусловленное возможностью прохождения атома азота через потенциальный барьер, при $J = 0$ приблизительно равно 33 *см*$^{-1}$; это означает, что переход атома азота между положениями вблизи двух симметричных равновесных конфигураций происходит с частотой 33 *см*$^{-1}$. Для теоретического расчета этой частоты, естественно, необходимо было бы точно знать форму потенциального барьера; но для интересующей нас простой оценки порядка величины достаточно будет произвольно предположить, что форма потенциального барьера — парабола (поскольку это заведомо недалеко от истины). Поэтому примем следующую форму барьера:

$$g(x) = p - \frac{p}{b^2}x^2, \qquad |x| \leqslant b. \tag{6}$$

Для грубой оценки частоты $\delta\nu$, с которой происходят переходы через потенциальный барьер, можно воспользоваться формулой

$$\delta\nu = \nu e^{-\sqrt{\frac{8\pi^2 m}{h^2}}\int\limits_{-b}^{b}\sqrt{g(x)}\,dx} \tag{7}$$

(h — постоянная Планка); впрочем, существенно более точный расчет не имел бы смысла, так как отсутствуют точные данные об эффективной форме потенциального барьера. Учитывая соотношение (6) и интегрируя, находим

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = e^{-\frac{\pi^2 b}{h}\sqrt{2mp}}; \tag{8}$$

принимая в этой формуле $\delta\nu = 33$ *см*$^{-1}$, $\nu = 950$ *см*$^{-1}$, а для b, m и h — их численные значения, получаем, что высота p потенциального барьера равна

$$p = 4{,}6\cdot 10^{-13}\ \text{эрг} = 2350\ \text{см}^{-1}.$$

Чтобы оценить влияние вращения молекулы, подставим в формулу (2) выражение (1) для момента инерции A и разложим в степенной ряд по x, ограничиваясь членами x^2. Тогда найдем

$$W_R = \frac{h^2}{8\pi^2}\left\{\frac{J(J+1)}{A_0} + \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A_0}\right)\Omega^2\right\} - \frac{h^2 m\,[J(J+1) - \Omega^2]}{8\pi^2 A_0^2}\,x^2. \qquad (9)$$

Подставив это выражение в (3), будем подбирать произвольную константу так, чтобы в двух равновесных положениях U и V были равны между собой и чтобы положение энергетического уровня в первом приближении не изменялось. Поэтому положим

$$V(x) = U(x) + \frac{h^2 m\,[J(J+1) - \Omega^2]}{8\pi^2 A_0^2}\,(x_0^2 - x^2); \qquad (10)$$

последний член этой формулы представляет увеличение высоты потенциального барьера, обусловленное вращением. Чтобы рассчитать расщепление термов, $\delta\nu_R$, обусловленное прохождением через потенциальный барьер, можем опять воспользоваться формулой, подобной (7), где, однако, под корнем следует взять сумму $g(x)$ и последнего члена выражения (10). Тогда получим

$$\delta\nu_R = \nu\exp\left\{-\sqrt{\frac{8\pi^2 m}{h^2}}\int\sqrt{g(x) + \frac{h^2 m\,[J(J+1) - \Omega^2]}{8\pi^2 A_0^2}(x_0^2 - x^2)}\,dx\right\}. \qquad (11)$$

Разлагая корень в ряд и пренебрегая при этом квадратами выражения, добавленного к $g(x)$, а также учитывая соотношения (6) и (7), наконец, находим

$$\delta\nu_R = \delta\nu\exp\left\{-\frac{hm^{3/2}}{4\pi\sqrt{2}A_0^2}\cdot\frac{b}{\sqrt{p}}\int_{-b}^{b}\frac{x_0^2 - x^2}{\sqrt{b^2 - x^2}}\,dx\,[J(J+1) - \Omega^2]\right\}, \qquad (12)$$

откуда, интегрируя, имеем

$$\delta\nu_R = \delta\nu\exp\left\{-\frac{hm^{3/2}}{4\sqrt{2}A_0^2}\frac{b}{\sqrt{p}}\left(x_0^2 - \frac{b^2}{2}\right)[J(J+1) - \Omega^2]\right\}. \qquad (13)$$

В нашем приближении мы можем разложить в ряд показательную функцию, записав

$$\delta\nu_R = \delta\nu - \delta\nu\,\frac{hm^{3/2}}{4\sqrt{2}A_0^2}\frac{b}{\sqrt{p}}\left(x_0^2 - \frac{b^2}{2}\right)[J(J+1) - \Omega^2]. \qquad (14)$$

Подставляя для входящих сюда величин их численные значения и выражая частоты в $см^{-1}$, находим соотношение

$$\delta\nu_R = 33 - 0{,}083\,[J\,(J+1) - \Omega^2], \qquad (15)$$

которое выражает расщепление терма с вращательными квантовыми числами J и Ω.

Что же касается сравнения с опытом, заметим, что если не рассматривать обсуждаемое здесь расщепление, обусловленное возможностью прохождения через потенциальный барьер, то термы, различающиеся только значением Ω, приводят к появлению совпадающих линий вследствие правила отбора $\Delta\Omega = 0$. Но из соотношения (15) следует, что линии, соответствующие таким термам, оказываются немного смещенными по отношению друг к другу. Практически достижимая разрешающая способность недостаточна для наблюдения этих расщеплений, и наблюдаются только наложения этих линий, которые, как легко видно, имеют место при $\Omega = 0$. Поэтому практически можно наблюдать только расщепление, которое получается, если в соотношение (15) подставить $\Omega = 0$. Таким образом,

$$\delta\nu_J = 33 - 0{,}083\,J\,(J+1). \qquad (16)$$

Вычисленное с помощью этой формулы расщепление для последовательных вращательных термов очень хорошо согласуется с экспериментом. Например, для $J = 11$, т. е. для максимального квантового числа, по которому имеются экспериментальные данные, из выражения (16) следует $\delta\nu_{11} = 22$, а экспериментально найденное расщепление составляет 23 $см^{-1}$.

Конечно, явления, аналогичные рассмотренным здесь для первого возбужденного терма частоты 950 $см^{-1}$, имеют место и для других термов; однако они хуже изучены, частично вследствие малой величины расщепления, частично же ввиду слабой интенсивности соответствующих им полос. В частности, и основной терм должен иметь аналогичное расщепление. Более того, наше определение высоты потенциального барьера, разделяющего два равновесных положения, позволяет оценить порядок величины этого расщепления; оно оказывается равным приблизительно 1 $см^{-1}$.

1933

К статье 53

Вот что я могу вспомнить о тех обстоятельствах, при которых появилась статья «Действие магнитного поля Земли на проникающее излучение».

Во время одного из моих частых визитов в Рим Энрико Ферми и я встретились для обсуждения влияния магнитного поля Земли на распределение интенсивности космических лучей. Меня очень сильно интересовал этот эффект, изучение которого открывало возможность определения знака заряда первичных частиц космического излучения. Несколько раньше, исходя из установленных Штёрмером уравнений движения, я предсказал существование восточно-западной асимметрии в распределении интенсивности космических лучей. В экспериментах, выполненных во Флоренции, не удалось обнаружить ожидавшуюся асимметрию. Я полностью сознавал, что этот отрицательный результат можно было бы объяснить поглощением в атмосфере, если энергетические потери частиц космического излучения в воздухе были бы гораздо больше одних только ионизационных потерь. Но чтобы прийти к какому-то определенному заключению, необходимо было уточнить теорию геомагнитных явлений. В предыдущей работе я рассмотрел только вопрос о том, могут ли частицы космического излучения с данным импульсом достичь данной точки на поверхности Земли, двигаясь по данному направлению. Чтобы предсказания стали количественными, надо было оценить также относительные интенсивности излучения по различным допустимым направлениям. Когда я рассказал Ферми об этой задаче, он указал, что в этом случае приложима теорема Лиувилля, и дал очень простое решение, показавшее неизменность интенсивности во всех допустимых направлениях.

Пользуясь этим результатом, мы заново рассмотрели данные флорентийских экспериментов, а также данные Клея и других по широтному эффекту и пришли к выводу, что учет аномально большого поглощения в атмосфере действительно является наиболее вероятным объяснением всех имеющихся данных. Правильность этой интерпретации была доказана позже, когда было найдено, что первичные космические лучи состоят главным образом из протонов, которые теряют бóльшую часть своей энергии при ядерных столкновениях. Принимая те численные значения атмосферных потерь, которые следовали из нашего анализа, мы затем нашли, что восточно-западный эффект должен быть наиболее четко наблюдаем вблизи экватора. Уверенный в надежности этого предсказания, я решил организовать экспедицию для исследования космических лучей в Африке; эта экспедиция вскоре состоялась и дала ценные сведения о восточно-западном эффекте, о существовании которого тем временем объявили Джонсон, а также Альварец и Комптон.

Б. Росси

53

ДЕЙСТВИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ НА ПРОНИКАЮЩЕЕ ИЗЛУЧЕНИЕ *

(Совместно с Б. Росси)

Экспериментальные результаты, полученные в последние годы, показали, что проникающее излучение состоит из электрически заряженных частиц. Еще обсуждается вопрос о том, представляют ли эти частицы первичное излучение или они рождаются в верхних слоях атмосферы под действием излучения другой природы; основной аргумент в пользу вторичности природы корпускулярного излучения следует из того факта, что интенсивность проникающего излучения почти не зависит от широты (слабое уменьшение интенсивности в низких широтах обнаружилось только в самое последнее время в очень точных опытах).

В настоящей работе мы обсудим действие магнитного поля Земли на различных широтах и разных высотах, предполагая, что излучение обусловлено главным образом действием заряженных частиц (электроны и протоны), поступающих из космического пространства, где на больших расстояниях от небесных тел они распределены изотропно и однородно. Мы также сравним теоретические результаты с экспериментальными.

Движение заряженной частицы в магнитном поле Земли изучалось Штёрмером в связи с проблемой северных сияний. Применение его теории к проблемам проникающего излучения приводит к следующим результатам, если предположить, что частицами, падающими на Землю, являются электроны [1].

Когда энергия этих частиц превышает $61{,}5\cdot 10^9$ *эв*, они могут попасть в любую точку Земли и из любого направления. Если же их энергия меньше, то в точку Земли магнитной широты λ они могут попасть только из тех направлений, угол которых с плоскостью магнитного меридиана больше некоторого значения ϑ. Величина ϑ определяется условием

$$\sin\vartheta = \frac{K^2}{R^2}\cos\lambda - \frac{2K}{R\cos\lambda}, \qquad (1)$$

причем принимается, что направление с востока соответствует положительному углу; здесь $K^2 = 300M/V$; M — магнитный момент Земли $= 8{,}33\cdot 10^{25}$ CGS; R — радиус Земли $= 6{,}38\cdot 10^8$ *см*; V — энергия в *эв* [2].

---

* *Azione del campo magnetico terrestre sulla radiazione penetrante.* (Con B. Rossi). Rend. Lincei, 1933, 17, 346—350. Представлена на заседании 5 февраля 1933 г.

[1] По существу, такие же результаты получились бы в предположении, что частицами первичного излучения являются протоны (конечно, речь не идет о знаке). Это справедливо, по крайней мере, для энергий выше нескольких миллиардов электронвольт; в этом случае разница масс покоя протона и электрона вызывает только незначительную разницу в релятивистских уравнениях их движения.

[2] B. Rossi. Nuovo Cimento, 1931, 8, 8.

Из расчетов следует, что это условие необходимо; будем предполагать, что оно также и достаточно (что заведомо справедливо для некоторых частных случаев), т. е. что электроны фактически могут приходить только по тем направлениям, угол которых с магнитным меридианом больше ϑ[3].

Зависимость предельного угла ϑ от V для разных магнитных широт такова:

$\lambda = 0°$	$V = 10,3 \cdot 10^9$	$\vartheta = 90°$	$\lambda = 30°$	$V = 6,6 \cdot 10^9$	$\vartheta = 90°$
	12,7	25°		7,5	30°
	15,4	0°		8,6	0°
	25	—43°		10,3	—30°
	39,1	—69°30′		12,5	—60°
	61,5	—90°		13,6	—90°
$\lambda = 15°$	$V = 9,45 \cdot 10^9$	$\vartheta = 90°$	$\lambda = 45°$	$V = 3,27 \cdot 10^9$	$\vartheta = 90°$
	11,1	28°		3,53	30°
	13,4	0°		3,85	0°
	18,9	—36°30′		4,24	—30°
	25	—60°30′		4,6	—60°
	31	—90°		4,75	—90°

Рассмотрим теперь группу имеющих одинаковую энергию электронов (или протонов), движущихся в некотором магнитном поле, и проследим за движением тех из них, которые в начальный момент времени находятся в данном элементе объема и имеют скорости, направления которых заключены в заданном элементе телесного угла. Нетрудно доказать, что произведение элемента объема, в котором электроны (или протоны) содержатся, на элемент телесного угла, в котором лежат направления их скорости, остается постоянным во время движения группы частиц. Из этого свойства, аналогичного теореме Лиувилля (а также из гипотезы однородного и изотропного распределения электронов на бесконечном расстоянии от Земли), сразу следует, что для каждой точки «удельная» интенсивность проникающего излучения (число частиц, проходящих через единицу поверхности перпендикулярно ей за единицу времени в единичных интервалах энергии и телесного угла) одинакова во всех направлениях, из которых частицы фактически могут поступать (при этом не учитывается поглощение в атмосфере).

В предположении отсутствия атмосферы интенсивность на поверхности Земли каждой моноэнергетической компонѐнты проникающего излучения

[3] Из расчета Лемэтра и Валларты (L e m a i t r e, V a l l a r t a. Phys., Rev., 1933, 43, 87), опубликованного в то время, когда наша работа находилась в печати, как будто следует, что это утверждение не всегда верно, т. е. что имеются «запрещенные направления», угол которых с плоскостью магнитного меридиана больше ϑ. Однако это не меняет существенно результатов нашего анализа.

с энергией меньше $6{,}15 \cdot 10^{10}$ *эв* должна была бы оставаться постоянной при движении от магнитного полюса в сторону экватора вплоть до определенного расстояния от полюса (оно тем больше, чем больше энергия). Затем эта интенсивность должна была бы постепенно уменьшаться и в конце концов стать равной нулю вследствие того, что конус со все возрастающей апертурой оказывается «в тени». *Полная* интенсивность проникающего излучения поэтому должна была бы непрерывно уменьшаться от полюса в направлении к экватору (при этом предполагалось, что энергетический спектр этого излучения непрерывно растет от нуля до максимального значения).

При учете поглощения атмосферы этот результат изменится.

В первом приближении (справедливом, когда толщина атмосферы много меньше радиуса кривизны траектории) можно рассмотреть по отдельности действие магнитного поля и поглощение атмосферы. Итак, обусловленное суммарным действием обоих этих факторов распределение интенсивности проникающего излучения определяется следующим образом: в данную точку и из данного направления могут поступать только те частицы, энергия которых одновременно больше определенной уравнением (1) и больше энергии, необходимой для прохождения ими в этом направлении вышележащего слоя атмосферы. При этом такие частицы поступают с той же интенсивностью, с которой они поступали бы в отсутствие как атмосферы, так и магнитного поля Земли.

Сразу понятно, какой должна быть зависимость определенного таким образом распределения от высоты над уровнем моря, от магнитной широты, а также (для заданного места наблюдения) от направления падения [4].

а) При движении от магнитного полюса к экватору полная интенсивность проникающего излучения на определенной высоте должна оставаться постоянной вплоть до такого расстояния от экватора, где магнитное поле Земли начинает препятствовать падению тех частиц, которые могли бы пройти через вышележащий слой атмосферы. При дальнейшем движении к экватору интенсивность должна постоянно уменьшаться.

б) На данной магнитной широте интенсивность проникающего излучения *в определенном направлении*, при движении по этому направлению от границы атмосферы вниз, должна оставаться постоянной вплоть до такого расстояния от границы атмосферы, где начинают поглощаться наиболее медленные частицы, которым магнитное поле Земли позволяет достигать границы атмосферы по данному направлению. Затем должно наступать постепенное уменьшение интенсивности; и на таком большом расстоянии от границы атмосферы, куда могут попасть лишь частицы настолько быстрые, что им не препятствует магнитное поле Земли, эта интенсивность должна совпадать с интенсивностью, которая наблюдалась бы в отсутствие магнитного поля.

---

[4] См. также недавнюю работу Регенера (E. Regener. Naturwiss., 1933, 21, 43).— *Прим. авт. при корректуре.*

Пусть теперь измеряется, как это обычно делают, *глобальная* интенсивность во всех направлениях (а не интенсивность в заданном направлении); тогда кривая интенсивности как функция расстояния от границы атмосферы вначале должна довольно медленно падать и касаться в точке перегиба нормальной кривой поглощения (т. е. кривой, которая наблюдалась бы в отсутствие магнитного поля Земли).

в) Во всех точках, где глобальная интенсивность проникающего излучения меньше той, которая наблюдалась бы в отсутствие магнитного поля Земли, число прилетающих с запада от магнитного меридиана частиц должно быть меньше числа частиц, прилетающих с востока, так как мы видели, что западные направления «попадают в тень» раньше восточных.

Действительно, зависимость интенсивности от магнитной широты типа «а» наблюдали Клей [5], Клей и Берлаж [6] и Комптон [7], а кривую интенсивности как функцию высоты типа «б» наблюдал Регенер [8].

Согласие экспериментальных результатов с теоретически предсказанными оказывается даже количественным, если предположить, что потери энергии частиц проникающего излучения в веществе составляют около $13 \cdot 10^6$ *эв* на *г/см*^{2}. Эта гипотеза объясняет также, почему никакая асимметрия типа «в» не наблюдалась во Флоренции [2]. Действительно, на наших широтах и вблизи уровня моря атмосфера поглощает все космические лучи, на которые могло бы повлиять магнитное поле Земли.

Значение, которое нам пришлось приписать величине энергетических потерь частиц космического излучения, приблизительно в три раза больше рассчитанного Гейзенбергом [9] для электронов соответствующей энергии. Однако, учитывая неопределенность теоретических оценок, мы полагаем, что большее значение следует придать качественному согласию, чем количественному несогласию; поэтому, видимо, допустимо заключить, что результаты уже выполненных опытов находятся в согласии (также с точки зрения влияния магнитного поля Земли) с гипотезой о том, что первичное проникающее излучение имеет корпускулярную природу.

Для дальнейшей проверки этой гипотезы намечены следующие опыты.

1. Определение зависимости интенсивности от высоты на разных магнитных широтах. Точка перегиба должна появиться на тем меньшей высоте, чем меньше магнитная широта.

2. Измерение зависимости интенсивности от азимута на достаточно большой высоте над уровнем моря и на такой низкой магнитной широте, чтобы действие магнитного поля Земли еще оказывало влияние. Мы думаем, что будет найдена асимметрия интенсивности по отношению к плоскости магнитного меридиана; по-видимому, из знака этой асимметрии можно будет получить знак заряда частиц проникающего излучения.

---

[5] J. Clay. Amsterd. Proc., 1930, 33, 711.
[6] J. Clay, H. P. Berlage. Naturwiss., 1932, 20, 687.
[7] A. H. Compton. Phys. Rev., 1932, 41, 111.
[8] E. Regener. Naturwiss., 1932, 30, 69.
[9] W. Heisenberg. Ann. d. Phys., 1932, 13, 430.

См. вводные замечания к статье 42

54

К ТЕОРИИ СВЕРХТОНКОЙ СТРУКТУРЫ *

(Совместно с Э. Сегре)

Исследуется сверхтонкая структура элементов Li, Na, Cu, Ga, Rb, Cd, In, Cs, Ba, Au, Hg, Tl, Pb, Bi, хорошо изученная экспериментально и сравнительно доступная для теоретического анализа. В частности, обсуждается, сколь далеко можно продвинуться, объясняя наблюдаемую сверхтонкую структуру в рамках одной только гипотезы ядерного магнитного момента. Оказывается, что предположение о магнитной связи ни в одном случае не противоречит экспериментальным результатам, если принять во внимание также и многочисленные взаимные возмущения различных электронных конфигураций; оно достаточно, чтобы объяснить, по крайней мере в общих чертах, весь экспериментальный материал, хотя не исключена возможность того, что и другие причины вызывают малые возмущения. Наконец, рассматриваются выводы, которые можно сделать из опытов по магнитным моментам ядер.

§ 1. Введение

Сверхтонкая структура (СТС) спектральных линий уже давно объяснялась взаимодействием ядра с электронной оболочкой [1]. Самая естественная гипотеза, объясняющая это взаимодействие, состоит в том, что ядру приписывается собственный магнитный момент, связанный с его механическим моментом. При движении вокруг ядра электроны создают действующее на ядро магнитное поле; ядро может ориентироваться различным образом относительно этого поля, приобретая при этом различные магнитные энергии. Это и приводит к расщеплению энергетических уровней. Таким образом, из каждого электронного терма получается мультиплет СТС, совершенно аналогичный обычному мультиплету с точной связью типа Рассела — Саундерса. При этом существует следующее соответствие между векторами, представляющими моменты количества движения различных частей атома:

Обычный мультиплет	L	S	J
Мультиплет СТС	J	I	F

* *Sulla teoria delle strutture iperfini.* (Con E. Segrè. Mem. Accad. d'Italia, 1933, 4 (Fis.), 131—158. Представлена на заседании 10 марта 1933 г.

Согласно обычным обозначениям I и F представляют собой, соответственно, собственный механический момент ядра и полный момент атома (результирующую I и J).

В частности, для мультиплетов СТС остаются в силе правило интервалов и обычные формулы эффекта Зеемана, что впервые экспериментально показали Гаудсмит и Бак [2]. Поэтому каждый мультиплет можно характеризовать всего одной константой A. Положение отдельных уровней относительно центра тяжести мультиплета дается формулой

$$A(J, I) = \frac{1}{2} A [F(F+1) - J(J+1) - I(I+1)], \qquad (1)$$

причем

$$I + J \geqslant F \geqslant |I - J|.$$

Предположим, что СТС обусловлена исключительно магнитным моментом ядра, и поэтому константа A принимает классическое значение

$$A = \frac{\mu H}{IJ}, \qquad (2)$$

где μ означает магнитный момент ядра, а H — магнитное поле, которое создают электроны в той точке, где находится ядро. В рамках квантового подхода можно сохранить равенство (2), если только уточнить определение μ и H следующим образом: μ есть значение z-компоненты ядерного магнитного момента, когда $I_z = I$ (в классическом смысле это означало бы, что момент ядра ориентирован параллельно оси z); аналогично, H представляет собой среднее значение компоненты H_z магнитного поля, создаваемого электронами в месте нахождения ядра, для состояния, в котором $M = J$.

Поле H можно вычислить, если известны собственные функции электронов. Таким образом, с помощью равенства (2) из экспериментальных данных для A можно находить величины магнитных моментов ядер. Теория может считаться удовлетворительной, если при вычислении μ по различным термам нейтральных атомов или ионов, содержащих одно и то же ядро, получится одинаковый результат.

Подобные расчеты в нерелятивистском приближении для электрона в центральном поле были выполнены несколькими авторами [3]. Затем были введены релятивистские поправки [4], которые особенно велики для тяжелых элементов. Наконец, Гаудсмит и др.[5] рассмотрели также случай многих электронов. Однако количественное сравнение результатов этих расчетов с опытом привело к значительным трудностям [6], так как вычисление μ по расщеплению СТС различных термов давало, казалось, существенно разные значения. В связи с этим распространилось мнение, что помимо магнитного момента ядра, видимо, существуют и другие причины, вызывающие такие же по порядку величины расщепления.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы еще раз обстоятельно проанализировать эту проблему и устранить различные неточности, которые обусловлены недостаточными приближениями. При этом выяснится, что мнимые противоречия можно естественным образом объяснить возмущениями, которые не учитывались в прежних расчетах. Обычно такие возмущения количественно точно рассчитать нельзя; однако по порядку величины они вполне сравнимы с отклонениями экспериментальных данных от простейшей теории. Возмущения обусловлены обычно электронными конфигурациями, отличающимися от конфигурации рассматриваемого терма. Их влияние заметно либо благодаря очень близкому расположению возмущающих уровней, либо благодаря тому, что эти термы связаны с ядром сильнее, чем возмущаемые.

В § 2 рассматривается численный расчет отдельных собственных функций электронов. Для s-термов существенной оказывается лишь величина $\psi(0)$, и будет показано, что с достаточной точностью она дается полуэмпирической формулой Ланде — Гаудсмита; правда, эту формулу нужно дополнить некоторыми поправками, которые по большей части являются релятивистскими, но, как будет показано, иногда могут иметь также и другую природу. Этим в значительной мере устраняются сомнения, обусловленные приближенностью численных методов расчета. Для p- и d-электронов связь с ядром определяется средним значением $\overline{1/r^3}$; чтобы вычислить эту величину, не обязательно знать точные собственные функции, поскольку она получается из обычного мультиплетного расщепления с некоторыми поправками, учитывающими то обстоятельство, что в отличие от расщепления СТС обычное мультиплетное расщепление определяется величиной $\overline{\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}}$, а не $\overline{1/r^3}$.

В отдельных случаях эти поправки значительны (30%), но их можно вычислить без существенных неточностей, так как они зависят главным образом от значений собственных функций во внутренней области, где статистический метод оказывается достаточно точным.

В § 3 обсуждаются возможные возмущения и на некоторых типичных примерах демонстрируется их проявление, когда возмущающие термы относятся либо к одной и той же, либо к разным конфигурациям. Наконец, даются критерии, позволяющие установить, можно ли рассматривать некий терм как слабо возмущенный и, значит, использовать его константу СТС для вычисления надежного значения ядерного магнитного момента.

В § 4 рассматриваются данные об СТС всех тех элементов, для которых существует достоверный экспериментальный материал и которые с теоретической точки зрения достаточно просты, чтобы их можно было рассматривать с адекватным приближением.

§ 2. Численный расчет констант связи отдельных электронов

а) *Случай одного s-электрона.* В нерелятивистском приближении константа связи для одного s-электрона в центральном поле равна

$$a = \frac{16\pi}{3}\frac{1}{J}\mu\mu_0\psi^2(0), \tag{3}$$

где μ_0 означает магнетон Бора. Очевидно, впрочем, что эта формула в релятивистском случае неприменима. Действительно, согласно теории Дирака, амплитуда вероятности для электрона в начале координат стремится к бесконечности. В этом случае оказывается, что в формуле (3) нужно заменить ψ^2 (0) выражением

$$\frac{8\pi mc}{h}\int\limits_0^\infty FGdr = \psi^2_{\text{эфф}}(0), \tag{4}$$

в котором F и G представляют собой собственные функции Дарвина [7], связанные с четырьмя функциями Дирака соотношениями

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= i\cos\theta F(r), & \psi_1 &= i\sin\theta e^{-i\varphi}F(r),\\ \psi_2 &= i\sin\theta e^{i\varphi}F(r), & \psi_2 &= -i\cos\theta F(r),\\ \psi_3 &= G(r), & \psi_3 &= 0,\\ \psi_4 &= 0, & \psi_4 &= G(r). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Выбор той или иной четверки функций определяется здесь ориентацией спина.

Для вычисления интеграла (4) недостаточно знать собственные функции только в непосредственной близости к ядру, так как нормировочный множитель очень сильно зависит от их значений во внешней области. Но при вычислении указанного множителя основную роль играет именно далекая полуволна собственной функции, т. е. та, для которой ненадежность численного расчета становится особенно ощутимой. Вследствие этого непосредственные расчеты с помощью статистического метода несут в себе значительную неточность.

Различные авторы [8] пользовались полуэмпирической формулой

$$\psi^2(0) = \frac{1}{\pi a^3}\frac{Z(1+z)^2}{n^2_{\text{эфф}}} \tag{6}$$

(a — боровский радиус, z — кратность ионизации, $n_{\text{эфф}}$ — эффективное квантовое число), при необходимости с учетом релятивистской поправки.

Проведем систематическое обсуждение применимости формулы (6) так как кроме исключительной простоты она обладает еще тем преимуще-

ством, что не зависит от ошибок, которые вносит статистический расчет в значения собственных функций во внешней области; $n_{эфф}$ можно взять непосредственно из спектроскопических данных.

Теперь остается доказать справедливость формулы (6) для легких элементов, когда мы интересуемся термами, которые хорошо описываются формулой Ридберга.

В общем случае, учитывая релятивистские поправки, $\psi^2_{эфф}(0)$ можно выразить эмпирической формулой

$$\psi^2_{эфф}(0) = \frac{1}{\pi a^3 (1 - \beta^2 Z^2)^2} \frac{Z}{2Rh} \frac{dE}{dn}, \tag{7}$$

в которой $\beta = 1/139$, а E означает энергию, выраженную через квантовое число n.

Доказательство этой формулы приводится в приложении I. Функция $E(n)$ определена, разумеется, только для целочисленных значений аргумента; тем не менее ее можно представить как дифференцируемую функцию, используя интерполяцию с помощью, например, формулы Ридберга или аналогичных ей. Релятивистская поправка вводится множителем $1/(1 - \beta^2 Z^2)^2$. Он имеет интерполяционный характер, и его численное значение почти точно совпадает с тем, что дают Рака и Брейт [4]. С точностью до этого множителя формулы (7) и (6) совпадают, если термы описываются формулой Ридберга $E = -Rh/(n - s)^2$. Когда поправка Ридберга s не постоянна, формула (7) принимает вид:

$$\psi^2_{эфф}(0) = \frac{2{,}16 \cdot 10^{24}}{(1 - \beta^2 Z^2)^2} \frac{Z(1 + z)^2}{n^3_{эфф}} \left(1 - \frac{ds}{dn}\right). \tag{8}$$

Помимо релятивистского множителя в этой формуле имеется поправочный коэффициент $1 - \frac{ds}{dn}$, который в отдельных случаях может изменить результат до 10%.

Взяв значение $\psi^2_{эфф}(0)$ из равенства (8) и выразив константу СТС в волновых числах, получим с помощью равенства (3) следующую формулу:

$$a = 15{,}5 \frac{\mu}{\mu_0 I} \frac{1}{(1 - \beta^2 Z^2)^2} \frac{Z(1 + z)^2}{n^3_{эфф}} \left(1 - \frac{ds}{dn}\right), \tag{9}$$

которая лежит в основе вычислений; при этом ds/dn полагается равной разности поправок Ридберга к рассматриваемому и к следующему термам, если такие данные известны.

б) *Случай одного p- или d-электрона.* Для одного p- или d-электрона константа СТС равна [9]

$$a = \frac{2l(l + 1)}{Ij(j + 1)} \mu\mu_0 \overline{\frac{1}{r^3}} \tag{10}$$

и, таким образом, зависит в основном от $\overline{1/r^3}$. Чтобы рассчитать эту величину, целесообразно воспользоваться обычным мультиплетным расщеплением, полная ширина которого в *см*$^{-1}$ равна

$$\delta = \frac{\mu_0^2}{hce}(2l+1)\overline{\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}}. \qquad (11)$$

Зная δ, можно сразу же получить значение $\overline{\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}}$. В определяющем эту величину интеграле преобладают области, близкие к ядру (малые r), где V довольно точно вычисляется статистическим методом. Однако и значения собственной функции во внешней области оказываются существенными благодаря своему влиянию на нормировочный множитель, так что их неточность заметно влияет на результат. Если же вычислять отношение $\overline{\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}}$ к $\overline{\frac{1}{r^3}}$, то нормировочный множитель выпадает из расчетов, что означает значительное их улучшение.

При этом в первом, грубом приближении можно пренебречь экранировкой во внутренней области атома и положить

$$V = \frac{Ze}{r}, \qquad (12)$$

так что

$$\eta = -\frac{\overline{\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}}}{\overline{1/r^3}} = Ze. \qquad (13)$$

В некоторых случаях это приближение дает хорошие результаты, в других — для V нужно брать более точное статистическое выражение

$$V = \frac{e}{r}\left[(Z-1)\varphi(r/\mu)+1\right]. \qquad (14)$$

Отсюда следует, что

$$-\frac{1}{r}\frac{dV}{dr} = \frac{e}{r^3}\left[(Z-1)(\varphi - x\varphi')+1\right]; \qquad (15)$$

здесь x есть расстояние r, деленное на характерную для статистического метода единицу длины μ.

Отношение η будет тогда равно

$$\eta = eZ^* = e\left[(Z-1)\frac{\int(\varphi - x\varphi')\frac{\psi^2}{r^3}\,d\tau}{\int\frac{\psi^2}{r^3}\,d\tau}+1\right]. \qquad (16)$$

Фигурирующие здесь интегралы вычисляются со значительной точностью статистическим методом, так как благодаря множителю $1/r^3$ преобладающая часть интеграла связана с внутренними областями атома. Таким образом, по сравнению с (13) возникает поправка, которая, вообще говоря, мала для p- и больше для d-электронов, поскольку они проникают в атом не так глубоко. Например, для $3d$-электрона меди расчет дает

$$\eta = 19{,}6e = Z^*e, \tag{17}$$

в то время как приближенная формула (13) дает $\eta = 29e$; в этом случае, следовательно, поправка составляет 30%.

Согласно Брейту [9], нужно ввести еще одну поправку, особенно существенную для p-электронов тяжелых атомов и учитывающую то обстоятельство, что энергии состояний $p_{1/2}$ и $p_{3/2}$ различаются и поэтому их нормировочные множители также различны.

Для практических расчетов из формул (10), (11) и (17) получаем

$$A = \frac{2l(l+1)}{Jl(j+1)(2l+1)}\frac{\mu}{\mu_0}\frac{\delta}{Z^*}. \tag{18}$$

§ 3. Влияние возмущений

Используя приведенные в предыдущем параграфе формулы для вычисления μ по различным термам (для одного и того же ядра), в отдельных случаях можно получить удовлетворительно совпадающие значения. Но другие термы дают совершенно несогласующиеся значения μ.

Как уже отмечалось, противоречия такого рода были обнаружены во многих случаях, что повлекло за собой сильные сомнения в справедливости гипотезы, согласно которой СТС объясняется, хотя бы в общих чертах, действием магнитного момента ядра. Мы же покажем, что указанные расхождения объясняются взаимным возмущающим действием электронных термов.

Если возмущающие друг друга термы близки по энергии, эффект очевиден без дальнейших пояснений; но возмущение может оказаться относительно большим также и в том случае, когда взаимно возмущающие термы отстоят далеко один от другого. В частности, это происходит, если константа СТС возмущенного терма мала по сравнению с константой возмущающего.

Нужно различать два типа возмущений: а) между термами одинаковой конфигурации, б) между термами различных конфигураций.

Возмущения типа «а» уже рассмотрены другими авторами [10] и имеют место во многих случаях, когда осуществляется связь, промежуточная между связью Рассела—Саундерса и JJ-связью. Поэтому мы не будем останавливаться на возмущениях такого рода; впрочем, с типичным примером таких возмущений мы встретимся в случае Tl II.

Перейдем к более интересному случаю возмущений между термами различных электронных конфигураций.

Обычно собственные функции атома со многими электронами приближенно описывают антисимметризованным произведением индивидуальных собственных функций отдельных электронов. Действительные же собственные функции представляют собой линейные комбинации таких функций нулевого приближения. Пусть ψ_1 есть собственная функция нулевого приближения для терма с заданной электронной конфигурацией, а ψ_i — собственная функция какого-то другого терма. Тогда, согласно теории возмущений, собственная функция первого приближения дается выражением

$$\Psi_1 = \psi_1 + \sum_i{}' \frac{V_{1i}}{E_1 - E_i} \psi_i, \tag{19}$$

где E_1 и E_i — невозмущенные энергии, а V_{1i} — матричный элемент энергии возмущения, связывающий состояния 1 и i. В нашем случае в качестве возмущения берется, в сущности, электростатическая энергия. Для ее матричных элементов справедливы простые правила отбора:

а) равны нулю все матричные элементы, связывающие состояния с разными J.

б) равны нулю матричные элементы, связывающие четные и нечетные термы (в смысле правила Лапорта).

Если два терма 1 и i имеют одинаковое J и оба являются четными или нечетными, то, по крайней мере в общем случае, матричный элемент V_{1i} отличен от нуля. Так как он представляет электростатическую энергию, то по порядку величины он сравним с интервалом между термами одной и той же конфигурации, но различной мультиплетности, т. е. около 1 *эв* для глубоких термов нейтральных атомов.

Для теории СТС смешивание различных конфигураций оказывается важным потому, что существуют такие конфигурации, которые очень сильно связаны с ядром, несмотря на большую энергию; таковыми, в частности, являются конфигурации, содержащие один s-электрон на сравнительно низкой орбите. Если собственная функция подобного типа ψ_2 смешивается, согласно (19), с другой функцией ψ_1, обладающей малой СТС, то относительное возмущение константы СТС может оказаться вполне заметным, даже когда сама величина $\frac{V_{12}}{E_1 - E_2}$ довольно мала.

Предположим, например, что возмущающая конфигурация отличается по энергии от возмущенной на 5 *эв* и относится, следовательно, совсем к другой спектральной области. Если величина матричного элемента V_{12} составляет 1 *эв*, то в соответствии с (19) возмущенной собственной функцией будет

$$\Psi_1 = \psi_1 + 0{,}2\psi_2,$$

т. е. состояние 1 содержит вклад $(0{,}2)^2 = 4\%$ состояния 2. Если предположить, например, что по сравнению с состоянием 1 расщепление конфигурации 2, содержащей один глубокий s-электрон, в 50 раз больше, как иногда это имеет место, то возмущение в 4% может либо утроить константу связи состояния 1, либо поменять ее знак. Это происходит уже тогда, когда отбрасываются недиагональные элементы связи с ядром, которые в отдельных случаях могут вызывать эффекты того же порядка величины (или еще большие), что и указанный выше.

При рассмотрении экспериментального материала по СТС обнаруживается много примеров подобного рода возмущений. По нашему мнению, именно такими возмущениями следует объяснить большую часть упомянутых расхождений, которые вызывали сомнения в правильности самих основ теории.

Очень характерный пример влияния возмущений на различные конфигурации обнаружен в спектре PbII. Изотоп свинец-207 имеет $I = 1/2$ и, согласно Копферману, Шюлеру и Джонсу, термы его спектра имеют следующие интервалы расщепления СТС:

Терм	$\Delta\nu$, *см*$^{-1}$	Терм	$\Delta\nu$, *см*$^{-1}$
$6s^2 7s\ ^2S_{1/2}$	0,352	$6s^2 6d\ ^2D_{5/2}$	0,713
$6s^2 7p\ ^2P_{1/2}$	0,077	$6s\, 6p^2\ ^2D_{5/2}$	0,956
$6s^2 7p\ ^2P_{3/2}$	0,022		

Изучение этой таблицы указывает на довольно большую величину расщепления терма $7^2S_{1/2}$, что и понятно, ибо в нем имеется непарный $7s$-электрон. В качественном согласии с теорией, расщепление двух термов 7^2P оказывается меньше. Напротив, расщепление терма $6s^26d\ ^2D_{5/2}$ очень велико, что на первый взгляд представляется удивительным, так как два электрона $6s$ взаимно компенсируются, а еще один электрон, $6d$, находится очень далеко снаружи. Причина аномального поведения этого терма заключается в том, что он сильно возмущен термом $6s6p^2\ ^2D_{5/2}$, большое расщепление которого обязано наличию непарного $6s$-электрона. Эти два терма отстоят один от другого примерно на 0,6 *эв*, и, поскольку у них одинаковые J и оба они четны, согласно правилам отбора они могут взаимно возмущаться. Более того, благодаря малой разности их энергий, как можно проверить, их собственные функции приближенно являются линейными комбинациями невозмущенных собственных функций ψ_1 и ψ_2, которые относятся к конфигурациям $6s^26d$ и $6s6p^2$, причем с коэффициентами одного порядка по абсолютной величине. Таким образом, имеем

$$\Psi_1 = \alpha'\psi_1 + \beta'\psi_2, \qquad \Psi_2 = \alpha''\psi_1 + \beta''\psi_2, \qquad (20)$$

где α и β равны по порядку величины. Предположим, что, как и в нашем

случае, связь состояния 1 с ядром пренебрежимо мала; тогда легко видеть, что СТС двух термов дается соответственно величинами β'^2 и β''^2, умноженными на константу СТС, которую имел бы терм 2, если бы он существовал в чистом состоянии. Правда, нужно заметить, что в действительности ситуация несколько усложняется вследствие присутствия в той же конфигурации терма $^4P_{3/2}$, положение которого неизвестно, но который находится, вероятно, недалеко от рассматриваемых термов и поэтому также может их заметно возмущать.

В спектре же нейтрального Tl имеется типичный пример энергетически далекой конфигурации, которая значительно изменяет СТС, хотя в собственную функцию дает малый вклад. Нередко отмечалось значительное расхождение между элементарной теорией СТС и экспериментальными результатами для расщепления основного дублета таллия 6^2P. Образующие основное состояние термы $^2P_{1/2}$ и $^2P_{3/2}$ имеют интервалы СТС 0,707 и 0,008 *см*$^{-1}$ соответственно. Согласно элементарной теории, расщепление терма с $J = 3/2$ должно быть меньше, чем у терма с $J = 1/2$, однако даже при учете всех релятивистских поправок их отношение не должно превышать 10. Поэтому, чтобы находиться в правильном соотношении с термом $^2P_{1/2}$, терм $^2P_{3/2}$ должен был бы иметь СТС, равную приблизительно 0,070, тогда как экспериментальное значение в 8—9 раз меньше. Для устранения этого расхождения нужно показать, следовательно, что имеется возмущение, которое может уменьшить СТС терма $^2P_{3/2}$ примерно на 0,06.

Итак, мы должны выяснить, не существует ли конфигурации, которая может вызвать подобного рода возмущение. Она должна была бы обладать большим расщеплением и, следовательно, содержать один непарный электрон $6s$ (если бы мы взяли очень стабильную оболочку $5s$, энергия оказалась бы недопустимо большой); кроме того, она должна быть нечетной, так же как и возмущенная конфигурация $6s^26p$. Выясняется, таким образом, что в качестве отдельных конфигураций нужно рассмотреть только $6s6p7s$ или $6s6p6d$. Первая из них имеет более низкую энергию, и ее термы могут лежать вблизи энергии ионизации атома или несколько выше, т. е. около 6—7 *эв* над основным состоянием; другая конфигурация располагается еще примерно на 2 *эв* выше. Обе конфигурации содержат также и термы с $J = 3/2$, которые могут вызывать возмущения. Однако большее влияние оказывает конфигурация $6s6p7s$, которая преобладает как из-за того, что она ближе по энергии, так и потому, что определяемые электростатическими интегралами матричные элементы V_{12} для нее оказываются больше. С помощью известных в настоящее время численных методов выполнить точный расчет возмущения, создаваемого этой конфигурацией, представляется невозможным; в лучшем случае можно оценить лишь порядок его величины. Более подробно это рассмотрение проведено в приложении II. Оказалось, что существует терм с конфигурацией $6s6p7s$, стремящийся уменьшить СТС терма $^2P_{3/2}$; как выясняется в результате численного расчета интегралов возмущения, его влияние столь велико по

сравнению с другими термами, что в итоге происходит уменьшение СТС примерно на 0,09 *см*$^{-1}$, но это как раз величина того порядка, которая нужна для согласования теории с экспериментом. При обсуждении СТС для различных элементов мы познакомимся с другими примерами возмущений такого рода.

Для вычисления ядерных магнитных моментов необходимо, конечно, чтобы термы, на которые опирается расчет, наверняка были бы мало возмущены. Зачастую нельзя с уверенностью решить, так ли обстоит дело в действительности. Как правило, относительное возмущение минимально у тех термов, которые сами обладают большой константой СТС, т. е. преимущественно у термов с конфигурацией, содержащей непарный s-электрон. Во всех изученных случаях ни разу не встречалось того, чтобы два терма, априори считавшиеся слабо возмущенными, давали бы существенно различающиеся значения магнитных моментов. В тех спектрах, в которых различные термы, априори представляющиеся свободными от возмущений, с хорошей точностью дают одно и то же значение магнитного момента, это значение становится весьма достоверным. Однако результаты следует принимать с большой осторожностью в случае тех спектров, для которых из-за недостатка экспериментальных данных расчет можно провести всего лишь по одному терму. Например, это имеет место в случае щелочных металлов, для которых известен всего один слабо возмущенный терм — терм основного состояния нейтрального атома — и поэтому никакой контроль невозможен.

§ 4. Обсуждение экспериментальных данных

Перейдем теперь к обзору данных для ряда элементов, чтобы изучить особенности их СТС и вывести значение магнитного момента ядра. Будем представлять его в виде отношения μ_0/μ магнетона Бора к ядерному магнитному моменту.

Li. $Z = 3$. Изотоп литий-7 имеет $I = 3/2$. Он всесторонне изучен Брейтом [11], а также Гюттингером и Паули [12]. Согласно Брейту, $\mu_0/\mu = 575$.

Na. $Z = 11$. Существует только один изотоп с массовым числом 23. СТС состоит [13] из расщепления 0,061 *см*$^{-1}$ основного состояния $3\,^2S_{1/2}$. Механический момент ядра I достоверно не известен. В качестве вероятных значений Шюлер дает 5/2 или 3/2. С помощью формулы (9) находим

$$\frac{2I}{2I+1}\frac{\mu_0}{\mu} = 660,$$

откуда $\mu_0/\mu = 880$, если $I = 3/2$, соответственно $\mu_0/\mu = 790$, когда $I = 5/2$.

Cu. $Z = 29$. СТС этого спектра частично обусловлена изотопическим сдвигом, а частично — магнитным моментом ядра. Ричль[14] исследовал неко-

торые термы Cu I и для обоих изотопов, медь-63 и 65, нашел $I = 3/2$. Термы Cu I относятся к двум разным системам: к системе нормальных дублетов $3d^{10}ms$, $3d^{10}mp$, $3d^{10}md$ и т. д. и к системе термов, в которой один из десяти $3d$-электронов удален из этой оболочки и помещен в другие квантовые состояния. Самыми глубокими термами подобного типа являются $3d^9 4s^2$. Другие низкие термы, в которых нарушена оболочка $3d$, имеют конфигурацию a $(3d^9 4s4p)$.

Низкие термы $3d^{10}4s^2 S_{1/2}$ и $3d^9 4s^2\ {}^2D$ обладают довольно большими константами СТС и поэтому, вероятно, несильно возмущены. С помощью формул (9) и (18) по этим термам можно вычислить μ_0/μ, положив $Z^* = 19{,}6$. Из соответствующих термов получаем:

$4^2S_{1/2}$	$A = 0{,}195$ *см*$^{-1}$	$\mu_0/\mu = 760$
$3^2D_{3/2}$	0,060 »	740
$3^2D_{5/2}$	0,022 »	870

При этом мы не рассматриваем термы $3d^{10}4p^2\ {}^2P$, так как они наверняка возмущены конфигурацией a. Приведенные выше три величины удовлетворительно согласуются между собой; по-видимому, согласие можно было бы улучшить, приняв во внимание релятивистские поправки к термам ${}^2D$. В качестве вероятного значения μ_0/μ для обоих изотопов меди выбираем 780.

Ga. $Z=31$. Изотопы галлий-69 и -71 имеют $I = 3/2$. Спектр GaI исследован Джексоном [15]. Измерения не очень точны. Для термов $5^2S_{1/2}$ и $4^2P_{1/2}$ он нашел расщепления 0,09 и 0,10 *см*$^{-1}$ соответственно. Джексон и не обнаружил различия между расщеплениями двух изотопов. Из его данных получается $\mu_0/\mu \cong 800$.

Кэмпбелл [16] исследовал расщепления СТС Ga II, значительно бо́льшие, чем у GaI; ему удалось наблюдать ускользнувшее от Джексона различие между этими изотопами. Данные Кэмпбелла относятся к терму 5^3S_1. Константа СТС этого терма равна 0,259 для галлия-69; а для галлия-71 $A = 0{,}331$. Вычисление μ_0/μ по этим данным выполнено методом, который будет описан при анализе аналогичного спектра Tl II. Найдено, что для галлия-69 отношение $\mu_0/\mu = 860$, а для галлия-71 $\mu_0/\mu = 670$. Эти результаты несколько неточны вследствие неопределенности эффективного квантового числа электрона $4s$, однако они удовлетворительно согласуются с предыдущими результатами.

Rb. $Z = 37$. Два изотопа: рубидий-85 с $I = 5/2$ и рубидий-87 с $I = 3/2$ или $5/2$. Значения I определены [17] из спектра Rb II. У этого элемента известен также всего один надежный терм — основной терм $5^2S_{1/2}$ Rb I. Расщепление данного терма различно для этих изотопов: согласно Копферману, для Rb^{85} $\Delta\nu = 0{,}106$, а для Rb^{87} $\Delta\nu = 0{,}242$; отсюда получаем $\mu_0/\mu = 1350$ для Rb^{85} и $\frac{2I}{2I+1}\mu_0/\mu = 490$ для другого изотопа. Та-

ким образом, для Rb^{87} величина μ_0/μ равна 590 или 660 в зависимости от того, чему равен I : 5/2 или 3/2.

Cd. $Z = 48$. У четных изотопов кадмий-110, -112, -114, -116 $I = 0$; нечетные изотопы кадмий-111 и -113 имеют $I = 1/2$ и одинаковые СТС, что, по-видимому, указывает на равенство магнитных моментов [18]. Этот спектр такого же типа, что и у Hg I и Tl II; далее нам придется подробнее остановиться на нем при обсуждении Tl II, для которого, кроме того, имеется больше данных по СТС. Здесь достаточно указать, что наблюдаемые расщепления

Терм	$\Delta\nu$, *см*$^{-1}$	Терм	$\Delta\nu$, *см*$^{-1}$
$5s\,6s\ {}^3S_1$	—0,395	$5s\,5p\ {}^3P_2$	—0,300
$5s\,7s\ {}^3S_1$	—0,375	$5s\,5p\ {}^3P_1$	—0,223
$5s\,8s\ {}^3S_1$	—0,365		

по большей части обусловлены влиянием непарного электрона $5s$. Заметим, что все они соответствуют обращенному порядку термов. Как можно рассчитать, индивидуальная константа связи $5s$-электрона должна равняться примерно 0,4 *см*$^{-1}$, откуда получается $\mu_0/\mu = -3500$. Однако это значение довольно неточно вследствие неопределенности эффективного квантового числа орбиты $5s$.

In. $Z = 49$. Согласно Джексону [19], изотоп индий-115 имеет $I = 9/2$. СТС измерена для термов:

$$6^2S_{1/2} \quad \Delta\nu = 0{,}28\ см^{-1} \qquad 5^2P_{1/2} \quad \Delta\nu = 0{,}38\ см^{-1}.$$

Из первого значения получается $\mu_0/\mu = 370$, из второго — при учете нескольких релятивистских поправок — $\mu_0/\mu = 310$. В качестве вероятного значения принимаем $\mu_0/\mu = 350$.

Cs. $Z = 55$. Изотоп цезий-133. Согласно наблюдениям Копфермана [20] на CsII, $I = 7/2$. В спектре CsI известна только СТС основного терма

$$6^2S_{1/2} \quad \Delta\nu = 0{,}315\ см^{-1};$$

здесь справедливы те же соображения, что и в случае других щелочных металлов, и поэтому $\mu_0/\mu = 700$.

Ba. $Z = 56$. Изотопы барий-136, -138 имеют $I = 0$; у бария-137 $I = 5/2$; измерена СТС основного состояния Ba II[21]. Величина расщепления терма $6^2S_{1/2}$, полученная по резонансным линиям, составляет 0,272 *см*$^{-1}$, откуда следует, что $\mu_0/\mu = 1750$. Структура терма 6^2P измерена очень неточно, так как нельзя было добиться полного разрешения. Она дает значения, совместимые с предыдущими.

Au. $Z = 79$. Изотоп золото-197 имеет $I = 3/2$ (?) [22]. Определяемое по резонансным линиям расщепление основного состояния $6^2S_{1/2}$ равно

0,221—0,224. Отсюда следует, что $\frac{2I}{2I+1}\frac{\mu_0}{\mu} = 760$, и если $I = 3/2$, то $\mu_0/\mu = 1010$.

Hg. $Z = 80$. Четные изотопы ртуть-198, -200, -202, -204 имеют $I = 0$; изотопы ртуть-199 и ртуть-201 имеют соответственно [23] $I = 1/2$ и 3/2. СТС последнего изотопа обращена, т. е. для него μ_0/μ отрицательно. Точно так же, как и в случае Cd, для спектра Hg I справедливы соображения, которые будут приведены при обсуждении Tl II. Для Hg I (для ртути-199) наблюдаются следующие расщепления:

Терм	$\Delta\nu$, *см*$^{-1}$	Терм	$\Delta\nu$, *см*$^{-1}$
$6s\,7s\ ^3S_1$	1,070	$6s\,6p\ ^3P_2$	0,758
$6s\,8s\ ^3S_1$	1,045	$6s\,6d\ ^1D_2$	0,860
$6s\,9s\ ^3S_1$	1,030	$6s\,7d\ ^1D_2$	0,496
$6s\,6p\ ^1P_1$	—0,181	$6s\,6d\ ^3D_2$	—0,470
$6s\,6p\ ^3P_1$	0,727		

Все эти расщепления можно, в сущности, объяснить влиянием единственного электрона $6s$, который должен был бы обладать константой связи около 1,15 *см*$^{-1}$. Отсюда для Hg^{199} получается вероятное значение $\mu_0/\mu = 4000$; оно несколько неточно в силу причин, указанных при обсуждении Cd. Аналогичным образом, для ртути-201 получается $\mu_0/\mu = -3600$.

Tl. $Z = 81$. Изотопы таллий-203 и таллий-205 имеют $I = 1/2$, и, с точностью до изотопического сдвига, их СТС почти полностью совпадают. Известны спектры Tl I, Tl II, Tl III [24].

Начнем с последнего, имеющего структуру спектра щелочных металлов, т. е. заполненную оболочку $5d$ и валентный электрон. Мы вычислили для этого спектра μ_0/μ по различным термам и получили следующие результаты:

Терм	$\Delta\nu$, *см*$^{-1}$	μ_0/μ	Терм	$\Delta\nu$, *см*$^{-1}$	μ_0/μ
$7s\ ^2S_{1/2}$	1,37	1310	$6p\ ^2P_{1/2}$	1,21	1060
$8s\ ^2S_{1/2}$	0,606	1210	$7p\ ^2P_{1/2}$	0,375	1310

Для термов ^2P использовалась формула (11) с релятивистской поправкой Рака. Значение, которое можно получить из терма $7p\ ^2P_{3/2}$, не согласуется с предыдущими, что объясняется возмущением этого терма термом $5d^9 6s 6p\ ^2P_{3/2}$, который близок по энергии и обладает большой константой СТС. Аналогично, мы не пользуемся значениями, полученными из термов ^2F, так как они явно являются возмущенными (это видно из того, что у них тонкая структура обращена).

У Tl II имеются конфигурации $6sms$, $6smp$, $6smd$ и т. д., расщепление которых обусловлено главным образом электроном $6s$. Это подтверждает-

ся сравнением экспериментальных данных с теорией, которую развили Гаудсмит и Бечер [25] для СТС с конфигурациями, содержащими один непарный s-электрон.

В этом случае справедлива формула

$$A = a(s)\,\frac{[{}^3/_4 + S(S+1) - S'(S'+1)]\,[S(S+1) + J(J+1) - L(L+1)]}{4S(S+1)\,J(J+1)}, \quad (21)$$

выражающая СТС любого терма со связью Рассела—Саундерса всего лишь через одну константу $a(s)$; $a(s)$ означает константу связи, которой обладал бы s-электрон, если бы он был изолированным. S' означает результирующий спин всех электронов, исключая электрон, которым обусловлена СТС, т. е. $S = S' \pm {}^1/_2$.

В спектре Tl II отношения СТС многочисленных термов приближенно совпадают со значениями, которые дает формула (21). Единственное исключение составляют термы с $L = J$. У них в каждой конфигурации имеется по одному синглету и триплету с одинаковыми J, которые, таким образом, взаимно возмущаются. Благодаря этому возникает связь, промежуточная между связью Рассела — Саундерса и JJ-связью. В случае связи Рассела—Саундерса синглетный терм, согласно формуле (21), вообще не должен обнаружить никакого расщепления СТС. Поэтому наблюдаемая СТС обусловлена, по существу, возмущением. Однако даже и в этом случае должно действовать следующее правило: алгебраическая сумма расщеплений двух возмущающих друг друга термов принимает значение, которое получилось бы по формуле (21) только для одного триплетного терма. Это правило удовлетворительно подтверждается на опыте. Термы с $L \neq J$ дают следующие значения $a(s)$:

Терм	A	$a(s)$	Терм	A	$a(s)$
$6s\,7s\ {}^3S_1$	3,32	6,64	$6s\,6d\ {}^3D_3$	0,95	5,70
$6s\,9s\ {}^3S_1$	3,02	6,04	$6s\,7d\ {}^3D_3$	0,97	5,82
$6s\,6p\ {}^3P_2$	1,29	5,16	$6s\,8d\ {}^3D_3$	0,98	5,88
$6s\,7p\ {}^3P_2$	1,39	5,56	$6s\,5f\ {}^3F_2$	—0,99	5,94
$6s\,6d\ {}^3D_1$	—1,41	5,64	$6s\,6f\ {}^3F_2$	—1,03	6,18
$6s\,7d\ {}^3D_1$	—1,47	5,88	$6s\,5f\ {}^3F_4$	0,74	5,92
$6s\,8d\ {}^3D_1$	—1,50	6,00	$6s\,6f\ {}^3F_4$	0,74	5,92

Как видно из этой таблицы, для невозмущенных термов $a(s)$ почти постоянна, что подтверждает наше предположение, согласно которому СТС обусловлена преимущественно электроном $6s$. При этом видно также, что константа связи возрастает тем больше, чем дальше переходит самый удаленный электрон на более высокие орбиты. Это объясняется тем, что

экранирующее действие оптического электрона на траекторию $6s$ становится тем меньше, чем дальше наружу он отходит; электрон $6s$ будет сильнее притягиваться ядром, и значение $\psi^2(0)$ возрастет. Напротив, термы $6s7s\,^3S_1$ и $6s9s\,^3S_1$ ведут себя противоположно, но это происходит потому, что $7s$-электрон сам дает вклад в СТС, увеличивая ее на 20%, тогда как $9s$-электрон дает всего 4%, как показывает расчет по формуле (9).

Вообще говоря, все табличные значения $a(s)$ больше истинной константы связи, которой обладал бы $6s$-электрон, двигаясь в поле, отвечающем конфигурации $6s^2$. Эту константу нельзя получить прямо из приведенных выше данных; но экстраполяцией можно найти, что константы $a(s)$ должны иметь величину около 5 *см*$^{-1}$. Отсюда с помощью формулы (9) можно было бы вычислить μ_0/μ, если бы было известно $n_{эфф}$ для рассматриваемого состояния. Но для этого нужно прибегать к экстраполяции, поскольку в триплетной системе нет терма $6s$. Таким путем найдем $n_{эфф} = 1{,}56$. Тогда из формулы (9) следует

$$\mu_0/\mu = 1400,$$

что хорошо согласуется со значениями, вычисленными по Tl III.

В спектре Tl I измерено несколько термов, в том числе основной терм $6s^26p\;^2P_{1/2}$, а также термы $6s^26p\;^2P_{3/2}$ и $6s7s\;^2S_{1/2}$. С помощью обычных формул по терму $7^2S_{1/2}$ можно вычислить μ_0/μ и получить значение 1380; для терма $6^2P_{1/2}$ получается значение 950, но это без учета поправки Брейта, величина и знак которой таковы, что вновь получается согласие. Напротив, терм $6^2P_{3/2}$ сильно возмущен, как было показано ранее, и потому непригоден для вычисления μ_0/μ.

Из всей этой совокупности удовлетворительно согласующихся между собой данных для Tl в качестве вероятного значения можно принять

$$\mu_0/\mu = 1300.$$

Pb. $Z = 82$. Четные изотопы свинец-204, -206, -208 имеют $I = 0$; у свинца-207 $I = 1/2$. Измерена СТС спектров Pb I, Pb II, Pb III[26]. Относительно последнего известна только СТС терма $6s7s\;^3S_1$, составляющая 2,25 *см*$^{-1}$. Как и у аналогичного терма Tl II, она обусловлена главным образом электроном $6s$, а электрон $7s$ дает вклад еще около 20%. Вычисленное из этих данных отношение μ_0/μ составляет около 3500.

В Pb II исследованы различные термы с конфигурациями $6s^2mp$, $6s^2ms$, $6s^2ds$ и $6s6p^2$. В большинстве своем они возмущены термом с конфигурацией $6s6p7s$, СТС которого очень велика благодаря $6s$-электрону и вследствие этого оказывает заметное влияние даже на сравнительно далекие термы, как и в случае Tl I. Точный расчет подобных эффектов практически невозможен, так что СТС этих термов непригодна для вычисления ядерных магнитных моментов.

Столь же мало пригоден для количественных расчетов и спектр Pb I. Мы примем в качестве вероятного значения $\mu_0/\mu = 3500$, которое, однако, несколько неточно.

Bi. $Z = 83$. Изотоп висмут-209, $I = 9/2$. У этого элемента известны спектры Bi I, Bi II, Bi III, Bi IV и Bi V [27]. Последний является аналогом спектра щелочных металлов, и для него известно расщепление основного терма, составляющее 13 *см*$^{-1}$. Если, следуя Макленнану, положить $n_{эфф} = 2{,}35$, то получается $\mu_0/\mu = 510$.

Несмотря на то, что СТС Bi относится к наиболее изученным, она непригодна для точного определения ядерного магнитного момента, ибо в спектрах Bi I и Bi II слишком сильно перемешиваются между собой электронные конфигурации. Спектр Bi III также не годится для количественных выводов, поскольку конфигурация $6s^2 7s$ заведомо возмущена близкой по энергии конфигурацией $6s6p^2$, а также потому, что данные, которые можно извлечь из конфигурации $6s6p^2$ относительно связи $6s$-электрона, не очень точны, так как отсутствуют надежные сведения об осуществляющейся здесь связи, промежуточной между схемами Рассела—Саундерса и JJ. Все же значения констант связи для электронов $6s$ и $7s$ как будто бы согласуются по порядку величины с приведенным выше значением μ_0/μ. В случае Bi IV наших значений тонкой структуры недостаточно для надежных выводов.

В табл. 1 собраны значения отношений μ_0/μ для различных термов. Там, где значение I надежно не известно, мы приводим также величину $\frac{2I}{2I+1}\frac{\mu_0}{\mu}$, которую можно вычислить независимо от I. В графе «вес» дано

Таблица 1

Элементы	Z	M	I	μ_0/μ	Вес	Примечания
Li	3	7	3/2	575	—	По Брейту [11]
Na	11	23	3/2?	880?	1	$\frac{2I}{2I+1}\frac{\mu_0}{\mu} = 660$
Cu	29	63, 65	3/2	780	3	
Ga	31	69	3/2	860	1	
Ga	31	71	3/2	670	1	
Rb	37	85	5/2	1350	1	
Rb	37	87	5/2?	590?	1	$\frac{2I}{2I+1}\frac{\mu_0}{\mu} = 490$
Cd	48	111, 113	1/2	—3500	5	
In	49	115	9/2	350	2	
Cs	55	133	7/2	700	1	
Ba	56	137	5/2	1750	1	
Au	79	197	3/2?	1010?	1	$\frac{2I}{2I+1}\frac{\mu_0}{\mu} = 760$
Hg	80	199	1/2	4000	7	
Hg	80	201	3/2	—3600	7	
Tl	81	203, 205	1/2	1300	20	
Pb	82	207	1/2	3500	1	
Bi	83	209	9/2	510	1	

число термов, по которому можно вычислить удовлетворительно согласующиеся между собой значения μ_0/μ.

Из табл. 1 можно было бы попытаться извлечь некоторые выводы относительно строения ядер. Однако нам представляется, что невысокая точность данных и многочисленные пробелы не позволяют в этом смысле прийти к какому-либо окончательному результату. Однако очевидным является то, что в этой таблице ядра с четным атомным номером и нечетным атомным весом, которые по теории Гейзенберга содержат четное число протонов и нечетное число нейтронов, определенно обладают меньшим ядерным магнитным моментом, чем ядра с нечетным числом протонов и четным числом нейтронов. Но и это правило не представляется абсолютным, поскольку K^{39} (он вообще не включен в табл. 1) почти наверняка составляет исключение. Чередование интенсивности в полосатых спектрах [33] этого элемента таково, что I должно быть отлично от нуля, но все попытки наблюдения СТС, которая должна существовать в этом случае, были безуспешны.

Приложение I

ВЫВОД ФОРМУЛЫ (7)

Нахождение $\psi_{эфф}(0)$ сводится, по существу, к вычислению интеграла

$$\int_0^\infty FG\,dr. \tag{22}$$

Интегрируя дифференциальные уравнения для функций F и G, можно найти, что F и G вблизи начала координат, с точностью до нормировочного множителя, ведут себя как $r^{-\beta}$ и $\frac{Z\alpha}{2-\beta}r^{-\beta}$ соответственно, где

$$\beta = 1 - \sqrt{1-\alpha^2Z^2} \quad \text{и} \quad \alpha = 2\pi e^2/hc.$$

Примем, что ненормированные собственные функции, которые буде обозначать через Φ и Γ, в начале координат совпадают с вышеупомянуты ми значениями. Функции F и G связаны с Φ и Γ соотношениями

$$F = \rho\Phi, \ G = \rho\Gamma, \tag{23}$$

где ρ выбирается таким образом, чтобы

$$\rho^2\int_0^\infty (\Phi^2 + \Gamma^2)\,d\tau = 1. \tag{24}$$

Для вычисления интегарла (22) поэтому следует знать нормировочный множитель ρ. С этой целью заметим, что на большом расстоянии от

ядра функция G тождественно совпадает со шредингеровской собственной функцией, поскольку релятивистские поправки становятся пренебрежимо малыми. Если положить $u = \psi r$, где ψ — шредингеровская собственная функция, то для u получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - eV)\,u = 0, \tag{25}$$

которое можно решить методом Вентцеля—Бриллюэна, положив

$$u = kR\sin\vartheta. \tag{26}$$

Здесь k — нормировочный множитель, который определяется таким образом, чтобы рассчитываемая методом Вентцеля—Бриллюэна функция u совпадала с функцией Г, рассчитанной из разложения в ряд; R и $d\vartheta/dr$ — функции r, удовлетворяющие условию

$$R^2\frac{d\vartheta}{dr} = 1. \tag{27}$$

Они вычисляются методом последовательных приближений Вентцеля—Бриллюэна, который дает довольно медленную сходимость; однако, ограничиваясь подходящим числом приближений (четырьмя в нашем случае), удается получить точность определения R и $d\vartheta/dr$, достаточную для данного расчета.

Рассмотрим, как влияет на собственные значения уравнения (25) возмущение потенциала V, состоящее в добавлении возмущающего члена $\lambda\delta\,(r - \xi)$, где δ — обычная несобственная функция, принимающая значение, отличное от нуля только для нулевых значений аргумента, а через ξ обозначено некоторое достаточно большое расстояние от ядра, на котором влиянием релятивистских поправок уже можно пренебречь. Энергию возмущения ΔE можно вычислить двумя способами:

а) используя обычный метод теории возмущений;

б) замечая, что разрыв потенциала приводит к скачку $\Delta\vartheta$ фазы в выражении (26) и поэтому смещает положение узлов функции u, связанных с квантовым числом n.

Приравнивая результаты, полученные этими двумя способами, без труда получаем

$$\Delta E = 4\pi\lambda\rho^2 u^2(\xi) = -\frac{\Delta\vartheta}{\pi}\frac{dE}{dn}. \tag{28}$$

Чтобы эта формула была применима, энергия E, естественно, должна быть такой регулярной функцией n, чтобы определение dE/dn имело смысл.

Из уравнения (28) можно получить значение ρ, если известно $\Delta\vartheta$; вычислим его. Если обозначить через Δu и $\Delta u'$ скачки функции u и ее производной, вызванные возмущением, то из уравнения (25) получим

$$\Delta u = 0, \qquad \Delta u' = \frac{8\pi^2 m}{h^2}\lambda u\,(\xi). \tag{29}$$

Отсюда, учитывая выражения (26) и (27), находим

$$\Delta\vartheta = -\frac{8\pi^2 m\lambda}{h^2}\frac{\sin^2\vartheta}{\frac{d\vartheta}{dr}}; \tag{30}$$

подставляя это значение $\Delta\vartheta$ в соотношение (28), получаем

$$\rho^2 = \frac{2m}{h^2k^2}\frac{dE}{dn}. \tag{31}$$

Коэффициент k, входящий в эту формулу, был получен с помощью расширенной таблицы значений собственных функций ∞s, которые во внутренней области атома довольно близки к оптическим. В таблицах содержатся значения коэффициента k, рассчитанные из условия совпадения собственных функций, полученных релятивистским разложением в ряд, и функций, вычисляемых методом Вентцеля—Бриллюэна в точке $x = 0{,}3$ (x — расстояние от ядра, измеренное в единицах длины μ статистического метода). Такое вычисление выполнялось для пятнадцати элементов, соответствующим образом распределенных по периодической системе [29].

Получив значение ρ, интеграл (22) можно вычислить с помощью ранее упоминавшихся разложений в ряд функций Φ и Γ.

Мы выполнили этот расчет для трех значений Z и получили поправочные множители:

$$3{,}30 \text{ при } Z = 92,$$
$$1{,}93 \text{ при } Z = 74,$$
$$1{,}18 \text{ при } Z = 42,$$

для формулы

$$\psi^2(0) = \frac{1}{\pi a^3}\frac{Z}{2Rh}\frac{dE}{dn},$$

которая в случае ридберговских термов сводится к формуле (6) Гаудсмита — Ланде.

Указанные поправочные множители можно интерполировать и получить ту же точность, что и при расчетах по эмпирической формуле

$$\frac{1}{\left[1-\left(\frac{Z}{139}\right)^2\right]^2}. \tag{32}$$

Эта поправка имеет релятивистскую природу и в случае нерелятивистских расчетов исчезла бы совсем. Она практически совпадает с поправкой Рака и Брейта [4]. Наша эмпирическая формула имеет то преимущество перед формулой упомянутых авторов, что она позволяет быстрее выполнить расчет.

Итак, в результате получаем искомую формулу (7)

$$\psi^2_{\text{эфф}}(0) = \frac{1}{\pi a^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{Z^2}{139^2}\right)^2} \frac{Z}{2Rh} \frac{dE}{dn}.$$

Мы признательны доктору Э. Майорана за обсуждение расчетов, выполненных в приложении I.

Приложение II

АНОМАЛИЯ ТЕРМА $6\,^2P_{3/2}$ В СПЕКТРЕ Tl I

Цель нижеследующих расчетов состоит в том, чтобы показать, что возмущение расщепления СТС терма $6\,^2P_{3/2}$ в спектре Tl I достаточно для объяснения наблюдаемых аномалий. Эти вычисления не претендуют на получение количественного результата, а посвящены только оценке порядка величины возмущения. В этом свете мы ограничимся рассмотрением только двух конфигураций: конфигурации $6s^26p$, к которой принадлежит рассматриваемый терм, и конфигурации $6s7s6p$, которая порождает возмущение; естественно, учет других конфигураций может заметно изменить результаты.

Прежде всего заметим, что электростатическое возмущение может происходить только между состояниями с одинаковым значением квантового числа M. Поэтому мы можем выполнить вычисления для наиболее «удобного» значения M; результат будет тем же самым, что и при любом другом значении M.

Обозначим индивидуальные собственные функции отдельных элементов через

$$\left.\begin{matrix} sa & \sigma a & p_1 a & p_0 a & p_{-1} a \\ sb & \sigma b & p_1 b & p_0 b & p_{-1} b, \end{matrix}\right\} \tag{33}$$

где a и b — собственные спиновые функции для $m_s = 1/2, -1/2$; s и σ — собственные функции координат $6s$- и $7s$-электрона; p_1, p_0, p_{-1} — собственные функции координат p-электронов с $m_l = +1, 0, -1$.

Если положить $M = 3/2$, конфигурация $6s^26p$ дает только одну собственную функцию вида

$$\{sa \;\; sb \;\; p_1 a\} = \psi_0, \tag{34}$$

где фигурные скобки означают, что произведение должно быть антисимметризовано. Функция ψ_0 является невозмущенной собственной функцией терма $6\,^2P_{3/2}$.

Конфигурация $6s7s6p$ дает четыре собственных функции с $M = 3/2$, а именно:

$$\begin{aligned} &\{sb \quad \sigma a \quad p_1 a\} = \psi_1, \qquad \{sa \quad \sigma b \quad p_1 a\} = \psi_2, \\ &\{sa \quad \sigma a \quad p_1 b\} = \psi_3, \qquad \{sa \quad \sigma a \quad p_0 a\} = \psi_4. \end{aligned} \tag{35}$$

Невозмущенную собственную функцию, в первом приближении, можно записать в следующем виде:

$$\Psi_0 = \psi_0 + \frac{1}{\Delta E}(V_{01}\psi_1 + V_{02}\psi_2 + V_{03}\psi_3 + V_{04}\psi_4), \tag{36}$$

где ΔE — разность энергий конфигураций $6s^2 6p$ и $6s7s6p$; поэтому она совпадает с (отрицательной) разностью энергий орбит $6s$ и $7s$. Оценка значения ΔE дает 7 *эв*. Величины V_{0i} — матричные элементы электростатической энергии, связывающие состояние 0 с состоянием i.

Положив

$$\left.\begin{aligned} G &= \left(s\sigma \left| \frac{e^2}{r} \right| ss\right) = \int \frac{e}{r_{12}} \sigma^2(1)\,\sigma(2)\,s(2)\,d\tau_1\,d\tau_2, \\ H &= \left(sp_1 \left| \frac{e^2}{r} \right| \sigma p_1\right) = \int \frac{e}{r_{12}} s(1)\,\sigma(1)\,|p_1(2)|^2\,d\tau_1\,d\tau_2, \\ K &= \left(sp_1 \left| \frac{e^2}{r} \right| p_1\sigma\right) = \int \frac{e}{r_{12}} s(1)\,p_1(2)\,p_1(1)\,\sigma(2)\,d\tau_1\,d\tau_2, \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

найдем

$$V_{01} = -G - H + K, \quad V_{02} = G + H, \quad V_{03} = -K, \quad V_{04} = 0.$$

Численная оценка электростатических интегралов статистическим методом дает

$$G = -0{,}84\ \text{эв}, \quad H = -0{,}43\ \text{эв}, \quad K = 0{,}24\ \text{эв},$$

откуда

$$V_{01} = 1{,}51\ \text{эв}, \quad V_{02} = -1{,}27\ \text{эв}, \quad V_{03} = -0{,}24\ \text{эв}, \quad V_{04} = 0.$$

Эти значения не очень точны, так как статистический метод не дает хороших результатов при вычислении электростатических интегралов; однако они дают некоторые указания относительно порядка величины и качественного поведения возмущения.

Нормированная собственная функция первого приближения (36) оказывается равной

$$\Psi_0 = 0{,}96\psi_0 - 0{,}22\psi_1 + 0{,}18\psi_2 + 0{,}03\psi_3. \tag{38}$$

Далее, исходя из этой собственной функции, следует рассчитать среднее значение магнитного поля в месте нахождения ядра или, что предпочтительнее, среднее значение $H_z\mu/I$, которое, согласно выражению (2), определяет СТС. С этой целью приступим к оценке ее матричных элементов

для индивидуальных собственных функций. Используя выражение (1) и экспериментальные данные, согласно которым константа СТС для $7s$-электронов равна 0,404 $см^{-1}$, можно найти, что константа СТС для $6s$-электрона составляет около 3,23 $см^{-1}$. При этом мы учитывали, что константа СТС обратно пропорциональна кубу эффективных квантовых чисел. Из экспериментального значения для электрона $6p_{1/2}$ можно получить, что невозмущенный электрон $6p_{3/2}$ должен иметь константу СТС, равную 0,035 $см^{-1}$. Из этих данных следует, что

$$\left.\begin{aligned} \left(\sigma a \left| H_z \frac{\mu}{I} \right| \sigma a\right) &= 0{,}20 \text{ см}^{-1}, \\ \left(sa \left| H_z \frac{\mu}{I} \right| sa\right) &= 1{,}62 \text{ см}^{-1}, \\ \left(p_1 a \left| H_z \frac{\mu}{I} \right| p_1 a\right) &= 0{,}052 \text{ см}^{-1}. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Для вычисления недиагональных элементов $\left(sa \left| H_z \frac{\mu}{I} \right| \sigma a\right)$ заметим, что в релятивистском приближении диагональные элементы пропорциональны $s^2(0)$ и $\sigma^2(0)$; недиагональный же элемент, как легко убедиться, пропорционален $s(0)\,\sigma(0)$, и в этом приближении равен среднему геометрическому значению диагональных элементов. Поскольку для вычисления электростатических интегралов собственные функции s и σ выбирались с противоположными знаками, среднее геометрическое будет обладать отрицательным знаком. Итак, получим

$$\left(sa \left| H_z \frac{\mu}{I} \right| \sigma a\right) = -0{,}57 \text{ см}^{-1}.$$

Из выписанных выражений следует, что

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mu}{I} H_z\right) sa &= 1{,}62 sa - 0{,}57 \sigma a + \ldots, \\ \left(\frac{\mu}{I} H_z\right) sb &= -1{,}62 sb + 0{,}57 \sigma b + \ldots, \\ \left(\frac{\mu}{I} H_z\right) \sigma a &= 0{,}20 \sigma a - 0{,}57 sa + \ldots, \\ \left(\frac{\mu}{I} H_z\right) \sigma b &= -0{,}20 \sigma b + 0{,}57 sb + \ldots, \\ \left(\frac{\mu}{I} H_z\right) p_1 a &= 0{,}052 p_1 a + \ldots. \end{aligned}$$

Многоточиями обозначены последующие члены, несущественные для вычислений, поскольку они не комбинируют с термами, которыми мы ограничили наше рассмотрение.

Перейдем теперь от индивидуальных собственных функций к функциям ψ_0, ψ_1, ψ_2, ψ_3. Учитывая их выражения (35) и вспоминая, что они представляют антисимметризованные произведения, получаем:

$$\left(\frac{\mu}{I} H_z\right) \psi_0 = 0{,}052\psi_0 + 0{,}57\psi_1 + 0{,}57\psi_2,$$

$$\left(\frac{\mu}{I} H_z\right) \psi_1 = 0{,}57\psi_0 \quad - 1{,}37\psi_1,$$

$$\left(\frac{\mu}{I} H_z\right) \psi_2 = 0{,}57\psi_0 \qquad\qquad + 1{,}47\psi_2,$$

$$\left(\frac{\mu}{I} H_z\right) \psi_3 = \qquad\qquad\qquad\qquad + 1{,}83\psi_3.$$

Последний коэффициент неточен, потому что не учитывался член $\left(p_1 b \left| \frac{\mu}{I} H_z \right| p_1 b\right)$; однако сразу видно, что это приводит к незначительному смещению результатов, поскольку функция ψ_3 входит в возмущенную собственную функцию (38) с весовым коэффициентом около 1%.

Вычисления величины $\left(\Psi_0 \left| \frac{\mu}{I} H_z \right| \Psi_0\right)$ из этих данных не представляют трудности. Получаем

$$\left(\frac{\mu}{I} H_z\right) = 0{,}027\psi_0 + 0{,}85\psi_1 + 0{,}81\psi_2 + 0{,}05\psi_3$$

и

$$\left(\Psi_0 \left| \frac{\mu}{I} H_z \right| \Psi_0\right) = -0{,}013.$$

Это, согласно формуле (2), соответствовало бы $\Delta\nu = -0{,}017$ *см*$^{-1}$, т. е. возмущению 0,087 *см*$^{-1}$, так как для невозмущенного расщепления $\Delta\nu$ мы приняли значение 0,070 *см*$^{-1}$. Для того чтобы получить экспериментально наблюдающееся $\Delta\nu$, поправка должна была бы составлять 0,062 *см*$^{-1}$ в том же направлении.

Итак, видно, что возмущение по порядку величины равно расхождению между элементарной теорией и опытом. По не раз упоминавшимся причинам количественный расчет выходит за пределы сегодняшних возможностей, но даже приведенные выше простые оценки не позволяют более сомневаться в том, что СТС можно приписать влиянию магнитного момента ядра (если не говорить о более слабых эффектах, о которых уже упоминалось выше [30]). На сегодняшнем уровне знаний все это наводит на мысль, что обоснование различных аномалий надо искать во влиянии атомных возмущений и что надо быть осторожным при приписании наблюдаемых расхождений ядерным эффектам.

Примечание при корректуре. Пока данная работа находилась в печати, появилась работа Гаудсмита (S. Goudsmit. Phys. Rev., 1933, **43**, 636), результаты которой частично перекрываются с нашими. Приведенная им таблица магнитных моментов ядер также, по существу, совпадает с нашей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Превосходный обзор современного состояния проблемы сверхтонкой структуры можно найти в статье: *H. Kallman*, *H. Schüler*. Ergebn. d. exakt. Naturwissensch., 1932, **11**, 134.
2. *S. Goudsmit*, *E. Back*. Zs. f. Phys., 1927, **43**, 321; *P. Zeeman*, *E. Back*, *S. Goudsmit*. Ibid., 1930, **66**, 1.
3. *E. Fermi*. Zs. f. Phys., 1930, **60**, 320 (статья 42); *J. Hargreaves*. Proc. Roy. Soc. London, 1930, **A 127**, 141, 407; *H. Casimir*. Не опубликовано.
4. *G. Racah*. Zs. f. Phys. 1931, **71**, 431; *G. Breit*. Phys. Rev., 1931, **38**, 463.
5. *S. Goudsmit*. Phys. Rev., 1931, **37**, 663; *S. Goudsmit*, *R. Bacher*. Ibid., 1929, **34**, 1500.
6. См., например, *S. Goudsmit*. Rendiconti del Convegno di fisica nucleare, Fondazione Volta, Roma, 1931.
7. *C. G. Darwin*. Proc. Roy. Soc., London, 1928, **A**, **118**, 654.
8. *L. Pauling*, *S. Goudsmit*. Structure of line spectra; см. также *J. C. McLennan*, *A. B. McLay*, *M. F. Crawford*. Proc. Roy. Soc. London 1931, A, **133**, 652.
9. *G. Breit*. Phys. Rev., 1931, **37**, 51.
10. *S. Goudmsit*. Phys. Rev., 1929, **34**, 1500; *G. Racah*, Zs. f. Phys., 1931, **71**, 431.
11. *G. Breit*. Phys. Rev., 1930, **36**, 1732.
12. *P. Güttinger*. Zs. f. Phys., 1930, **64**, 749, *P. Güttinger*, *W. Pauli*. Ibid. 1931, **67**, 743.
13. *H. Schüler*. Naturwissen., 1928, **16**, 512; *H. Schüler*, *H. Brück*. Zs. f. Phys., 1929, 58, 735.
14. *R. Ritschl*. Zs. f. Phys., 1932, **79**, 1.
15. *D. A. Jackson*. Zs. f. Phys., 1932, **75**, 229 (Ga I).
16. *J. S. Campbell*. Nature, 1933, **131**, 204 (Ga II).
17. *H. Kopfermann*. Naturwiss., 1933, **21**, 24.
18. *H. Schüler*, *J. E. Keyston*. Zs. f. Phys., 1931, **71**, 413.
19. *D. A. Jackson*. Zs. f. Phys., 1933, **80**, 59.
20. *H. Kopfermann*. Zs. f. Phys., 1931, **73**, 437.
21. *P. Gerald Kruger*, *R. C. Gibbs*, *R. C. Williams*. Phys. Rev., 1932, **41**, 322.
22. *R. Ritschl*. Naturwiss., 1931, **19**, 690.
23. *H. Schüler*, *J. E. Keyston*. Zs. f. Phys., 1931, **72**, 423.
24. *H. Schüler*, *J. E. Keyston*, Zs. f. Phys., 1931, **70**, 1 (Tl I, Tl II); *J. C. McLennan*, *M. F. Crawford*. Proc. Roy. Soc. London, 1931, **A 132**, 10 (Tl II); *J. C. McLennan*, *E. A. Allin*. Ibid., 1930, **129**, 43 (Tl III).
25. *S. Goudsmit*, *R. Bacher*. Phys. Rev., 1929, **34**, 1500.
26. *H. Kopfermann*. Zs. f. Phys., 1932, **75**, 363; *H. Schüler*, *E. J. Jones*. Ibid. 1932, **75**, 563 (Pb I, Pb II); см. также: *J. L. Rose*, *L. P. Granath*, Phys. Rev., 1932, **40**, 760; *J. C. McLennan*, *M. F. Crawford*, *L. B. Leppard*. Nature, 1931, **128**, 301 (Pb III).
27. *E. Back*, *S. Goudsmit*. Zs. f. Phys., 1928, **47**, 174; *P. Zeeman*, *E. Back*, *S. Goudsmit*. Zs. f. Phys., 1930, 66, 1 (Bi I); *R. Fisher*, *S. Goudsmit*. Phys. Rev., 1931, **37**, 1057, 1674 (Bi II, Bi III); *G. Arvidsson*. Ann. d. Phys., 1932, **12**, 787 (Bi IV, Bi V).
28. *F. W. Loomis*, *R. W. Wood*. Phys. Rev., 1931, **38**, 854.
29. Ср. работу: *E. Amaldi*, *E. Fermi* (в печати) [статья 59].
30. Такими эффектами могли бы быть, например, аномалии в спектре Hg, обнаруженные Казимиром (*H. Casimir*, Zs. f. Phys., 1932, **77**, 811).

К статье 55

Опыты Грея и Таранта, в свое время вызвавшие большой резонанс и, в частности, инициировавшие эту работу, оказались неверными; однако статья 55 не потеряла ценности и до сих пор.

Б. Понтекорво

55

О РЕКОМБИНАЦИИ ЭЛЕКТРОНОВ И ПОЗИТРОНОВ *

(Совместно с Дж. Уленбеком)

Открытие позитрона дает возможность физической интерпретации отрицательных энергетических уровней в дираковской релятивистской теории электрона. В частности, наблюдавшееся Андерсоном образование позитрон-электронной пары под действием жесткого γ-излучения, Оппенгеймер и Плессет [1] объяснили как своего рода фотоэлектрический эффект, при котором энергия поглощенного γ-кванта поднимает электрон из отрицательного энергетического состояния в положительное, образуя дырку (позитрон) и электрон. Блэккет и Оккиалини [2] предположили, что обратный процесс — рекомбинация позитрона и электрона с испусканием γ-излучения — является возможным объяснением наблюдавшегося Греем и Таррантом [3] излучения при рассеянии жестких γ-лучей. Согласно этим авторам, рассеянное излучение содержит две довольно монохроматичные компоненты с энергиями около 0,5 и $1 \cdot 10^6$ *эв*, т. е. очень близкими к mc^2 и $2mc^2$. Интенсивность жесткой компоненты меньше, чем мягкой, и несколько увеличивается с атомным номером Z; для свинца она составляет $^1/_3$ полного излучения. Энергия рекомбинации электрона и позитрона, когда кинетическая энергия обоих пренебрежимо мала, есть сумма масс покоя или $2mc^2 \cong 10^6$ *эв*. Когда обе частицы свободны, эта энергия, в силу сохранения энергии и импульса, может быть излучена только в виде двух квантов одинаковой энергии ($=0,5 \cdot 10^6$ *эв*). Таким образом, этот тип излучения мог бы объяснить мягкую компоненту. В случае жесткой компоненты энергия должна излучаться одним квантом, что возможно только для сильно связанного электрона, когда ядро может воспринять импульс отдачи этого кванта.

---

* *On the Recombination of Electrons and Positrons.* (With G. E. Uhlenbeck). Phys. Rev., 1933, 44, 510—511.

[1] Oppenheimer, Plesset. Phys. Rev., 1933, **44**, 53; см. также Beck. Zs. f. Phys., 1933, **83**, 498.

[2] Blackett, Occhialini. Proc. Roy. Soc., 1933, **A139**, 699.

[3] Gray, Tarrant. Proc. Roy. Soc., 1932, **A136**, 662.

В соответствии с таким объяснением механизм рассеяния должен быть следующим. Сначала первичный γ-квант поглощается, образуя пару. Образующийся при этом позитрон, обладающий высокой скоростью, теряет энергию за счет столкновений; в конце пробега у него есть возможность «погибнуть» в одном из упомянутых выше процессов. Отношение интенсивностей компонент должно равняться отношению вероятностей этих процессов. Далее, несколькими авторами было показано, что скорость уничтожения позитронов малой скорости путем двухквантового процесса равна

$$R_2 = N\pi e^4/m^2c^3 = 7{,}5\cdot 10^{-15}N, \quad (1)$$

где N — плотность электронов. Отталкивание ядра препятствует проникновению позитрона во внутренние области атома. Поэтому не все электроны эффективны, так что N будет лежать между n и nZ, где n — число атомов в единице объема. Для свинца $n = 3{,}3\cdot 10^{22}$, что для нижнего предела дает $R_2 = 2{,}5\cdot 10^8$. Тогда для объяснения интенсивности жесткой компоненты скорость одноквантового процесса должна быть $\sim 10^8$.

Мы рассчитали сечение уничтожения позитрона в результате одноквантового процесса. Поскольку мы имеем дело с позитронами малой скорости, можно было бы ожидать, что нерелятивистское приближение [4] даст, по меньшей мере, правильный порядок величины. Пренебрегая экранированием атомных электронов, находим вклад K-оболочки атома в это сечение:

$$\sigma_K = (^4/_3)\,\pi^2\alpha^9a^2Z^6\,(1 + Z^2/W)\,\{\exp(2\pi Z/W^{1/2}) - 1\}^{-1}, \quad (2)$$

где α — постоянная тонкой структуры, a — боровский радиус, а W — энергия позитрона (в ридбергах). Вклад L-оболочки значительно меньше; находим

$$\sigma_L = (^1/_{24})\,\pi^2\alpha^9a^2Z^6\,(4 + 7Z^2/W)\,\{\exp(2\pi Z/W^{1/2}) - 1\}^{-1}. \quad (3)$$

По этим сечениям, умножая их на nv, находим скорость уничтожения. В случае позитронов малой скорости нельзя пренебрегать экранированием, поскольку экспоненциальный множитель, который является определяющим членом в формулах (2) и (3) (он связан с отталкиванием позитрона зарядом ядра) существенно уменьшается вследствие экранирования. Пользуясь статистической моделью, можно показать, что вместо $\exp(-2\pi Z/W^{1/2})$ получится

$$\exp\{-2{,}66Z^{1/3}\varphi(0{,}442\,W/Z^{4/3})\}, \quad (4)$$

где $\varphi(\xi)$ принимает следующие значения: $\varphi(0) = 4{,}18$; $\varphi(0{,}0018) = 3{,}13$;

[4] «Нерелятивистское» означает здесь, что используются нерелятивистские радиальные собственные функции и в разложениях сохраняются только члены наименьшей степени по $1/c$. Это соответствует первой формуле Оппенгеймера и Плессета, которую мы также смогли получить, с той только разницей, что наш результат больше в два раза.

φ (0,0158) = 2,63; φ (0,122) = 1,96; φ (0,425) = 1,48; φ (1,31) = 1,06 и $\varphi(\xi) = \pi/2\,(\xi + 1)^{-1/2}$ при еще бо́льших значениях ξ. Например, в свинце ($Z = 82$) получаем для $W = 1$; 100; 10 000 и 75 000 (= 10^6 *эв*) соответственно следующие скорости уничтожения позитрона: $R_1 = 2\cdot 10^{-5}$; 10; $5\cdot 10^7$; 10^9. Последнее значение приводится лишь для иллюстрации, поскольку скорость столь высока, что формула (2) более уже неприменима.

Первое значение показывает, что нельзя сохранить первоначальное объяснение, согласно которому жесткая компонента обусловлена позитронами, полностью потерявшими свою начальную скорость. Скорость уничтожения получается слишком малой (на 13 порядков величины). По-видимому, можно было бы ожидать еще существования очень жесткой компоненты, связанной с уничтожением позитронов в начале их пробега, так как в этом случае вероятность их уничтожения намного выше. Для оценки возьмем позитроны с энергией 10^6 *эв*, пробег которых в свинце составляет 0,06 *см*. Требуемое время составляет около $3\cdot 10^{-12}$ *сек*, так что даже если бы мы положили на все это время скорость уничтожения равной максимальному значению 10^9, то для полной вероятности уничтожения за счет одноквантового процесса получили бы величину 0,003. Конечно, это дало бы излучение с энергией около $2\cdot 10^6$ *эв*. Эта вероятность все-таки еще очень мала, но, вообще говоря, можно надеяться, что релятивистские поправки значительно увеличат этот результат.

Однако мы думаем, что это не очень правдоподобно, так как для получения результата, наблюдаемого на опыте, теоретическая оценка должна возрасти в 100 раз. Для весьма грубой оценки релятивистских поправок мы провели численный расчет сечения уничтожения позитронов с энергией 10^6 *эв* в свинце. Чтобы упростить вычисления, рассматривался лишь вклад, обусловленный переходами *s*-состояний позитрона в *s*-состояния электрона. В нерелятивистском приближении скорость уничтожения равна $0{,}4\cdot 10^9$. Релятивистский же расчет дал $2{,}3\cdot 10^7$. Конечно, это не обязательно означает, что релятивистский результат и в самом деле будет меньше того, что дает приближенная формула (2), поскольку нужно учесть еще многие другие переходы. Однако это заставляет сомневаться в том, действительно ли точный расчет приведет к значительному увеличению нерелятивистского результата.

Наконец, не следует, естественно, забывать о вероятности уничтожения позитрона в двухквантовом процессе до того, как он потеряет энергию. Это дало бы непрерывную полосу с энергией выше $0{,}5\cdot 10^6$ *эв*. Но для позитрона с энергией 10^6 *эв* в свинце верхний предел этой вероятности составляет только 5%, а действительная величина, вероятно, еще меньше.

В заключение заметим, что, как показывают наши результаты, в рамках теории Дирака наблюдавшуюся Греем и Таррантом жесткую компоненту трудно объяснить уничтожением позитронов.

Физический факультет, Мичиганский университет,
18 августа 1933 г.

К статье 56

В связи с этой статьей можно рассказать о деятельности Ферми в области экспериментальной ядерной физики в период с 1930 по 1934 г.— до открытия радиоактивности, вызываемой нейтронами.

Немногие знают, что Ферми не только намеревался изучить экспериментальные методы ядерной физики, но уделял этому занятию много времени уже за несколько лет до того, как открытие наведенной нейтронами радиоактивности прославило его имя.

Желание заняться ядерной физикой впервые проявилось у Ферми зимой 1930/1931 гг., хотя его теоретические работы того времени шли совершенно иным путем. Первой своей задачей он выбрал сооружение и запуск камеры Вильсона с помощью Э. Амальди.

В то время наиболее слабым звеном Физического факультета Римского университета были плохо оборудованные и недостаточно укомплектованные мастерские; в них можно было изготовить лишь самые простые приборы, да и то ценой непомерных затрат времени на «проталкивание» заказов. Это обстоятельство побудило Ферми прибегнуть к системе «сделай сам», столь характерной для него как в теоретической, так и в экспериментальной работе. Чтобы как можно реже обращаться за помощью в мастерские и построить камеру Вильсона собственными руками, пользуясь лишь простейшими инструментами, он сначала обошел несколько скобяных лавок и купил целый набор хозяйственных принадлежностей. По своему типу камера должна была быть с плавающим поршнем, причем уплотнение создавалось водой. Необходимые для этого цилиндр и поршень были составлены из двух алюминиевых стаканов, слегка различавшихся диаметром. Стандартный клапан для газа вращался через привод мотором и периодически соединял пространство под поршнем с вакуумным насосом, создавая циклы расширения с интервалами 15 секунд. Вскоре можно было наблюдать треки альфа-частиц, качество которых было, однако, плохим вследствие медленности расширения и трудностей с очисткой поля от старых треков. Фотографировать следы они не пытались. Весной 1931 г. Ферми оставил проект камеры Вильсона и вернулся к теоретической работе. Жаль, что из-за нехватки оборудования в мастерских ему не удалось добиться того успеха, которого заслуживало его искусство экспериментатора.

На исходе 1931 г. Разетти на год уехал в Берлин (Далем), чтобы заняться изучением методики ядерно-физического эксперимента под руководством проф. Лизе Мейтнер. Во время его пребывания там в печати появились статьи Боте и Беккера, Кюри и Жолио, Чэдвика; эти работы начались открытием таинственного излучения Po + Be у первых авторов и закончились идентификацией нейтрона Чэдвиком. Разетти научился готовить нейтронные источники и регистрировать нейтроны с помощью и камеры Вильсона, и счетчиков.

В конце 1932 г. Ферми и Разетти разработали общую программу ядерно-физических исследований в Риме. Чтобы свести к минимуму зависимость от механических мастерских, несколько спроектированных приборов было заказано одной частной мастерской в Риме. В результате довольно большая камера Вильсона, в сущности разработанная по типу той, которая использовалась в Далеме, начала прекрасно работать сразу же после ее сборки. Та же самая мастерская изготовила механические детали кристаллического спектрометра γ-лучей, который описывается в данной статье.

Подобное развитие работ стало возможным благодаря субсидии Национального совета по исследованиям, увеличившей исследовательский бюджет факультета до суммы 2000—3000 долларов в год; это было сказочное богатство, если принять во внимание, что в итальянских университетах бюджет физических факультетов в среднем составлял около одной десятой указанной суммы.

К концу 1933 г. оснащенность Физического факультета в Риме достигла уровня, достаточного для того,чтобы начать исследования сразу в нескольких направлениях. Разетти (Ricerca Scientifica, 1934, 5 (1), 3) выделил из раствора радия сильный источник RaD, а затем отделил от него полоний и, смешав последний с порошком бериллия, приготовил нейтронный источник, сравнимый с наиболее мощными источниками, которые в то время использовались для опытов. С помощью упоминавшейся выше камеры Вильсона легко наблюдались протоны отдачи и акты расщепления азота. Имелись также различные типы счетчиков.

В марте 1934 г., после того как Кюри и Жолио объявили об открытии радиоактивности, наведенной α-частицами, Ферми предложил Разетти попытаться наблюдать аналогичные эффекты на нейтронах. До конца месяца мы облучили несколько элементов нейтронами Po + Be-источника и с помощью тонкостенных счетчиков Гейгера — Мюллера проверили их на активность, но получили отрицательный результат, обусловленный, очевидно, недостатком интенсивности. После того, как впоследствии было обнаружено усиливающее действие водородсодержащих сред, наводимые источником Po + Be активности наблюдались без труда.

В начале апреля Разетти уехал из Рима, а Ферми продолжал опыты. У него возникла мысль, которая и привела к успеху, что для наблюдения наведенной активности не обязательно было пользоваться источником Po + Be; можно было воспользоваться гораздо более сильным источником Rn + Be, поскольку его β- и γ-излучения не являлись препятствием для наблюдения искомого, задержанного во времени, эффекта. Радоновые источники были известны Ферми уже с тех пор, когда их получали от проф. Трабакки для использования на спектрометре γ-лучей. Единственное, что нужно было сделать,— это приготовить такой же источник в стеклянном шарике, заполненном бериллиевым порошком. Эксперименты с подобными источниками почти сразу же дали положительный результат.

После этих вводных замечаний остается добавить несколько слов по поводу обсуждаемой статьи. Достигнутое разрешение было выше, чем при использовании кристаллов каменной соли. Однако было ясно, что в качестве инструмента для изучения спектров γ-лучей этот метод мало перспективен, так как для фотографирования линий требовались чрезвычайно сильные источники, даже при длительных экспозициях. Попытки использовать счетчики Гейгера — Мюллера в качестве детекторов к успеху не привели. Но позднее кристаллический метод был возрожден Дюмондом и его сотрудниками, которые намного усовершенствовали методику, и обеспечил самые точные до настоящего времени измерения длин волн γ-лучей.

Ф. Разетти

56

КРИСТАЛЛ ВИСМУТА КАК СПЕКТРОГРАФ ГАММА-ЛУЧЕЙ *

(Совместно с Ф. Разетти)

Описывается метод изготовления больших монокристаллов висмута и указывается на их применимость в спектрографии γ-лучей. Делается вывод, что при использовании такого кристалла результаты получаются более высокого качества, чем в случае обычно применяемой каменной соли. Сфотографирован целый ряд γ-линий радия B + C, причем достигнуты частоты, наибольшие из когда-либо наблюдавшихся с помощью кристаллов.

Несмотря на то, что γ-лучи чаще всего изучаются по вторичным β-лучам (т. е. по фотоэлектронам, образовавшимся при «конверсии» γ-кванта в самом же распадающемся атоме), тем не менее представляется весьма интересным прямой анализ γ-спектров по их интерференции в кристаллах. Так, например, измеряя число электронов, имеющихся в каждой линии вторичного β-спектра, нельзя просто получить интенсивность соответствующей γ-линии, так как здесь фигурирует так называемый «коэффициент конверсии», который меняется от линии к линии; с другой стороны, непосредственные измерения с помощью кристалла позволяют определить эти интенсивности. Сопоставляя же оба типа измерений, можно получить упомянутый коэффициент конверсии, который весьма существен для изучения строения ядра. Кроме того, измерения на кристалле больше подходят для определения абсолютных значений частоты и свободны от той неопределенности интерпретации, которая зачастую возникает при изучении спектров вторичных β-лучей.

Эти причины побудили нас заняться экспериментальным изучением спектров γ-лучей в рамках программы исследований по ядерной физике, разрабатываемой Физическим институтом в Риме при содействии Национального совета по исследованиям. Хотя эта работа еще и не завершена, мы считаем полезным сообщить о некоторых уже полученных результатах, которые могут представить определенный интерес.

Занимавшиеся до нас изучением спектров γ-лучей Резерфорд и Андраде [1], Тибо [2] и Фрийе [3] пользовались исключительно кристаллами

---

* *Uno spettrografo per raggi «gamma» a cristallo di bismuto.* (Con F. Rasetti). Ric. Scientifica, 1933, 4 (2), 299—302.

[1] E. Rutherford, N. da C. Andrade. Phil. Mag., 1914, **27**, 854; 28, 262.

[2] J. Thibaud. Thèse, Paris, 1925.

[3] M. Frilley. Thèse, Paris, 1928.

каменной соли. Будучи убеждены, что техника работы с этим кристаллом уже исчерпала свои возможности, мы подумали о том, нельзя ли получить лучшие результаты, воспользовавшись для измерения линий кристаллами тяжелых элементов, в которые излучение проникает лишь на небольшую глубину (что и обеспечивает лучшее определение линии).

Рассмотрев различные возможные кристаллы, мы остановили выбор на металлическом висмуте по ряду причин: большой атомный вес, легкость получения монокристаллов, постоянная решетки не слишком велика; к тому же он легко расслаивается.

Для получения спектров γ-лучей нужно располагать кристаллической поверхностью больших размеров, если принять во внимание очень малый угол падения, при котором следует работать, и необходимость иметь максимально возможную интенсивность. Поэтому нам пришлось разработать методику изготовления больших монокристаллов Bi и выделения в них кристаллической поверхности, параллельной плоскости 111 решетки и обладающей большими размерами (2×8 *см*^{2}). После многих попыток мы получили отличные результаты, избрав следующий метод. Когда расплавленный в электрической печи висмут очень медленно охлаждается (при понижении температуры печи на несколько градусов ниже точки плавления), то обычно получается единый кристалл, если только расширение, которое происходит при его затвердевании, не приводит к механическим напряжениям в местах контакта кристалла со стенками; напряжений можно избежать, пользуясь стеатитовой или гипсовой формой треугольного сечения. Далее, нужно было принять специальные меры, чтобы плоскость 111 кристалла была ориентирована параллельно продольной оси блока висмута, и, таким образом, можно было бы получить поверхность желаемых размеров. С этой целью мы воспользовались методом затравки, детально изученным Гетцом и его сотрудниками [4]. После того как было получено большое количество небольших цилиндрических монокристаллов Bi, из них выбирался один, в котором случайным образом плоскости 111 оказывались параллельными оси цилиндра; этот кристалл использовался как затравка. Расплавленный висмут кристаллизовался в форме при контакте с затравочным кристаллом, причем последний частично вновь расплавлялся. Если теперь начать совсем медленное охлаждение, формируя тепловой градиент в печи так, чтобы затравка всегда находилась в более холодной части, то кристаллизация всей массы пойдет в соответствии с ориентацией затравки. Получив кристалл, затравку отрезают; ее можно вновь и вновь использовать для выращивания других кристаллов.

После того как получен монокристалл с желаемой ориентацией, его нужно расслоить, чтобы высвободить плоскость 111. При этом требуются некоторые особые меры, так как кристаллы Bi легко деформируются. Мы нашли, что лучше всего отделять последовательные слои толщиной

[4] A. Goetz. Phys. Rev., 1930, 35, 193.

около 1/2 *мм* с помощью остро отточенного лезвия. Такие тонкие слои при отделении закручиваются, но остаток кристалла не деформируется. После отслоения поверхность слоя несет нерегулярности, вредные для измерения спектров. Они устраняются с помощью шлифовки тонкой наждачной бумагой, причем эту операцию целесообразно проводить при температуре жидого воздуха, ибо в противном случае часть поверхностного слоя кристалла оказывается разрушенной. Отражающая способность увеличивается, если в заключение снять еще один тонкий слой с помощью разбавленной азотной кислоты. После воздействия кислотой поверхность приобретает однородно шелковистый вид и обеспечивает — как показала проверка, постоянно проводившаяся с помощью рентгеновских лучей на всех этапах этой операции,— максимальную интенсивность и регулярность при отражении.

Кристалл фиксировался на гониометре таким образом, чтобы придать ему необходимые степени свободы. Щель спектрографа была образована двумя бронзовыми блоками и имела глубину 20 *см*; при использовании радиоактивного источника такая щель служила исключительно для защиты фотопластинки от прямых лучей, так как источник достаточно тонок для того, чтобы он сам мог служить щелью. Перед щелью могла устанавливаться рентгеновская трубка типа Müller—Metalix (с вольфрамовым антикатодом), служившая для наладки прибора и для измерения γ-линий (опорных K-линий вольфрама).

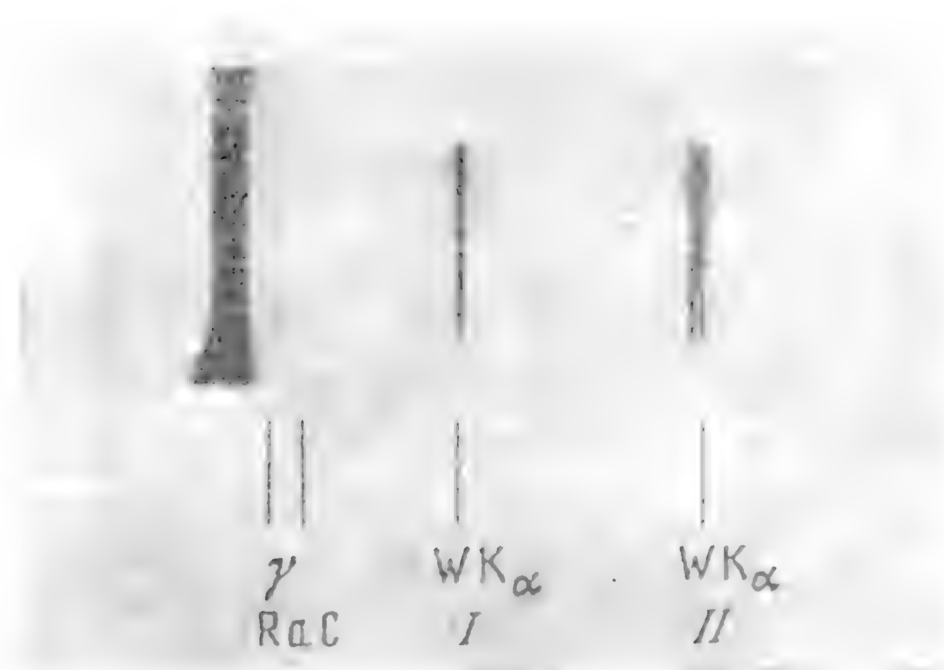
Расстояние между источником и фотопластинкой составляло 65 *см*. Ось вращения кристалла находилась посередине этого расстояния в соответствии с условием Брэгга.

Использовались фотопластинки Lumière «Opta» и усиливающий экран (вольфрамат кальция) типа «Ampli». Пластинки проявлялись разбавленным глицином.

Радиоактивные источники находились в стеклянных капиллярных трубочках длиной 15 *мм* и внутренним диаметром 0,2 ÷ 0,3 *мм*; они наполнялись эманацией радия, специально приготовленной проф. Дж. К. Трабакки из Физического института Министерства здравоохранения. Без тех возможностей, которыми располагает этот Институт, и без постоянного и конструктивного сотрудничества проф. Трабакки это исследование было бы невозможно; в связи с этим мы хотели бы здесь выразить ему свою благодарность.

Интенсивность имевшихся в нашем распоряжении источников составляла от 100 до 150 *мкюри*. Пластинка экспонировалась от шести до восьми дней, так что использовалось практически все излучение. Во время экспозиции кристалл не вращался, поскольку при заданных его размерах достаточно широкий спектральный интервал получается для одного положения. После экспозиции кристалл поворачивался и устанавливался в положениях, в которых отражаются K-линии вольфрама в первом и во втором порядке; эти линии регистрировались пластинкой в качестве опорных (примерно в течение трех минут; 5 *ма* и 110 *кв*).

Сначала была изучена область мягких γ-линий (K-линии элементов 82 и 83), затем — области больших частот, вплоть до 20 X-единиц. Линии оказываются очень узкими, так что разрешающие способности, достигнутые нами и Фрийе, являются, по-видимому, одинаковыми, хотя в его случае расстояние источник—пластинка было почти втрое больше. Это указывает на значительное превосходство кристалла висмута (хотя он использовался не в форме тонкой пластинки) по сравнению с кристаллом



каменной соли. На приведенной здесь фотографии воспроизводится спектрограмма, содержащая линии RaC 20 и 35 X-единиц. Заметим, что при данном расположении атомов в кристаллической решетке висмута плоскость 111 отражает с большой интенсивностью четные порядки; поэтому такая решетка на самом деле действует так, как будто ее постоянная вдвое меньше истинной, равной 3,94 Å. Действительно, все наблюдаемые γ-линии относятся ко второму порядку.

Наибольшие значения зарегистрированных частот, соответствующие 16 и 20 X-единицам, оказались максимальными также и у наших предшественников. Однако для этого Фрийе понадобились довольно сильные источники (700 *мкюри*); если же и мы сможем получить источник такой интенсивности, то, вероятно, сумеем превзойти достигнутое разрешение. Но даже если это и будет невозможно, остается еще много работы. Речь идет о переходе к фазе количественных исследований, на протяжении которой нужно провести точные измерения (их все еще недостаточно) длин волн и, пожалуй, интенсивностей, заменив фотопластинку ионизационной камерой или счетчиком Гейгера—Мюллера.

Нам приятно поблагодарить Национальный совет по исследованиям за щедрую помощь, предоставленную при выполнении этой работы.

К статье 57

Статья 57 была представлена на годичном собрании Итальянского общества «За успехи в науке» — «солидной» и многочисленной организации, в поле деятельности которой входила также организация встреч ученых различных отраслей науки. Статья носит популярный характер. Ввиду ограниченности объема настоящего издания редакция не сочла возможным опубликовать ее полностью, особенно имея в виду, что доклады такого типа уже вошли в настоящее собрание научных трудов Э. Ферми. Однако редакция считает необходимым привести начало статьи, в котором обсуждается «еретический» вопрос о том, являются ли все электроны одинаковыми. Создатель фермиевской статистики отвечает на этот вопрос без всякого догматизма (что для него типично): вопрос о тождественности электронов — чисто экспериментальный вопрос, и поэтому можно только сказать, что согласно наблюдению они очень похожи друг на друга, но в принципе есть возможность отличия.

Б. Понтекорво

57

МЕЛЬЧАЙШИЕ ЧАСТИЦЫ МАТЕРИИ *

Быть может, самая существенная разница между объектами макроскопического мира, т. е. обычными предметами, и объектами микроскопического (атомного) мира состоит в следующем.

В макроскопическом мире никогда не найдешь двух одинаковых предметов. Рассмотрим, например, два куска железа; мы можем сделать так, что они будут иметь тождественный вес и одинаковый внешний вид; мы можем даже достичь очень близкой микроскопической структуры, содержания различных примесей и т. д. Однако мы никогда не можем надеяться на то, что два куска железа будут совершенно тождественными. Причину этой невозможности следует искать в чрезвычайной сложности рассматриваемых предметов, состоящих из миллиардов миллиардов атомов и молекул: достаточно того, чтобы один из этих атомов в одном из кусков железа оказался смещенным по отношению к соответствующему атому другого куска, чтобы два предмета не могли называться тождественными. Итак, в этом смысле невозможность существования тождественных тел в макроскопическом мире можно интерпретировать как признак очень сложной структуры.

С этой точки зрения положение становится совсем другим, когда мы переходим от изучения обычных объектов к рассмотрению атомов и моле-

* *Le ultime particelle costitutive della materia.* Atti Soc. It. Progr. Sci., 22^a Riunione, Bari 1933, vol. 2, 7—14; Scientia, 1934, 55, 21—28.

кул или, более того, составляющих их элементов — ядер и электронов. В атомном мире действительно часто встречаются одинаковые объекты; так, например, можно утверждать, что два любых электрона или два любых атома одинакового вида тождественны. Естественно, вы скажете, что совершенную тождественность двух любых предметов нельзя констатировать: ее можно только определить с некоторой степенью точности, зависящей от наших возможностей наблюдения. И даже если эта точность с усовершенствованием технических средств становится все выше и выше, все-таки никак нельзя быть полностью уверенным в том, что она может быть сделана абсолютной. Конечно, ваши возражения верны, и даже утверждение, что, например, два любых электрона тождественны, должно быть принято только в относительном смысле, т. е. с точки зрения сегодняшних реальных возможностей наблюдения. И все-таки эти наблюдения для специфического случая констатации тождественности двух электронов крайне точны. Не входя в детали, что могло бы завести нас слишком далеко, я ограничусь только замечанием, что точность, с которой можно констатировать тождественность двух электронов, связана с возможностью наблюдения таких эффектов гипотетического различия, которые накопились бы в течение очень продолжительного времени. Так, например, если между двумя электронами, принадлежащими одному атому, существовало хотя бы малейшее различие, его влияние было бы незначительным, если его рассматривать в течение короткого периода жизни атома; но в конце концов со временем это различие (если бы оно существовало) изменило бы решающим образом структуру и внешние свойства атома. Итак, мы можем констатировать тождественность двух электронов, быть может, не в абсолютном смысле, но по крайней мере с очень большой степенью точности.

Тот факт, что в атомном мире часто встречаются одинаковые предметы, дает нам основание думать, что структура атомных частиц не является крайне сложной; по-видимому, после того как нам удастся проанализировать природу атомных частиц, ядер и электронов, мы уже не просто продвинемся на ступеньку ниже (в направлении более мелких составных элементов) в изучении структуры материи, но, так сказать, достигнем уровня, который, даже если и не представляет последнего фундамента, на котором создано все материальное здание (что, быть может, никогда не будет познано человеческим разумом), все-таки по крайней мере в течение длительного времени будет достаточным. Естественно, что все это просто предположение, хотя и имеются серьезные аргументы в его пользу.

1934

К статье 58

Чтобы вернее оценить значение фермиевской теории β-распада, необходимо вспомнить историю вопроса.

Вплоть до открытия нейтрона в начале 1932г. считалось, что ядра состоят из протонов и электронов, хотя еще в 1920 г. (E. Rutherford. Proc. Roy. Soc., 1920, **A97**, 324) высказывались соображения относительно существования тяжелой нейтральной частицы, и даже слово «нейтрон» уже использовалось в этом смысле (J. Chadwick. Proc. Roy. Soc., 1932, **A136**, 692).

Теория ядра имела два камня преткновения: квантовомеханические трудности, возникающие при помещении электрона в объем ядерных размеров, и трудности, связанные с непрерывностью β-спектров. Предлагались две возможные альтернативы. Бор допускал (N. Bohr. Convegno di Fisica Nucleare, R. Acc. d'Italia, p. 119, Roma, 1932), что электроны в ядре невозможно описать в рамках квантовой механики, что они утрачивают свойство определять статистику и спин ядра как целого (было известно, что ядра Li^6 и N^{14} вопреки ожиданию оказались бозонами и имели целые спины) и что энергия не сохраняется, когда в ядерных процессах участвуют электроны. Паули же не был склонен отказаться от закона сохранения энергии и предположил, что при β-распаде вместе с электроном испускается (одна или несколько) нейтральная частица. Эта идея впервые была высказана неофициально в письме, которое Паули направил 4 декабря 1930 г. группе физиков-ядерщиков Тюбингенского университета, главным образом Г. Гейгеру и Л. Мейтнер. После этого она упоминалась в дискуссиях на конференции физиков в Пасадене весной 1931 г., а затем в Анн Арборе следующим летом; однако опубликовать свое предположение Паули не решался, считая его слишком незрелым. (Эти подробности стали известны автору из переписки с В. Паули.)

Тем не менее очень скоро эта гипотеза стала известна среди физиков-теоретиков, и, хотя Паули не дал никакого названия своей гипотетической нейтральной частице, ее стали называть «нейтроном». Употребление того же термина для тяжелой частицы ограничивалось главным образом школой Резерфорда. В октябре 1931 г. в Риме происходила конференция по ядерной физике, организованная Фондом Вольта Королевской академии Италии. На ней присутствовало большинство экспериментаторов и теоретиков, активно занимавшихся ядерной физикой: Блэккет, Боте, Бор, Мария Кюри, Эренфест, Эллис, Ферми, Гейгер, Гаудсмит, Гейзенберг, Лизе Мейтнер, Паули, Зоммерфельд и др. На конференции обсуждался процесс β-распада; Бор выступил с идеей о несохранении энергии, но на Ферми благоприятное впечатление произвела гипотеза Паули. К этому времени словом «нейтрон» все чаще называли тяжелую нейтральную частицу, открытие которой было у порога, и было ясно, что во избежание путаницы «частицу Паули» следовало бы назвать как-то иначе. В беседе с римскими физиками Ферми в шутку предложил назвать ее «нейтрино». Нужно пояснить, что в итальянском языке окончания -one и -ino можно прибавлять ко многим существительным и прилагательным, обозначая тем самым громадность или малость соответственно. Итальянское слово neutrone (нейтрон) состоит из neutro- (нейтральный) и -one, что в целом означает «большой нейтральный объект»; аналогично, neutrino означает «маленький нейтральный объект». Слово «нейтрино» было упомянуто на конференции и вскоре стало официальным наименованием нейтральной частицы, испускаемой при β-распаде.

В октябре 1933 г. в Брюсселе состоялся седьмой Сольвеевский конгресс. Вновь произошла представительная встреча авторитетов в области теоретической и экспериментальной ядерной физики. Среди участников были Бор, Блэккет, Боте, Чэдвик, Кокрофт, Мария Кюри, Л. де Бройль, Дирак, Эллис, Ферми, Гамов, Гейзенберг, Ирэн Жолио-Кюри, Ф. Жолио, Лоуренс, Мейтнер, Паули и Резерфорд. К тому времени был открыт нейтрон и работами Гейзенберга, Иваненко и Майораны была достаточно хорошо обоснована модель ядра,построенного из протонов и нейтронов. Нейтринная гипотеза впервые появилась в печати в Трудах этого конгресса, в комментарии Паули к докладу Гейзенберга (W. P a u l i, Structure et propriétés des Noyaux Atomiques. Rapports et Discussions du Septième Conseil de Physique. Institut International de Physique Solvay, p. 324. Gauthier—Villars, Paris, 1934.). Вопрос о том, следует ли приписать нейтрино конечную массу покоя, он оставил открытым; однако, чтобы обеспечить сохранение спина и статистики в β-распаде, с уверенностью предложил спин 1/2 и статистику Ферми; разумеется, что сохранение энергии и импульса также предполагалось. Таким образом, Ферми присутствовал на этих исторических дискуссиях по строению ядра и β-распаду, и, хотя его роль в то время ограничивалась в основном толкованием проблемы ядерных сил, ясно, что он серьезно размышлял о теории β-распада. В самом деле, статья [Б76], в которой сообщаются его окончательные результаты по β-спектрам, появилась уже в декабрьском номере (1933 г.) «Ricerca Scientifica» (неизвестно, когда статья была получена редакцией журнала), т. е. всего 2 месяца спустя после Сольвеевского конгресса.

Чтобы осознать фундаментальность вклада Ферми в теорию β-распада, необходимо подчеркнуть, что идея о существовании нейтрино продолжала бы оставаться довольно смутной гипотезой, если бы не была сделана попытка построения формальной теории. Когда в 1930 г. Паули впервые высказал свое предположение, считалось, что электроны существуют в ядре, и гипотетическая нейтральная частица по аналогии рассматривалась как еще одна составная часть ядра (с малой, но конечной массой покоя). И лишь неясные намеки на возможность возникновения электрона (и нейтрино) в самом процессе β-распада можно найти в Трудах Сольвеевского конгресса 1933 г.

Знакомясь таким образом с этой проблемой, Ферми овладевал в то же время теоретическим аппаратом, который привел его к успеху. Он внимательно изучал дираковскую теорию излучения, о чем свидетельствует знаменитый обзор по этому вопросу (статья 48), опубликованный в 1932 г. Метод Дирака—Йордана — Клейна вторичного квантования полей вызвал у него, по-видимому, какие-то затруднения; однако в конце концов он одолел и эту технику и считал теорию β-распада хорошим упражнением в применении операторов рождения и уничтожения. Он пользовался также формализмом изотопического спина, только что предложенным Гейзенбергом и оказавшимся впоследствии очень полезным ввиду зарядовой независимости сильных взаимодействий.

Построенная им на этой основе теория оказалась способной выдержать почти без изменений два с половиной десятилетия революционного развития ядерной физики Можно было бы заметить, что физическая теория редко рождается в столь окончательной форме.

Ферми со всей ясностью указывал, что имеется много возможных видов гамильтониана взаимодействия, приводящих к процессу β-распада. Его выбор диктовался соображениями простоты и аналогией со взаимодействием зарядов и токов с электромаг-

hundertmal kleiner sind wie die der erlaubten Übergängen.

7. Die Masse des Neutrinos. Durch die Uebergangswahrscheinlichkeit (32) ist die Form des kontinuierlichen β-Spektrums bestimmt. Wir wollen zuerst diskutieren, wie diese Form von der Ruhmasse des Neutrinos abhängt, um von einem Vergleich mit den empirischen Kurven diese Konstante zu bestimmen. Die Masse μ ist in dem Faktor p_σ^2/v_σ enthalten. Die Abhängigkeit der Form der Energieverteilungskurve von μ ist am ausgeprägtesten in der Nähe des Endpunkts der Verteilungskurve. Ist E_0 die Grenzenergie der β-Strahlen, so sieht man ohne Schwierigkeit dass die Verteilungskurve der β-Strahl Energie für Energien E in der Nähe von E_0, proportional ist zu

$$(36)\quad \frac{p_\sigma^2}{v_\sigma} = \frac{1}{c^3}\left(\mu c^2 + E_0 - E\right)\sqrt{(E_0-E)^2 + 2\mu c^2 (E_0 - E)}$$

Одна из страниц рукописи знаменитой работы Э. Ферми по теории бета-распада

нитным полем. Поэтому он выбрал векторное взаимодействие. Позднее Вигнер показал, что возможные релятивистски инвариантные взаимодействия, билинейные по волновым функциям электрона и нейтрино (и не содержащие градиентов этих функций), могут быть пяти типов (или любой линейной комбинацией их). Конкретный выбор не влиял на основные результаты расчетов Ферми: форму разрешенных спектров (целиком определяемую «статистическим множителем» и кулоновскими эффектами) и значения произведений ft для разрешенных переходов. Однако полученные правила отбора оказались слишком жесткими. Позднее Гамов и Теллер показали, что другие виды взаимодействия (аксиально-векторное и тензорное) дают для разрешенных переходов иные правила отбора. Экспериментальная проверка обнаружила, что в β-распаде взаимодействие должно быть смесью—примерно с равным весом — взаимодействия Ферми (скалярного или векторного) и взаимодействия Гамова — Теллера. В настоящее время (1959 г.) представляется достаточно хорошо установленным, что фермиевское взаимодействие является векторным (как он и предполагал с самого начала), а гамов-теллеровское—аксиально-векторным. При такой модификации теория Ферми успешно объясняет количественно целый ряд явлений, помимо тех, которые были рассчитаны в начальных работах. Можно отметить формы спектров и времена жизни для переходов разного порядка запрещенности, позитронный распад и захват орбитального электрона, а также процессы, не связанные с β-распадом нуклонов, но обладающие свойствами, которые характерны для «слабых взаимодействий» между четырьмя фермионами. К таким процессам относятся распад мюона и взаимодействие отрицательного мюона с протоном. Описание всех этих процессов в рамках одного и того же «универсального фермиевского взаимодействия», по-видимому, совместимо с имеющимися экспериментальными фактами. Недавние результаты потребовали несколько модифицировать теорию β-распада, включив в нее члены, не сохраняющие четность.

Ферми собирался опубликовать результаты своей теории β-распада в письме в «Nature»; однако редактор журнала возвратил рукопись, указав, что статья содержит абстрактные рассуждения, слишком далекие от физической реальности, чтобы заинтересовать читателей. После этого Ферми послал несколько более длинную статью [Б76] в «Ricerca Scientifica», где она и была очень скоро напечатана. Эта статья содержит все основные результаты и показывает, что к тому времени расчеты (включая расчеты численного значения ft) были сделаны.

В самом начале 1934 г. в «Nuovo Cimento» и «Zeitschrift für Physik» были направлены более длинные статьи.

Ф. Разетти

В дополнение к комментарию Разетти сегодня можно лишь заметить, что теория универсального фермиевского взаимодействия, созданная более 10 лет назад Фейнманом и Гелл-Манном, а также Маршаком и Сударшаном, завоевала прочное место в современной физике. Она описывает все процессы слабого взаимодействия, включая процессы с участием «странных» частиц.

Б. Понтекорво

58

К ТЕОРИИ β-ЛУЧЕЙ *[1]

Предлагается количественная теория β-распада, основанная на существовании нейтрино; при этом испускание электронов и нейтрино рассматривается по аналогии с эмиссией светового кванта возбужденным атомом в теории излучения. Выведены формулы для времени жизни ядра и для формы непрерывного спектра β-лучей; полученные формулы сравниваются с экспериментом.

1. Основные положения теории

При попытке построить теорию ядерных электронов и теорию испускания β-частиц мы встречаемся, как известно, с двумя трудностями. Первая связана с непрерывностью спектра β-лучей. Если считать справедливым закон сохранения энергии, то нужно предположить, что какая-то часть высвобождающейся при β-распаде энергии не регистрируется существующими в настоящее время средствами наблюдения. Можно, например, предположить, как это предлагает В. Паули, что при β-распаде испускается не только электрон, но также и новая частица — так называемое «нейтрино» (с массой, по порядку величины равной или меньшей массы электрона, и нулевым электрическим зарядом). В основу предлагаемой здесь теории положена гипотеза о существовании нейтрино.

Другая трудность теории ядерных электронов состоит в том, что современные релятивистские теории легких частиц (электронов или нейтрино) не в состоянии исчерпывающим образом объяснить, как могут такие частицы связываться на траекториях с размерами порядка ядерных.

Поэтому представляется более целесообразным принять, следуя Гейзенбергу [2], что ядро состоит только из тяжелых частиц, протонов и нейтронов, а для того чтобы понять возможность испускания β-частиц,— попытаться построить теорию испускания легких частиц ядром по аналогии с теорией испускания светового кванта возбужденным атомом в обычном процессе излучения. В теории излучения полное число световых квантов не является постоянным: кванты возникают, когда они излучаются атомом, и исчезают при поглощении. Аналогичным образом, в основу теории β-лучей мы положим следующие предположения:

а) Полное число электронов, равно как и число нейтрино, не обязательно должно быть постоянным. Электроны (или нейтрино) могут возни-

---

* *Versuch einer Theorie der β-Strahlen.* I. Zs. f. Phys., 1934, 88, 161—171.

[1] Ср. предварительное сообщение: E. Fermi. Ric. Scientifica, 1933, 4 (2), 491.

[2] W. Heisenberg. Zs. f. Phys., 1932, 77, 1.

кать и исчезать. Однако такая возможность не имеет никакой аналогии с возникновением или исчезновением пары, состоящей из электрона и позитрона; если позитрон считать дираковской «дыркой», то последний процесс в действительности нужно понимать просто как квантовый переход электрона из состояния с отрицательной энергией в состояние с положительной энергией, причем полное (бесконечно большое) число электронов сохраняется.

б) Тяжелые частицы, нейтроны и протоны, можно рассматривать, следуя Гейзенбергу, как два внутренних квантовых состояния тяжелой частицы. Сформулируем это, введя некоторую внутреннюю координату ρ тяжелой частицы, могущую принимать только два значения: $\rho = 1$, когда частица является нейтроном, и $\rho = -1$, если она оказывается протоном.

в) Гамильтонову функцию системы, состоящей из тяжелых и легких частиц, нужно выбрать таким образом, чтобы каждый переход нейтрона в протон сопровождался возникновением электрона и нейтрино, а обратный процесс — превращение протона в нейтрон — сопровождался исчезновением электрона и нейтрино. Заметим, что тем самым обеспечивается сохранение заряда.

2. Операторы, встречающиеся в теории

Математический формализм теории, согласующийся с этими тремя требованиями, легче всего построить с помощью метода [3] «вторичного квантования», который предложили Дирак, Йордан и Клейн. Таким образом, под амплитудами вероятности электрона и нейтрино, ψ и φ, равно как и комплексно сопряженными величинами ψ^* и φ^*, мы будем подразумевать операторы; для описания же тяжелой частицы воспользуемся обычным представлением в конфигурационном пространстве, при этом, естественно, в качестве координаты нужно учитывать также и ρ.

Прежде всего мы введем два оператора Q и Q^*, которые действуют на функции двухзначной переменной ρ как линейные преобразования:

$$Q = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad Q^* = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Сразу же видно, что Q соответствует превращению протона в нейтрон, а Q^* — нейтрона в протон.

Как известно, смысл амплитуд вероятности ψ и φ, которые считаются операторами, состоит в следующем. Пусть

$$\psi_1\psi_2 \ldots \psi_s \ldots$$

[3] См., например, P. Jordan, O. Klein. Zs. f. Phys., 1927, 45, 751; W. Heisenberg. Ann. d. Phys., 1931, 10, 888.

есть система отдельных квантовых состояний для электронов. Положим далее, что

$$\psi = \sum_s \psi_s a_s, \qquad \psi^* = \sum_s \psi_s^* a_s^*. \tag{2}$$

Амплитуды a_s и комплексно сопряженные величины a_s^* представляют собой операторы, действующие на функции чисел заполнения N_1, N_2, ..., N_s, ... отдельных квантовых состояний. Если имеет место принцип Паули, то каждое из N_s может принимать только одно из двух значений— 0 и 1. Операторы a_s и a_s^* определяются тогда следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} a_s^*\Psi(N_1N_2\ldots N_s\ldots) &= (-1)^{N_1+N_2+\ldots+N_{s-1}}(1-N_s)\Psi(N_1N_2\ldots 1-N_s\ldots),\\ a_s\Psi(N_1N_2\ldots N_s\ldots) &= (-1)^{N_1+N_2+\ldots+N_{s-1}}N_s\Psi(N_1N_2\ldots 1-N_s\ldots).\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Оператор a_s^* соответствует появлению, а оператор a_s — исчезновению электрона в квантовом состоянии s. В соответствии с равенствами (2) положим для нейтрино

$$\varphi = \sum_\sigma \varphi_\sigma b_\sigma; \qquad \varphi^* = \sum_\sigma \varphi_\sigma^* b_\sigma^*. \tag{4}$$

Комплексно сопряженные величины b_σ и b_σ^* являются операторами, которые действуют на функции чисел заполнения M_1, M_2, ..., M_σ, ... отдельных квантовых состояний φ_1, φ_2, ..., φ_σ, ... нейтрино. Если предположить, что принцип Паули справедлив также и для нейтрино, то числа M_σ могут принимать только два значения — 0 и 1. Далее имеем

$$\left.\begin{aligned} &b_\sigma^*\Phi(M_1M_2\ldots M_\sigma\ldots) =\\ &= (-1)^{M_1+M_2+\ldots+M_{\sigma-1}}(1-M_\sigma)\Phi(M_1M_2\ldots 1-M_\sigma\ldots),\\ &b_\sigma\Phi(M_1M_2\ldots M_\sigma\ldots) =\\ &= (-1)^{M_1+M_2+\ldots+M_{\sigma-1}}M_\sigma\Phi(M_1M_2\ldots 1-M_\sigma\ldots).\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Операторы b_σ и b_σ^* отвечают соответственно исчезновению и возникновению нейтрино в квантовом состоянии σ.

3. Построение функции Гамильтона

Энергия полной системы, состоящей из тяжелых и легких частиц, есть сумма энергий тяжелых $H_{\text{тяж}}$ и легких $H_{\text{легк}}$ частиц + энергия взаимодействия $\mathcal{H}$ между тяжелыми и легкими частицами.

Рассматривая для простоты всего лишь одну тяжелую частицу, запишем первый член в виде

$$H_{\text{тяж}} = \frac{1+\rho}{2}N + \frac{1-\rho}{2}P, \tag{6}$$

где N и P — операторы энергии нейтрона и протона соответственно. В самом деле, при $\rho = 1$ (нейтрон) выражение (6) сводится к N; при $\rho = -1$ оно сводится к P.

Энергия легких частиц $H_{\text{легк}}$ принимает простейшую форму, если в качестве квантовых состояний $\psi_1\psi_2 \ldots \psi_s \ldots$ и $\varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_\sigma \ldots$ взять стационарные состояния электрона и нейтрино соответственно. При этом для электронов следует брать стационарные состояния в кулоновском поле ядра, приняв во внимание электронную экранировку. Для нейтрино же можно взять просто де-бройлевскую волну, так как действующие на него силы никакой существенной роли не играют. Пусть $H_1H_2 \ldots H_s \ldots$ и $K_1K_2 \ldots \ldots K_\sigma \ldots$ суть энергии стационарных состояний электрона и нейтрино; тогда имеем

$$H_{\text{легк}} = \sum_s H_s N_s + \sum_\sigma K_\sigma M_\sigma. \tag{7}$$

Остается еще записать энергию взаимодействия. Она включает, во-первых, кулоновскую энергию протона и электрона; однако в случае тяжелых ядер притяжение, создаваемое одним единственным протоном, играет лишь второстепенную роль и, во всяком случае, никоим образом не влияет на процесс β-распада. Поэтому ради простоты этот член мы учитывать не будем [4]. Но к функции Гамильтона нужно добавить член, удовлетворяющий условию «в» § 1.

Член, который необходимым образом связывает превращение протона в нейтрон с исчезновением электрона и нейтрино, согласно сказанному в § 2, имеет вид

$$Q a_s b_\sigma. \tag{8}$$

Комплексно же сопряженный оператор

$$Q^* a_s^* b_\sigma^* \tag{8'}$$

связывает обратные процессы (превращение нейтрона в протон и возникновение электрона и нейтрино).

Таким образом, член, который описывает взаимодействие и удовлетворяет условию «в», можно записать в следующей форме:

$$\mathcal{H} = Q \sum_{s\sigma} c_{s\sigma} a_s b_\sigma + Q^* \sum_{s\sigma} c_{s\sigma}^* a_s^* b_\sigma^*; \tag{9}$$

здесь $c_{s\sigma}$ и $c_{s\sigma}^*$ представляют собой величины, которые могут зависеть от координат, импульсов и т. д. тяжелой частицы.

Для более детального определения $\mathcal{H}$ мы вынуждены прибегнуть к критериям максимальной простоты. Конечно, существенное ограничение на

---

[4] Естественно, что кулоновское воздействие множества остальных протонов следует учесть как статическое поле.

свободу выбора $\mathcal{H}$ налагает требование сохранения импульса, а также требование инвариантности выражения (9) относительно вращения или трансляции в координатном пространстве.

Если пока оставить в стороне вопрос о релятивистских поправках и спиновом взаимодействии, то простейшим возможным выбором для гамильтониана взаимодействия (9) будет, пожалуй,

$$\mathcal{H} = g\{Q\psi(x)\varphi(x) + Q^*\psi^*(x)\varphi^*(x)\}, \tag{10}$$

где g — константа с размерностью L^5MT^{-2}, x представляет координаты тяжелой частицы, а ψ, φ, ψ^*, φ^* даются равенствами (2) и (4) и берутся в точке (x, y, z), где находится тяжелая частица.

Выражение (10) отнюдь не является единственно возможным. Любое скалярное выражение вида

$$L(p)\,\psi(x)\,M(p)\,\varphi(x)\,N(p) + \text{компл. сопряж.},$$

где $L(p)$, $M(p)$, $N(p)$ суть надлежащим образом выбранные функции импульсов тяжелых частиц, было бы столь же пригодным. Но поскольку изученные до сих пор следствия выражения (10) как будто бы согласуются с опытом, то в настоящее время, видимо, следует, ограничиться простейшим выбором.

Однако необходимо обобщить выражение (10) таким образом, чтобы, по крайней мере, легкие частицы можно было рассматривать релятивистски. Правда, и при таком обобщении не исключен некоторый произвол. Простейшим решением этой задачи является, по-видимому, следующее.

Перейдем от функций ψ и φ к двум четверкам релятивистских функций Дирака $\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4$ и $\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4$, и рассмотрим 16 независимых билинейных комбинаций из $\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4$ и $\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4$. При лоренцовском преобразовании координат эти 16 величин подчиняются линейному преобразованию, являющемуся представлением группы Лоренца. Это представление 16-й степени разложимо на различные более простые представления; в частности, четыре билинейные комбинации

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= -\psi_1\varphi_2 + \psi_2\varphi_1 + \psi_3\varphi_4 - \psi_4\varphi_3, \\ A_1 &= \psi_1\varphi_3 - \psi_2\varphi_4 - \psi_3\varphi_1 + \psi_4\varphi_2, \\ A_2 &= i\psi_1\varphi_3 + i\psi_2\varphi_4 - i\psi_3\varphi_1 - i\psi_4\varphi_2, \\ A_3 &= -\psi_1\varphi_4 - \psi_2\varphi_3 + \psi_3\varphi_2 + \psi_4\varphi_1 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

преобразуются как компоненты полярного 4-вектора, т. е. как компоненты электромагнитного 4-потенциала. Таким образом, представляется естественным так включить в функцию Гамильтона тяжелой частицы четыре величины

$$g(QA_i + Q^*A_i^*),$$

чтобы они отвечали компонентам 4-потенциала.

Здесь возникает трудность, связанная с тем, что неизвестно релятивистское волновое уравнение для тяжелой частицы. В том случае, однако, когда скорость такой частицы мала по сравнению с c, можно ограничиться членом, аналогичным eV (V — скалярный потенциал) и написать:

$$\mathcal{H} = g\,[Q\,(-\psi_1\varphi_2 + \psi_2\varphi_1 + \psi_3\varphi_4 - \psi_4\varphi_3) + \\ + Q^*(-\psi_1^*\varphi_2^* + \psi_2^*\varphi_1^* + \psi_3^*\varphi_4^* - \psi_4^*\varphi_3^*)]. \qquad (12)$$

К этому выражению нужно еще добавить другие слагаемые, по порядку величины равные v/c. Пока что они не будут учитываться (ср. в связи с этим § 9), так как скорости нейтронов и протонов в ядре обычно малы по сравнению со скоростью света.

В символической матричной записи выражение (12) можно представить следующим образом:

$$\mathcal{H} = g\,[Q\tilde{\psi}^*\delta\varphi + Q^*\tilde{\psi}\delta\varphi^*], \qquad (13)$$

где ψ и φ нужно записывать в виде матриц лишь с одним столбцом, знак $\sim$ превращает матрицу в комплексно-сопряженную и транспонированную, а

$$\delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}. \qquad (14)$$

Пользуясь этими обозначениями и сравнивая выражения (9) и (12), получаем

$$c_{s\sigma} = g\tilde{\psi}_s^*\delta\varphi_\sigma, \qquad \overset{*}{c}_{s\sigma} = g\tilde{\psi}_s\delta\overset{*}{\varphi}_\sigma; \qquad (15)$$

здесь ψ_s и φ_σ являются нормированными четырехкомпонентными собственными функциями состояний s (электрона) и σ (нейтрино), зависящими от координат x, y, z точки, где находится тяжелая частица.

4. Матрица возмущения

С помощью полученного гамильтониана теорию β-распада можно построить в полной аналогии с теорией излучения. Как известно, в рамках последней функция Гамильтона является суммой: энергия атома + энергия чистого поля излучения + энергия их взаимодействия. Последний член рассматривается как возмущение двух других. Аналогично, в нашем случае сумма

$$H_{\text{тяж}} + H_{\text{легк}} \qquad (16)$$

будет считаться невозмущенным гамильтонианом; кроме того, добавляется возмущение, которое определяется выражением (13).

Квантовые состояния невозмущенной системы можно нумеровать следующим образом:

$$(\rho,\, n,\, N_1 N_2 \ldots N_s \ldots M_1 M_2 \ldots M_\sigma \ldots). \tag{17}$$

Здесь первое число, ρ, принимает одно из двух значений, ± 1, в зависимости от того, является ли тяжелая частица нейтроном или протоном. Второе число, n, указывает квантовое состояние нейтрона или протона. Для $\rho = +1$ (нейтрон) соответствующей собственной функцией пусть будет

$$u_n(x), \tag{18}$$

где под x подразумеваются все координаты тяжелой частицы, кроме ρ. Для $\rho = -1$ (протон) собственной функцией пусть будет

$$v_m(x). \tag{19}$$

Остальные числа $N_1 N_2 \ldots N_s \ldots M_1 M_2 \ldots M_\sigma \ldots$ могут принимать только два значения, 0 и 1, в зависимости от того, какие электронные и нейтринные состояния заняты.

Если внимательно присмотреться к общей форме выражения (9) для энергии возмущения, то окажется, что его элементы отличны от нуля лишь для таких переходов, при которых тяжелая частица либо переходит из нейтронного в протонное состояние, причем одновременно возникают электрон и нейтрино, либо наоборот.

С помощью выражений (1), (3), (5), (9), (18) и (19) сразу же находим искомый матричный элемент

$$\mathscr{H}^{1 n N_1 N_2 \ldots 0_s \ldots M_1 M_2 \ldots 0_\sigma \ldots}_{-1 m N_1 N_2 \ldots 1_s \ldots M_1 M_2 \ldots 1_\sigma \ldots} = \pm \int \overset{*}{v}_m \overset{*}{c}_{s\sigma} u_n \, d\tau, \tag{20}$$

где интегрирование нужно проводить по конфигурационному пространству тяжелой частицы (исключая координату ρ). Знак $\pm$ более точно означает

$$(-1)^{N_1 + N_2 + \ldots + N_{s-1} + M_1 + M_2 + \ldots M_{\sigma-1}};$$

впрочем, из последующих вычислений он выпадает. Обратному переходу соответствует комплексно-сопряженный матричный элемент.

Подставив вместо $c^*_{s\sigma}$ его выражение (15), получим

$$\mathscr{H}^{1 n 0_s 0_\sigma}_{-1 m 1_s 1_\sigma} = \pm g \int \overset{*}{v}_m u_n \widetilde{\psi}_s \delta \overset{*}{\varphi}_\sigma \, d\tau, \tag{21}$$

где ради краткости все неизменяющиеся индексы в левой части опущены.

5. Теория β-распада

Бета-распад представляет собой процесс, при котором нейтрон ядра превращается в протон и одновременно, в соответствии с описанным механизмом, испускаются электрон, который наблюдается в виде β-частицы,

и нейтрино. Для вычисления вероятности такого процесса предположим, что в момент времени $t = 0$ нейтрон находится в ядерном состоянии с собственной функцией $u_n(x)$, а $N_s = M_\sigma = 0$, т. е. электронное состояние s и нейтринное состояние σ свободны. Тогда при $t = 0$ амплитуда вероятности состояния $(1, n, 0_s, 0_\sigma)$ есть

$$a_{1n0_s0_\sigma} = 1, \tag{22}$$

а амплитуда вероятности состояния $(-1, m, 1_s, 1_\sigma)$, в котором нейтрон переходит в протон с собственной функцией $v_m(x)$ при испускании электрона и нейтрино, в начальный момент времени равна нулю.

Пользуясь обычными формулами теории возмущений, получаем [для отрезка времени достаточно малого, чтобы равенство (22) приближенно выполнялось]

$$\dot{a}_{-1m1_s1_\sigma} = -\frac{2\pi i}{h}\mathcal{H}^{1n0_s0_\sigma}_{-1m1_s1_\sigma}e^{\frac{2\pi i}{h}(-W+H_s+K_\sigma)t}, \tag{23}$$

где W — разность энергий нейтронного и протонного состояний.

Из формулы (23) находим (поскольку при $t = 0$ амплитуда $a_{-1m1_s1_\sigma} = 0$):

$$a_{-1m1_s1_\sigma} = -\mathcal{H}^{1n0_s0_\sigma}_{-1m1_s1_\sigma}\frac{e^{\frac{2\pi i}{h}(-W+H_s+K_\sigma)t}-1}{-W+H_s+K_\sigma}. \tag{24}$$

Таким образом, в момент времени t вероятность рассматриваемого перехода равна

$$|a_{-1m1_s1_\sigma}|^2 = 4|\mathcal{H}^{1n0_s0_\sigma}_{-1m1_s1_\sigma}|^2\frac{\sin^2\frac{\pi t}{h}(-W+H_s+K_\sigma)}{(-W+H_s+K_\sigma)^2}. \tag{25}$$

Чтобы вычислить время жизни нейтронного состояния u_n, нужно просуммировать выражение (25) по всем свободным электронным и нейтринным состояниям.

Вычисление этой суммы значительно упрощается, если учесть, что дебройлевские длины волн электронов и нейтрино с энергиями в несколько миллионов электронвольт существенно превышают размеры ядра. Поэтому в первом приближении собственные функции ψ_s и φ_σ можно считать постоянными внутри ядра, и тогда

$$\mathcal{H}^{1n0_s0_\sigma}_{-1m1_s1_\sigma} = \pm g\tilde{\psi}_s\delta\varphi^*_\sigma\int v^*_m u_n\,d\tau, \tag{26}$$

причем здесь и в дальнейшем значения ψ_s и φ_σ следует брать в той точке, где находится ядро (ср. § 8). Из соотношения (26) имеем

$$|\mathcal{H}^{1n0_s0_\sigma}_{-1m1_s1_\sigma}|^2 = g^2\left|\int v^*_m u_n\,d\tau\right|^2\tilde{\psi}_s\delta\varphi^*_\sigma\tilde{\varphi}^*_\sigma\delta\tilde{\psi}_s. \tag{27}$$

Состояния нейтрино σ определяются его импульсом p_σ и направлением спина. Если для нормировки квантование проводить в объеме Ω, размеры которого сделать затем бесконечно большими, то нормированные собственные функции нейтрино оказываются плоскими дираковскими волнами с плотностью 1/Ω. В этом случае простая алгебра позволяет получить среднее значение (27) по всем направлениям импульса p_σ и спина нейтрино. (При этом должны рассматриваться лишь положительные собственные значения; отрицательные же устраняются с помощью искусственного приема, аналогичного приему дираковской теории «дырок».) Находим, что

$$\overline{|\mathcal{H}^{1n0_s0_\sigma}_{-1m1_s1_\sigma}|^2} = \frac{g^2}{4\Omega}\left|\int v_m^* u_n\, d\tau\right|^2\left(\tilde{\psi}_s\psi_s - \frac{\mu c^2}{K_\sigma}\tilde{\psi}_s\beta\psi_s\right), \tag{28}$$

где μ — масса покоя нейтрино, а β — матрица Дирака:

$$\beta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}. \tag{29}$$

Замечая далее, что число нейтринных состояний с положительной энергией и с импульсом в пределах от p_σ до $p_\sigma + dp_\sigma$ равно $\frac{8\pi\Omega}{h^3}p_\sigma^2 dp_\sigma$, что $\partial K_\sigma/\partial p_\sigma = v_\sigma$, где v_σ есть скорость нейтрино в состоянии σ, что формула (25) дает резкий максимум вблизи того значения p_σ, при котором изменение невозмущенной энергии равно нулю, т. е.

$$-W + H_s + K_\sigma = 0, \tag{30}$$

просуммируем выражение (25) по σ известным способом[5]; найдем

$$t\frac{8\pi^3 g^2}{h^4}\left|\int v_m^* u_n d\tau\right|^2 \frac{p_\sigma^2}{v_\sigma}\left(\tilde{\psi}_s\psi_s - \frac{\mu c^2}{K_\sigma}\tilde{\psi}_s\beta\psi_s\right), \tag{31}$$

где p_σ — значение импульса нейтрино, для которого справедливо равенство (30).

6. Элементы, определяющие вероятности перехода

Величина (31) дает вероятность того, что за время t произойдет β-распад, при котором испустится электрон в состоянии s. Как и должно быть, она пропорциональна времени t (предполагается, что t мало по сравнению

[5] Детальное описание метода такого суммирования см. в какой-либо статье по теории излучения; например: E. Fermi. Rev. Mod. Phys., 1932, 4, 87. (Статья 48.)

с временем жизни); коэффициент при t представляет собой вероятность перехода для указанного процесса. Она равна

$$P_s = \frac{8\pi^3 g^2}{h^4} \left| \int v_m^* u_n d\tau \right|^2 \frac{p_\sigma^2}{v_\sigma} \left(\tilde{\psi}_s \psi_s - \frac{\mu c^2}{K_\sigma} \tilde{\psi}_s \beta \psi_s \right). \tag{32}$$

Заметим здесь следующее.

а) Для свободных нейтринных состояний всегда $K_\sigma \geqslant \mu c^2$. Следовательно, для того чтобы удовлетворялось равенство (30), необходимо выполнение неравенства

$$H_s \leqslant W - \mu c^2. \tag{33}$$

Знак равенства соответствует верхней границе непрерывного спектра β-лучей.

б) Поскольку для свободных электронных состояний $H_s \geqslant mc^2$, получаем следующее необходимое условие возможности β-распада:

$$W \geqslant (m + \mu) c^2. \tag{34}$$

Таким образом, в ядре занятое нейтронное состояние n должно лежать достаточно высоко над свободным протонным состоянием m, чтобы мог произойти β-процесс.

в) Согласно соотношению (32), вероятность P_s зависит от собственных функций u_n, v_m тяжелой частицы в ядре через посредство матричного элемента

$$Q_{mn}^* = \int v_m^* u_n d\tau. \tag{35}$$

В теории β-излучения он играет роль, аналогичную той, какую матричный элемент электрического момента атома играет в теории излучения. Обычно матричный элемент (35) по порядку величины равен 1; однако вследствие специфических свойств симметрии функций u_n и v_m может случиться так, что Q_{mn}^* обращается в нуль. В таких случаях мы говорим о *запрещенных β-переходах.* Не следует ожидать, конечно, что запрещенные переходы вообще невозможны, поскольку формула (32) является приближенной. В § 9 будет немного сказано о таком типе переходов.

7. Масса нейтрино

Вероятность перехода (32) определяет форму непрерывного β-спектра. Прежде всего мы обсудим, каким образом форма спектра зависит от массы покоя μ нейтрино, с тем чтобы определить эту массу из сравнения теоретических и экспериментальных спектров. Масса μ входит в множитель p_σ^2/v_σ. Зависимость от μ формы кривой энергетического распределения

проявляется в основном вблизи конца этой кривой. Если граничная энергия β-лучей равна E_0, то легко видеть, что кривая распределения по энергии вблизи E_0 ведет себя (с точностью до независящего от E множителя) как

$$\frac{p_\sigma^2}{v_\sigma} = \frac{1}{c^3}(\mu c^2 + E_0 - E)\sqrt{(E_0 - E)^2 + 2\mu c^2 (E_0 - E)}. \tag{36}$$

На рис. 1 показан конец кривой распределения для $\mu = 0$, а также для малого и большого значений μ. Наибольшее сходство с экспериментальными кривыми обнаруживает теоретическая кривая для $\mu = 0$.

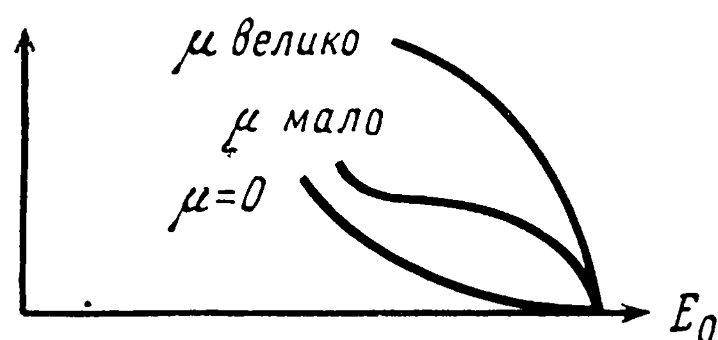


Рис. 1

Таким образом, мы приходим к выводу, что масса покоя нейтрино либо равна нулю, либо, во всяком случае, мала по сравнению с массой электрона [6]. В последующих расчетах будет принята простейшая гипотеза, согласно которой $\mu = 0$. В этом случае равенство (30) дает

$$v_\sigma = c, \qquad K_\sigma = p_\sigma c, \qquad p_\sigma = \frac{K_\sigma}{c} = \frac{W - H_s}{c}. \tag{37}$$

Неравенства (33), (34) теперь принимают вид

$$H_s \leqslant W, \qquad W \geqslant mc^2, \tag{38}$$

а вероятность перехода (32) приобретает такую форму:

$$P_s = \frac{8\pi^3 g^2}{c^3 h^4}\left|\int v_m^* u_n d\tau\right|^2 \tilde{\psi}_s \psi_s (W - H_s)^2. \tag{39}$$

8. Время жизни и форма спектра для «разрешенных» переходов

Из выражения (39) можно вывести формулу, дающую число β-переходов в единицу времени, при которых β-частица получает импульс в пределах от $mc\eta$ до $mc(\eta + d\eta)$. С этой целью нужно получить формулу для

[6] В недавно появившейся заметке Ф. Перрен (С. R., 1933, 197, 1625) на основании качественных соображений пришел к такому же выводу.

суммы $\tilde{\psi}_s\psi_s$ по всем квантовым состояниям рассматриваемого интервала, лежащим в непрерывном спектре; значения $\tilde{\psi}_s\psi_s$ берутся в точке, где находится ядро.

При этом следует иметь в виду, что в кулоновском поле релятивистские собственные функции состояний с $j = 1/2$ ($^2s_{1/2}$ и $^2p_{1/2}$) будут бесконечно велики при $r = 0$. Но притяжение электрона ядром подчиняется закону Кулона лишь до $r > \rho$, где ρ — радиус ядра. Приближенный расчет показывает, что при разумных предположениях относительно хода электрического поля внутри ядра значение $\tilde{\psi}_s\psi_s$ в центре ядра очень близко к тому, которое произведение $\tilde{\psi}_s\psi_s$ принимало бы в случае закона Кулона на расстоянии ρ от центра.

Тогда, с помощью известных формул [7] для релятивистских собственных функций непрерывного спектра находим, после довольно длинных вычислений, что в случае водородоподобного атома

$$\sum_{d\eta}\tilde{\psi}_s\psi_s = d\eta\cdot\frac{32\pi m^3c^3}{h^3[\Gamma(3+2S)]^2}\left(\frac{4\pi mc\rho}{h}\right)^{2S}\eta^{2+2S}\times$$

$$\times\, e^{\pi\gamma\frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta}}\left|\Gamma\left(1+S+i\gamma\frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta}\right)\right|^2, \qquad (40)$$

где

$$\gamma = Z/137, \qquad S = \sqrt{1-\gamma^2}-1. \qquad (41)$$

Вероятность перехода в электронное состояние с импульсом в интервале $mcd\eta$ будет тогда, согласно (39), равна:

$$P(\eta)\,d\eta = d\eta\cdot g^2\frac{256\pi^4}{[\Gamma(3+2S)]^2}\frac{m^5c^4}{h^7}\left(\frac{4\pi mc\rho}{h}\right)^{2S}\left|\int v_m^* u_n d\tau\right|^2\times$$

$$\times\,\eta^{2+2S}e^{\pi\gamma\frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta}}\cdot\left|\Gamma\left(1+S+i\gamma\frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta}\right)\right|^2\left(\sqrt{1+\eta_0^2}-\sqrt{1+\eta^2}\right)^2, \qquad (42)$$

где η_0 — максимальный импульс испущенных β-лучей в единицах mc.

Численно оценить выражение (42) целесообразно для $\gamma = 0{,}6$, т. е. для $Z = 82{,}2$, так как атомные номера радиоактивных веществ лежат недалеко от этого значения. При $\gamma = 0{,}6$ из равенства (41) получается $S = -0{,}2$. Далее находим, что при $\eta < 10$ справедлива следующая приближенная формула:

$$\eta^{1,6}e^{0,6\pi\frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta}}\left|\Gamma\left(0{,}8+0{,}6i\frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta}\right)\right|^2 \simeq 4{,}5\eta+1{,}6\eta^2. \qquad (43)$$

[7] R. H. Hulme. Proc. Roy. Soc., 1931, A 133, 381.

Тогда, если положить $\rho = 9\cdot 10^{-13}$, формула (42) принимает вид:

$$P(\eta)\,d\eta = 1{,}75\cdot 10^{95} g^2 \left|\int v_m^* u_n d\tau\right|^2 (\eta + 0{,}355\eta^2)\left(\sqrt{1+\eta_0^2} - \sqrt{1+\eta^2}\right)^2. \quad (44)$$

Величина, обратная времени жизни, получается из (44) при интегрировании от $\eta = 0$ до $\eta = \eta_0$:

$$\frac{1}{\tau} = 1{,}75\cdot 10^{95} g^2 \left|\int v_m^* u_n d\tau\right|^2 F(\eta_0), \quad (45)$$

где

$$F(\eta_0) = \frac{2}{3}\left(\sqrt{1+\eta_0^2} - 1\right) + \frac{\eta_0^4}{12} - \frac{\eta_0^2}{3} + $$
$$+ 0{,}355\left[\frac{\eta_0}{4} - \frac{\eta_0^3}{12} + \frac{\eta_0^5}{30} - \frac{\sqrt{1+\eta_0^2}}{4}\ln\left(\eta_0 + \sqrt{1+\eta_0^2}\right)\right]. \quad (46)$$

При малых значениях аргумента $F(\eta_0)$ ведет себя как $\eta_0^6/24$; значения функции F при больших аргументах приведены в табл. 1.

Таблица 1

η_0	0	1	2	3	4	5	6	7
$F(\eta_0)$	$\eta_0^6/24$	0,03	1,2	7,5	29	80	185	380

9. Запрещенные переходы

До того как перейти к сравнению теории с опытом, обсудим некоторые свойства запрещенных β-переходов.

Как уже говорилось, переход оказывается запрещенным, когда равен нулю соответствующий ему матричный элемент (35). Далее, если представление ядра индивидуальными квантовыми состояниями нейтронов и протонов является хорошим приближением, то в силу симметрии Q_{mn}^* всегда равно нулю, когда не выполняется равенство

$$i = i', \quad (47)$$

где i и i' — моменты количества движения (в единицах $h/2\pi$) нейтронного состояния u_n и протонного состояния v_m. В том случае, когда индивидуальные состояния не дают хорошего приближения, правилу отбора (47) отвечает более общее соотношение

$$I = I', \quad (48)$$

где I и I' — моменты количества движения ядра до и после β-распада.

Правила отбора (47) и (48) гораздо менее строги, чем правила отбора в оптике. По существу, имеется два процесса, из-за которых возможно нарушение этих правил.

а) Формула (26) получена без учета изменений ψ_s и φ_σ в пределах размеров ядра. Однако если ψ_s и φ_σ не считать постоянными внутри ядра, то возникает возможность β-переходов также и в случаях, когда Q^*_{mn} обращается в нуль.

Нетрудно понять, что по порядку величины отношение интенсивности таких переходов к интенсивности разрешенных процессов составляет $(\rho/\lambda)^2$, где λ — де-бройлевская длина волны легких частиц. Заметим, к тому же, что при одинаковых энергиях вследствие электростатического притяжения кинетическая энергия электрона, находящегося вблизи ядра, значительно больше кинетической энергии нейтрино; следовательно, наибольшее влияние обусловлено изменением ψ_s. Оценка интенсивности таких запрещенных процессов показывает, что она должна быть примерно в 100 раз меньше, чем в случае разрешенных равенством (48) переходов, соответствующих испусканию β-частиц той же самой энергии.

Характерную особенность запрещенных переходов подобного типа можно было бы усмотреть не только в относительно большом времени жизни, но также и в различной форме кривых спектрального распределения β-лучей: оказывается, например, что для таких переходов кривая распределения при малых энергиях должна дать меньшее число электронов, чем в нормальном случае.

б) Вторая возможность для запрещенных условием (48) переходов следует из того факта (упомянутого в конце § 3), что к выражению (12), описывающему взаимодействие, добавляются еще члены порядка v/c, если нельзя пренебречь скоростью тяжелых частиц по сравнению со скоростью света. В том случае, когда волновое уравнение дираковского типа принимается также и для тяжелых частиц, к выражению (12) можно было бы добавить, например,

$$gQ\,(\alpha_x A_1 + \alpha_y A_2 + \alpha_z A_3) + \text{компл. сопр.}, \tag{49}$$

где α_x, α_y, α_z — матрицы Дирака для тяжелой частицы, а A_1, A_2, A_3 — пространственные компоненты 4-вектора, определяемого соотношениями (11). Слагаемое (49) находилось бы при этом в таком же отношении к (12), как соответственно члены eV и $e\,(\alpha\cdot\mathbf{U})$ в гамильтониане Дирака (здесь V — скалярный потенциал; $\mathbf{U}$ — векторный потенциал).

Взаимодействие вида (49), очевидно, разрешило бы запрещенные переходы с относительной интенсивностью порядка $(v/c)^2$ по сравнению с интенсивностью разрешенных переходов. Таким образом, появляется вторая возможность для возникновения переходов, которые примерно в 100 раз слабее нормальных.

10. Сравнение с экспериментом

Формула (45) связывает максимальный импульс испускаемых β-лучей с временем жизни радиоактивного элемента, который их излучает. Правда, в эту формулу еще входит неизвестная величина, а именно, интеграл

$$\int v_m^* u_n d\tau, \qquad (50)$$

для оценки которого необходимо знать собственные функции протона и нейтрона в ядре. Однако в случае разрешенных переходов этот интеграл по порядку величины равен 1. Можно ожидать, следовательно, что произведение

$$\tau F(\eta_0) \qquad (51)$$

для всех разрешенных переходов будет одним и тем же по порядку величины. Если же рассматриваемый переход запрещен, то его время жизни оказывается примерно в 100 раз больше нормального, а произведение (51) также будет соответственно больше.

В табл. 2 собраны произведения (51) для тех радиоактивных элементов, для которых имеется достаточно данных о непрерывных β-спектрах.

Таблица 2

Элементы	τ, часы	η_0	$F(\eta_0)$	$\tau F(\eta_0)$
UX_2	0,026	5,4	115	3,0
RaB	0,64	2,04	1,34	0,9
ThB	15,3	1,37	0,176	2,7
ThC″	0,076	4,4	44	3,3
AcC″	0,115	3,6	17,6	2,0
RaC	0,47	7,07	398	190
RaE	173	3,23	10,5	1800
ThC	2,4	5,2	95	230
$MsTh_2$	8,8	6,13	73	640

Как и ожидалось, в таблице можно сразу же выделить две группы; между прочим, подобное деление уже провел эмпирическим путем Сарджент [8]. Значения η_0 взяты из этой его работы (для сравнения заметим, что $\eta_0 = (H\rho)_{\text{макс}}/1700$). Отмечаемые Сарджентом, как ненадежные, значения η_0 не очень хорошо согласуются с таким делением. Так, для UX_1: $\tau =$

[8] B. W. Sargent. Proc. Roy. Soc., 1933, A139, 659.

$= 830$, $\eta_0 = 0{,}76$, $F(\eta_0) = 0{,}0065$, $\tau F(\eta_0) = 5{,}4$; таким образом, этот элемент принадлежит, по-видимому, первой группе. Для AcB имеются следующие данные: $\tau = 0{,}87$, $\eta_0 = 1{,}24$, $F(\eta_0) = 0{,}102$, $\tau F(\eta_0) = 0{,}09$, т. е. величина τF примерно вдесятеро меньше, чем в первой группе. Для RaD $\tau = 320\,000$, $\eta_0 = 0{,}38$ (очень сомнительная цифра), $F(\eta_0) = 0{,}00011$, $\tau F(\eta_0) = 35$. Следовательно, RaD лежит примерно посредине между двумя группами. Я не нашел данных о других β-излучающих элементах: $MsTh_1$, UY, Ac, AcC, UZ, RaC″.

Из данных табл. 2 можно извлечь оценку константы g, правда, очень грубую. Если предположить, что в тех случаях, когда интеграл (50) равен 1, произведение $\tau F(\eta_0)$ равно одному часу (т. е. 3600 *сек*), то из формулы (45) получим

$$g = 4\cdot 10^{-50}\ см^3\cdot эрг.$$

Конечно, это значение дает лишь порядок величины g.

Резюмируя, можно сказать, что при таком сравнении теории с опытом обнаруживается согласие настолько хорошее, насколько этого можно лишь ожидать. Те отклонения, которые были обнаружены в случае сомнительных экспериментальных данных для элементов RaD и AcB, можно частично объяснить неточностью измерений, а частично также и несколько необычно большими, но вполне правдоподобными колебаниями значений матричного элемента (50). Нужно отметить, далее, что в большинстве случаев β-распад может приводить к различным конечным состояниям протона, как видно из того, что β-распад часто сопровождается γ-излучением; это также позволяет объяснить колебания величины $\tau F(\eta_0)$.

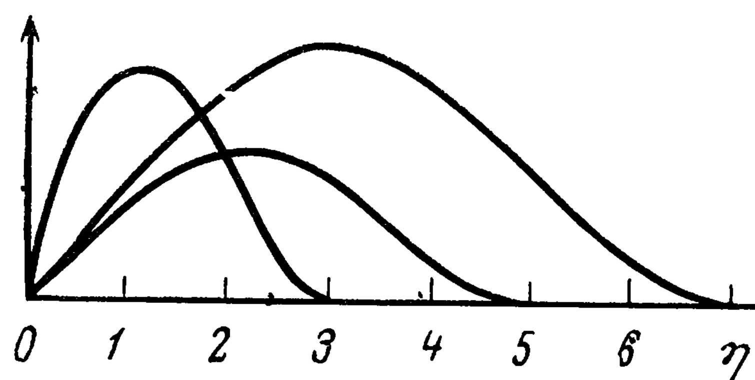


Рис. 2

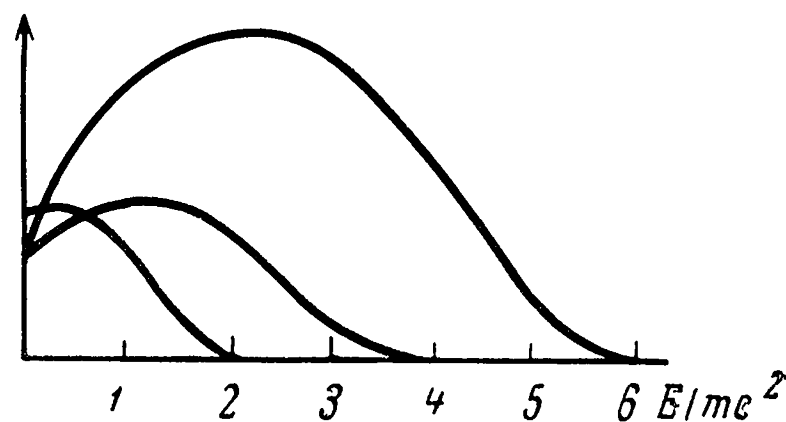


Рис. 3

Вернемся теперь к вопросу о форме кривой распределения по скоростям испущенных β-лучей. В случае разрешенных переходов такая кривая распределения в зависимости от η (т. е., без учета множителя 1700, от $H\rho$) дается выражением (44). Распределения для различных значений η_0 сравниваются на рис. 2, причем масштаб по оси ординат в каждом случае выбирался из соображений удобства. Эти кривые обнаруживают удовлетворительное сходство с теми экспериментальными распределениями,

которые собраны в работе Сарджента [9]. Только в области малых энергий кривые Сарджента лежат несколько ниже теоретических, что более отчетливо видно на рис. 3, где по оси абсцисс вместо импульса отложена энергия. (Здесь, однако, следует заметить, что при малых энергиях экспериментальные сведения о ходе распределений особенно ненадежны [10].) Впрочем, для запрещенных переходов нужно ожидать, что и теоретические кривые в области малых энергий будут лежать ниже кривых, приведенных на рис. 2 и 3. Это обстоятельство должно особо учитываться в случае кривой для RaE, которая экспериментально известна хорошо. Так, из табл. 2 видно, что RaE обладает очень большим значением $\tau F(\eta_0)$; таким образом, β-распад RaE наверняка запрещен и, по-видимому, происходит лишь во втором приближении. Я надеюсь, что в следующем сообщении смогу более определенно высказаться о ходе спектральных кривых в случае запрещенных переходов.

Резюмируя, вполне можно утверждать, что данная теория — в той форме, в какой она здесь представлена,— согласуется с экспериментальными данными, которые, правда, не всегда достаточно точны. Если же при дальнейшем сравнении теории с опытом возникнут противоречия, то всегда сохраняется возможность изменить теорию, не затрагивая ее наиболее общих положений. Можно было бы, например, сохранить уравнение (9), выбрав по-другому $c_{s\sigma}$. В частности, это могло бы привести к изменению правила отбора (48) и к другой форме кривой распределения по энергии, равно как и к другой зависимости времени жизни от максимальной энергии. Однако будет ли такое изменение необходимо, покажет прежде всего дальнейшее развитие теории, а также, возможно, уточнение экспериментальных данных.

---

[9] B. W. Sargent. Proc. Camb. Phil. Soc., 1932, 28, 538.
[10] См., например, E. Rutherford, B. Ellis, J. Chadwick. Radiations from Radioactive Substances, Cambridge, 1932.

К статье 59

Эта статья завершает серию работ, посвященных приложению статистического метода к рассмотрению свойств атома. В Институте несколько раз обсуждалась возможность проведения систематических вычислений собственных функций атомов. Действительно, из согласия между расчетами и экспериментом, отмечавшегося для целого ряда характеристик атомов и ионов, следовало, что было бы очень полезно осуществить такой проект. Ходили даже разговоры о составлении справочника — в форме числовых таблиц — по собственным функциям большого числа орбит многих элементов. Этот справочник шутливо называли «Thesaurus Ψ-arum». [«сокровищница Ψ-функций» (лат.) — *Прим. ред.*].

Статья 59 является первым шагом на пути к составлению такого справочника. Она является также и последним исследованием в этой области, так как открытие (зимой 1934 г.) искусственной радиоактивности при облучении нейтронами повлекло за собой изменение направления научной деятельности Института.

В статье содержатся числовые таблицы собственных функций орбит ∞s для 14 значений атомного номера Z от 10 до 92. Эти значения были выбраны таким образом, чтобы собственные функции s-термов для любого другого элемента с $Z \geqslant 10$ можно было найти интерполяцией.

В отличие от всех предыдущих статей Ферми, где применялось уравнение Шредингера, здесь были использованы релятивистские уравнения в дарвиновском приближении.

Э. Амальди

59

ОРБИТЫ ∞s ЭЛЕМЕНТОВ *

(Совместно с Э. Амальди)

Эта работа посвящена систематическим вычислениям всех собственных функций химических элементов по методу Томаса — Ферми. Выбранный здесь потенциал несколько отличается от примененного в предыдущих работах, а в трактовке проблемы используются релятивистские уравнения. Метод применяется к расчету собственных функций ∞s.

1. Согласно квантовой механике, свойства атома можно легко рассчитать количественно, если известны собственные функции и собственные значения квантовых состояний, в которых атом может находиться. В об-

* *Le orbite ∞ s degli elementi.* (Con E. Amaldi). Mem. Accad. d'Italia, 1934, 6 (1) (Fis.), 119—149. Представлена на заседании 18 мая 1934 г.

щем случае собственные функции сложным образом зависят от координат всех электронов. Однако можно получить эффективное и достаточное для многочисленных применений упрощение задачи, рассматривая индивидуальные собственные функции отдельных электронов, т. е. считая, что каждый из них находится независимо в некотором подходящем потенциале, который представляет действие ядра и других электронов. От этих индивидуальных собственных функций можно перейти к собственной функции квантового состояния атома, сформировав антисимметризованные произведения собственных функций индивидуальных квантовых состояний, которые участвуют в рассматриваемой конфигурации.

При таком подходе задача сводится к вычислению собственных функций и собственных значений отдельных электронов каждой разновидности атомов. Для ответа на поставленный вопрос необходимо найти решение уравнения Шредингера, в котором в явном виде появляется действующий на данный электрон потенциал, обусловленный действием ядра и всех других электронов атома.

Чтобы найти потенциал, можно оперировать различными приближениями: первая степень приближения соответствует статистическому методу Томаса — Ферми [1], в котором электроны рассматриваются как вырожденный газ, находящийся в равновесии под действием ядерного притяжения. Этот метод хотя и не очень точен, тем не менее очень прост, так как он позволяет представить поведение всех атомов с помощью только одной функции, рассчитываемой численно раз и навсегда.

Численным методом более высокой степени приближения является метод «самосогласованного поля» Хартри [2]. Однако в этом методе значительно более сложные вычисления не всегда приводят, по-видимому, к более высокой точности результатов. Еще более точным, чем метод Хартри, является предложенный Фоком [3] метод, в котором учитываются и резонансные эффекты; этот метод крайне сложен и поэтому до сих пор ни к одному атому не применялся.

Намереваясь в настоящей работе провести систематические численные вычисления собственных функций всех элементов, мы предпочли статистический метод из практических соображений, а также вследствие того, что во всяком случае он дает основу для дальнейших более точных численных расчетов.

С практической точки зрения метод представляет также следующее преимущество. Поскольку собственные функции электрона с определенными квантовыми числами регулярно зависят от атомного номера, то нет необходимости рассчитывать собственные функции ∞s всех атомов один за другим: будет достаточно только произвести вычисления для полутора десятков элементов (избранных должным образом в периодической системе),

---

[1] L. H. Thomas. Proc. Camb. Phil. Soc., 1927, 23, 542; E. Fermi. Rend. Lincei, 1927, 6, 602; 1928, 7, 342; Zs. f. Phys., 1928, 48, 73; 49, 550. (См. статьи 35 и 36).
[2] D. R. Hartree. Proc. Camb. Phil. Soc., 1928, 24, 89, 111.
[3] V. Fock. Zs. f. Phys., 1930, 61, 126.

выводя затем собственные функции ∞s всех других атомов путем интерполяции.

В настоящей работе описываются общие методы, позволяющие выполнять такие расчеты, и их применение к вычислению собственных функций ∞s. Вычисления были выполнены для элементов

Ne, Si, K, Fe, Ga, Rb, Mo, Ag, I, Ce, Ho, W, Hg, U;

собственные функции для других элементов можно получить интерполяцией.

По сравнению с расчетами собственных функций, выполненными ранее (также статистическим методом), здесь вводятся два усовершенствования: во-первых, изменен выбор потенциала, который определяется теперь таким образом, что радиус оказывается конечным также для нейтрального атома; во-вторых, в расчетах используются релятивистские уравнения вместо уравнения Шредингера, что особенно существенно для собственных функций s-состояний тяжелых элементов. Во втором разделе излагается метод расчета потенциала, действующего на рассматриваемый электрон; в третьем разделе рассмотрены релятивистские уравнения и показано, каким образом следует их преобразовать для удобного выполнения численных расчетов.

Затем даются общие таблицы, использованные для вычисления собственных функций ∞s; эти таблицы служат также для расчета других собственных функций.

После этого приводятся сами собственные функции ∞s.

Наконец, хотелось бы заметить, что знание собственных функций ∞s позволяет рассчитать довольно быстро и оптические собственные функции s, поскольку последние несущественно отличаются от функций ∞s в наиболее глубокой области атома, т. е. в той области, где численные расчеты как раз трудны и тяжелы.

2. Расчет потенциала. Все рассуждения, приводимые в этом разделе, относятся к общему случаю атома с атомным номером Z, ионизированного z раз.

Чтобы установить дифференциальные уравнения, определяющие потенциал в зависимости от расстояния до ядра, как и в предыдущих работах [4], мы исходим из соотношения, связывающего плотность электронного газа с потенциалом в предположении, что электроны можно трактовать как полностью вырожденный газ. Такое соотношение есть

$$n = \begin{cases} \dfrac{2^{9/2}\pi m^{3/2} e^{3/2}}{3h^3} (V+\alpha)^{3/2} & \text{при } V+\alpha > 0, \\ 0 & \text{при } V+\alpha < 0. \end{cases} \quad (1)$$

[4] E. Fermi. Цит. соч. (см. примечание 1).

Здесь α — аддитивная постоянная, определяемая из условия, что полное число электронов равно заданному, т. е.

$$\int n d\tau = Z - z,$$

где интеграл распространяется на всю область пространства, в которой $n \neq 0$.

Однако здесь следует учитывать, что потенциал, действующий на электрон, не совпадает точно с потенциалом, имеющимся в геометрической точке, удаленной от ядра на то же расстояние, что и электрон.

Действительно, первый потенциал соответствует действию ядра и $Z - z - 1$ электронов, в то время как второй соответствует действию ядра и всех $Z - z$ электронов.

Обозначим через V и V' два только что определенных потенциала. Имеем

$$V = \frac{Ze}{r} + U, \qquad V' = \frac{Ze}{r} + U',$$

где U и U' представляют действие соответственно $Z - z - 1$ и $Z - z$ электронов. В первом приближении предположим, что U и U' пропорциональны соответственно $Z - z - 1$ и $Z - z$, т. е.

$$U' = \frac{Z - z}{Z - z - 1} U.$$

Потенциал, обусловленный ядром и всеми электронами, есть V'; поэтому для него справедливо уравнение Пуассона

$$\Delta V = \Delta U' = 4\pi n e,$$

откуда

$$\Delta V = \Delta U = \frac{Z - z - 1}{Z - z} \Delta U' = \left(1 - \frac{1}{Z - z}\right) 4\pi n e.$$

Учитывая соотношение (1), постоянство α и полагая

$$v = V + \alpha,$$

находим

$$\Delta v = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{Z - z}\right) \dfrac{2^{13/2}\pi^2 m^{3/2} e^{5/2}}{3h^3} v^{3/2} & \text{при} \quad v > 0, \\ 0 & \text{при} \quad v < 0. \end{cases}$$

Поскольку v вследствие симметрии зависит только от r, предыдущее уравнение принимает вид:

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dv}{dr} = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{Z - z}\right) \dfrac{2^{13/2}\pi^2 m^{3/2} e^{3/2}}{3h^3} v^{3/2} & \text{при} \quad v > 0, \\ 0 & \text{при} \quad v < 0. \end{cases}$$

Постоянные интегрирования определяются из условий

$$\lim_{r=0} vr = Ze, \qquad \int\limits_0^{r_0} 4\pi r^2 n dr = Z - z,$$

где r_0 — расстояние, на котором v обращается в нуль, т. е. на котором кончается электронное облако, окружающее ядро.

Для упрощения предыдущих уравнений следует положить, аналогично сделанному в работе [5],

$$r = \mu x,$$

где

$$\mu = \frac{3^{2/3} h^2}{2^{13/3} \pi^{4/3} m e^2} \frac{(Z - z)^{2/3}}{Z^{1/3} (Z - z - 1)^{2/3}} = \left(\frac{9\pi^2}{128}\right)^{1/3} a \frac{(Z - z)^{2/3}}{Z^{1/3} (Z - z - 1)^{2/3}} \tag{2}$$

(a — радиус первой орбиты атома водорода), и

$$v = \frac{eZ}{\mu} \frac{\varphi(x)}{x}. \tag{3}$$

Тогда для функции $\varphi(x)$ найдем дифференциальное уравнение

$$\varphi'' = \frac{\varphi^{3/2}}{\sqrt{x}} \tag{4}$$

с граничными условиями

$$\varphi(0) = 1, \qquad \int\limits_0^{x_0} \varphi^{3/2} \sqrt{x}\, dx = 1 - \frac{z+1}{Z}, \tag{5}$$

где $x_0 = r_0/\mu$ и $\varphi(x_0) = 0$.

Последний интеграл можно взять, учитывая (4); находим

$$-x_0 \varphi'(x_0) = \frac{z+1}{Z}. \tag{6}$$

Проблема интегрирования уравнения (4) с указанными граничными условиями уже обсуждалась [6]; единственное отличие от прежней трактовки состоит в том, что вместо z теперь следует писать $z + 1$. В частности, найдем, что в пределах приближения, более чем достаточного для практических случаев, можно положить

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_0 - k\eta & \text{при } x > x_0, \\ -\dfrac{z+1}{Z} \dfrac{x - x_0}{x_0} & \text{при } x < x_0. \end{cases} \tag{7}$$

---

[5] E. Fermi. Leipziger Vorträge, 1928, 95. (Статья 37.)
[6] E. Fermi. Mem. Acc. d'Italia, 1930, 1, 149. (Статья 45.)

Таблицы функций φ_0 и η уже приводились ранее [7], но их значения даются для удобства и в настоящей работе; k — постоянная, значение которой зависит от $(z+1)/Z$ таким образом, чтобы соотношение (6) было удовлетворено. Эмпирическое выражение для этой постоянной, которое использовалось в вычислениях и представляет ее с достаточной точностью внутри интересующего нас интервала значений, может быть записано в виде

$$k = 0{,}083\left(\frac{z+1}{Z}\right)^3. \tag{8}$$

Значения x_0 также вычислялись для различных элементов и представлены в настоящей работе в отдельных таблицах.

Задаваемый выражением (3) потенциал v не обращается в нуль в бесконечности; поэтому следует добавить к нему постоянную, так чтобы он стремился к нулю при $x \to \infty$. Сразу видно, что значение такой постоянной будет

$$\frac{e}{\mu}\,\frac{z+1}{x_0}.$$

Поэтому в качестве окончательного выражения для потенциала мы примем

$$V = \frac{e}{\mu}\left[\frac{Z}{x}\varphi(x) + \frac{z+1}{x_0}\right]. \tag{9}$$

3. Решения релятивистских уравнений. В предыдущем разделе мы установили потенциал поля сил, в котором движется наш электрон. Теперь следует рассмотреть релятивистские уравнения квантовой механики. Ограничиваясь s-термами ($l = 0$), такие уравнения мы запишем в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2\pi}{h}\left(\frac{W-eV}{c} + 2mc\right)F + \frac{dG}{dr} = 0,\\ &-\frac{2\pi}{h}\,\frac{W-eV}{c}G + \frac{dF}{dr} + \frac{2}{r}F = 0,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где F и G — собственные функции, W — энергия и V — потенциал[8].

Собственные функции F и G связаны с четырьмя функциями Дирака соотношениями

$$\left.\begin{aligned} &\psi_1 = -iF\cos\theta, && \psi_1 = -iF\sin\theta e^{-i\varphi},\\ &\psi_2 = -iF\sin\theta e^{i\varphi}, && \psi_2 = iF\cos\theta,\\ &\psi_3 = G, && \psi_3 = 0,\\ &\psi_4 = 0, && \psi_4 = G.\end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

---

[7] E. Fermi. Falkenhagen, Quantentheorie und Chemie. Leipziger Vorträge, 1928, 95. (Статья 37); Mem. Acc. d'Italia, 1930, 1, 149. (Статья 45.)

[8] См., например: C. Darwin. Proc. Roy. Soc., 1928, A118, 654.

Два решения соответствуют двум ориентациям спина. В нерелятивистском случае единственная функция ψ Шредингера сводится к G. В частности, на таких расстояниях от ядра, где релятивистские поправки становятся пренебрежимыми, практически можно положить $\psi = G$. Подставляя в уравнения (1) вместо V выражение (9) из предыдущего раздела и

$$W = -\frac{e^2}{2a}\varepsilon,$$

получаем

$$\begin{gathered}\left[\frac{2}{\alpha}\frac{\mu}{a} - \frac{\alpha}{2}\frac{\mu}{a}\varepsilon + \alpha Z\left(\frac{\varphi}{x} \frac{1}{Zx_0}\right)\right]F + G' = 0,\\ \left[\frac{\alpha}{2}\frac{\mu}{a}\varepsilon - \alpha Z\left(\frac{\varphi}{x} + \frac{1}{Zx_0}\right)\right]G + F' + \frac{2}{x}F = 0.\end{gathered} \tag{2}$$

В этих уравнениях введена переменная $x = r/\mu$; α — постоянная тонкой структуры, численное значение которой равно 1/137,3.

Чтобы найти решения уравнений (2), следует трактовать их по-разному вблизи начала координат и на больших расстояниях от него. Поскольку функция $\varphi_0(x)$, через которую выражается статистический потенциал при $x \leqslant 0,3$, представляется с достаточно хорошим приближением для практических целей эмпирическим выражением

$$\varphi_0(x) = 1 - px + qx^2 = 1 - 1,304x + 1,288x^2, \tag{3}$$

попытаемся удовлетворить уравнения (2) в интервале между $x = 0$ и $x = 0,3$ с помощью разложения в ряд по степеням x. Для значений же $x > 0,3$ решения уравнений (2) будем искать с помощью метода Вентцеля — Бриллюэна.

Сразу же заметим, что такой метод хорошо подходит для выполнения численных расчетов, поскольку он заменяет нерегулярную функцию двумя функциями с регулярным поведением: амплитудой и фазой; интерполяцию следует проводить как раз между значениями этих последних функций.

Теперь удобно немного изменить форму записи уравнений (2). Положив

$$F = Z\alpha\mathcal{R},$$

где $\mathcal{R}$ — новая неизвестная функция, получим

$$\begin{gathered}\left[\frac{2\mu Z}{a} - \frac{\alpha^2}{2}\frac{\mu Z}{a}\varepsilon + \alpha^2 Z^2\left(\frac{\varphi}{x} + \frac{1}{Zx_0}\right)\right]\mathcal{R} + G' = 0,\\ \left[\frac{\mu}{2aZ}\varepsilon - \left(\frac{\varphi}{x} + \frac{1}{Zx_0}\right)\right]G + \mathcal{R}' + \frac{2}{x}\mathcal{R} = 0,\end{gathered} \tag{4}$$

откуда, вспоминая (3), имеем

$$\left[\frac{a}{2\mu Z}-\alpha^2Z^2\left\{\frac{\mu\varepsilon}{2\alpha Z}-\left(\frac{1}{x}-p+\frac{1}{Zx_0}+qx\right)\right\}\right]\mathcal{R}+G=0,$$
$$\left[\frac{\mu}{2a}\frac{\varepsilon}{Z}-\left(\frac{1}{x}-p+\frac{1}{Zx_0}+qx\right)\right]G+\mathcal{R}'+\frac{2}{x}\mathcal{R}=0. \quad (5)$$

Если для простоты положить

$$T=p-\frac{1}{Zx_0}+\frac{\mu\varepsilon}{2aZ},$$

получим

$$\mathcal{R}'+\frac{2}{x}\mathcal{R}-\left(\frac{1}{x}-T+qx\right)G=0,$$
$$G'+\left[\frac{2\mu Z}{a}+\alpha^2Z\left(\frac{1}{x}-T+qx\right)\right]\mathcal{R}=0. \quad (6)$$

Однако такие уравнения пока не подходят для отыскания решения в виде степенного ряда по x, поскольку G и $\mathcal{R}$ становятся бесконечными в начале координат. Чтобы устранить такую сингулярность, положим

$$G=x^{-\beta}u,\qquad \mathcal{R}=\frac{\beta}{\alpha^2Z^2}x^{-\beta}v. \quad (7)$$

Вводя эти выражения в уравнения (6) и полагая, что u и v регулярны для $x=0$, получаем для β уравнение второго порядка:

$$\beta(2-\beta)=\alpha^2Z^2.$$

Легко видеть, что из двух возможных значений β только одно является допустимым. Действительно, требуется, чтобы оно было меньше 3/2 с тем, чтобы G^2, которое в начале координат имеет то же самое поведение, что и $x^{-2\beta}$, было интегрируемым при $x=0$. Отсюда следует

$$\beta=1-\sqrt{1-\alpha^2Z^2}. \quad (8)$$

Итак, наконец, получаем искомые дифференциальные уравнения для двух новых неизвестных функций u и v:

$$-\frac{xv'}{2-\beta}-v+u-Txu+qx^2u=0,$$
$$-\beta u+xu'+\beta v+Lxv+\beta qx^2v=0. \quad (9)$$

Здесь для простоты положено

$$L=\frac{2\mu Z}{a(2-\beta)}-T\beta.$$

Далее, положим

$$u = 1 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots, \qquad v = 1 + v_1 x + v_2 x^2 + \ldots \tag{10}$$

и подставим эти разложения в уравнения (9); тогда получим формулы, позволяющие осуществить численный расчет коэффициентов:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(2-\beta)\beta}{n(2-2\beta+n)}[Tu_{n-1} - qu_{n-2}] + \frac{2-\beta+n}{n(2-2\beta+n)}[-Lv_{n-1} - \beta q v_{n-2}], \\ v_n &= \frac{(2-\beta)(n-\beta)}{n(2-2\beta+n)}[Tu_{n-1} - qu_{n-2}] + \frac{2-\beta}{n(2-2\beta+n)}[-Lv_{n-1} - \beta q v_{n-2}]. \end{aligned} \tag{11}$$

Для практических целей достаточно вычислить члены разложений в ряд (10) до 15-й степени по x.

Перейдем теперь к расчету решений уравнений (1) для $x > 0{,}3$. Если для простоты положить

$$g = -\frac{\mu^2}{a^2}\varepsilon + \frac{2\mu Z}{a}\left(\frac{\varphi}{x} + \frac{1}{Zx_0}\right), \tag{12}$$

то уравнения (4) можно записать в виде

$$\mathcal{R}' + \frac{2}{x}\mathcal{R} - \frac{a}{2\mu Z} gG = 0, \tag{13а}$$

$$G' + \mathcal{R}\left[\frac{2\mu Z}{a} + \frac{aZ}{2\mu}\alpha^2 g\right] = 0. \tag{13б}$$

Если мы ограничимся членами до α^2 включительно, то из уравнения (13б) получим

$$\mathcal{R} = -\frac{a}{2\mu Z} G'\left(1 - \frac{a^2\alpha^2}{4\mu^2} g\right);$$

подстановка этого выражения в (13а) дает

$$gG + \left(G'' + \frac{2}{x}G'\right)\left(1 - \frac{a^2\alpha^2}{4\mu^2} g\right) - \frac{a^2\alpha^2}{4\mu^2} g'G' = 0.$$

Если положить

$$xG = U, \tag{14}$$

так что

$$G' = \frac{U'}{x} - \frac{U}{x^2}, \qquad U'' = x\left(G'' + \frac{2}{x}G'\right),$$

то получим

$$gU + U''\left(1 - \frac{a^2\alpha^2}{4\mu^2} g\right) - \frac{a^2\alpha^2}{4\mu^2} g'\left(U' - \frac{U}{x}\right) = 0.$$

Ограничиваясь опять-таки членами до α^2 включительно, из предыдущего уравнения получаем

$$U'' + gU = \gamma^2\left\{g'U' - \frac{g'}{x}U - g^2 U\right\}, \tag{15}$$

где

$$\gamma^2 = \frac{a^2x^2}{4\mu^2}. \tag{16}$$

Теперь найдем решение уравнения (15) с помощью метода Вентцеля — Бриллюэна. Поскольку для собственных функций ∞s функция U имеет осциллирующее поведение для всех значений x, положим

$$U = e^{i\int Z dx}, \tag{17}$$

где Z — новая неизвестная функция. Как вещественная, так и мнимая части U являются решениями уравнения.

Из уравнения (15) с помощью (17) получаем уравнение

$$iZ' - Z^2 + g = \gamma^2\left\{igZ - \frac{g'}{x} + g^2\right\}. \tag{18}$$

Правая часть этого уравнения представляет релятивистскую поправку. Уравнение можно решить методом последовательных приближений; выполняя расчеты до четвертого приближения и принимая для U вещественное выражение

$$U = KR\sin\Theta, \tag{19}$$

получаем

$$R(x) = \frac{1 + \frac{g''}{16g^2} - \frac{5}{64}\frac{g'^2}{g^3} + \frac{\gamma^2}{2}g}{\sqrt[4]{g}}, \tag{20}$$

$$\Theta(x) = \Theta(0{,}3) + $$
$$+\left[\int\sqrt{g}\,dx - \frac{1}{32}\int\frac{g'^2}{g^{5/2}}dx - \frac{g'}{8g^{3/2}} + \frac{\gamma^2}{2}\left(\int\frac{g'dx}{x\sqrt{g}} + \int g^{3/2}dx\right)\right]_{0{,}3}^{x}. \tag{21}$$

Здесь K и Θ (0,3) — постоянные, которые следует определить таким образом, чтобы при $x = 0{,}3$ функция $U(x)$ и ее производная непрерывно сшивались с функцией $u(x)\,x^{1-\beta}$, определенной разложением в ряд, справедливым для $x < 0{,}3$. Из соотношения (19) получим

$$K\sin\Theta = \frac{U}{R}, \qquad K\cos\Theta = \frac{1}{R\Theta'}\left\{U' - U\frac{d\ln R}{dx}\right\}. \tag{22}$$

С помощью (20) и (21) можно вычислить Θ', R и $\frac{d\ln R}{dx}$ при $x = 0{,}3$, а полученные таким образом значения можно подставить в предыдущие уравнения.

В случае собственных фукций ∞s собственное значение равно нулю, и поэтому, принимая во внимание точность, с которой выполнялись расчеты

в настоящей работе, выражения (20) и (21) можно записать с достаточным приближением в виде

$$R = A^{-1/4}\left(\frac{x}{\varphi_0}\right)^{1/4}\left\{1 + \frac{1}{A}\left[\frac{1}{16}\left(\frac{x}{\varphi_0}\right)^{1/2} + \frac{3}{64}\frac{1}{x\varphi_0} - \frac{5}{64}\frac{x\varphi_0'^2}{\varphi_0^3} + \frac{1}{32}\frac{\varphi_0'}{\varphi_0^2}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\gamma^2 A}{2}\frac{\varphi_0}{x}\right\}, \qquad (23)$$

$$\Theta(x) = \Theta(0,3) + A^{1/2}\left\{\int_{0,3}^{x}\left(\frac{\varphi_0}{x}\right)^{1/2}dx - \frac{k}{2}\int_{0,3}^{x}\frac{\eta}{(x\varphi_0)^{1/2}}dx + \frac{1}{2Zx_0}\int_{0,3}^{x}\left(\frac{x}{\varphi_0}\right)^{1/2}dx\right\} -$$
$$- A^{-1/2}\left\{\frac{1}{32}\left[\int_{0,3}^{x}\frac{x^{1/2}\varphi_0'^2}{\varphi_0^{5/2}}dx + \int_{0,3}^{x}\frac{dx}{\varphi_0^{1/2}x^{3/2}} - 2\int_{0,3}^{x}\frac{\varphi_0'}{x^{1/2}\varphi_0^{3/2}}dx\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{8}\left(\frac{x^{1/2}\varphi_0'}{\varphi_0^{3/2}} - \frac{1}{(x\varphi_0)^{1/2}}\right)_{0,3}^{x}\right\} + \frac{\gamma^2}{2}\left\{A^{1/2}\left[\int_{0,3}^{x}\frac{\varphi_0'}{x^{3/2}\varphi_0^{1/2}}dx - \int_{0,3}^{x}\frac{\varphi_0^{1/2}}{x^{5/2}}dx\right] + \right.$$
$$\left. + A^{3/2}\int_{0,3}^{x}\left(\frac{\varphi_0}{x}\right)^{3/2}dx\right\}. \qquad (24)$$

В этих выражениях константа A зависит от атомного номера и равна

$$A = 2Z\frac{\mu}{a}.$$

Выражения (23), (24), естественно, можно использовать только до некоторого расстояния от границы атома, а именно до тех пор, пока η мало по сравнению с φ_0; вблизи границы атома собственные функции ∞s можно рассчитать с помощью формул (20) и (21) (для каждого элемента в отдельности). Опять-таки в случае собственной функции ∞s допустимо положить при $x \leqslant 0{,}3$

$$g = A\frac{\varphi_0}{x},$$

поскольку вблизи начала координат функцией η вполне можно пренебречь. При учете такого упрощения окончательные формулы для расчета R, Θ' и $\frac{d\ln R}{dx}$ при $x = 0{,}3$ имеют вид

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{0{,}804}{\sqrt[4]{A}}\left\{1 + \frac{0{,}190}{A} + 1{,}20\gamma^2 A\right\}, \\ \Theta' &= 1{,}55\sqrt{A} - \frac{0{,}588}{\sqrt{A}} + \frac{\gamma}{2}(3{,}73A^{3/2} - 2{,}60A^{1/2}), \\ \frac{d\ln R}{dx} &= 1{,}063 - \frac{0{,}519}{A} - 5{,}11\gamma^2 A. \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Значения K и Θ (0,3), вычисленные из этих выражений и из (22), представлены в отдельных таблицах для различных элементов.

В табл. I даны значения функций φ_0 и η, а также некоторые эмпирические формулы, служившие для вычисления потенциала различных атомов. В табл. II и III мы приводим численные значения выражений для вычисления функций R и Θ (эти выражения, как мы уже говорили, являются справедливыми только до некоторого расстояния от границы атома).

Далее следуют таблицы собственных функций ∞s для отдельных элементов; кроме численных значений некоторых констант (например, атомный радиус x_0 и меры длины μ/a) в каждой из них приведены коэффициенты разложений u и v, служащие для расчета собственных функций до $x = 0{,}3$, а также значения R, Θ и U от 0,3 до границы атома.

За пределами атома собственные функции ∞s сводятся просто к

$$U = B\sqrt[4]{x}\sin\left(C\sqrt{x} + D\right), \tag{26}$$

где B и D — две постоянные, которые следует определить таким образом, чтобы выражение (26) и его производная совпадали с U и ее производной при $x = x_0$, а C равнялось $2\sqrt{\frac{2\mu}{a}}$. В каждой таблице поэтому мы даем и значения констант B, C, D.

Мы выражаем благодарность А. Бьява, Ф. Колаери, В. Крокко, Дж. Джовене, Э. Меди, Р. Нуцо за помощь при выполнении численных расчетов.

Таблица I

$$\varphi = \varphi_0 - k\eta, \quad k = 0{,}083\left(\frac{z+1}{Z}\right)^3; \quad \text{для } x \leqslant 0{,}3: \quad \varphi_0 = 1 - 1{,}304\,x + 1{,}288\,x^2$$

x	φ_0	$\eta \cdot 10^{-4}$	x	φ_0	$\eta \cdot 10^{-4}$	x	φ_0	$\eta \cdot 10^{-4}$
0,3	0,721	—	2,5	0,194	0,001	16	0,0093	0,0942
0,4	0,660	—	3,0	0,157	0,001	18	0,0072	0,142
0,5	0,607	—	3,5	0,130	0,001	20	0,0056	0,208
0,6	0,562	—	4,0	0,108	0,002	22	0,0045	0,294
0,7	0,521	—	4,5	0,093	0,002	24	0,0037	0,405
0,8	0,485	—	5	0,079	0,003	26	0,0031	0,545
0,9	0,453	—	6	0,059	0,005	28	0,0026	0,721
1,0	0,425	—	7	0,046	0,0070	30	0,0022	0,941
1,1	0,375	—	8	0,037	0,0103	32	0,0019	1,20
1,4	0,333	—	9	0,029	0,0146	34	0,0017	1,51
1,6	0,297	—	10	0,024	0,0201	36	0,0015	1,88
1,8	0,268	—	12	0,017	0,0359			
2,0	0,244	—	14	0,012	0,0598			

Таблица II

x	$\left(\frac{x}{\varphi}\right)^{1/4}$	Q	$\frac{\varphi_0}{x}$	x	$\left(\frac{x}{\varphi}\right)^{1/4}$	Q	$\frac{\varphi_0}{x}$
0,3	0,803	0,19	2,40	6	3,175	0,07	0,00980
0,4	0,882	0,15	1,65	7	3,510	0,07	0,00658
0,5	0,953	0,13	1,21	8	3,846	0,07	0,00458
0,6	1,016	0,11	0,937	9	4,174	0,08	0,00329
0,7	1,076	0,10	0,744	10	4,509	0,09	0,00242
0,8	1,133	0,09	0,606	12	5,178	0,10	0,00139
0,9	1,187	0,08	0,503	14	5,872	0,11	0,00840
1,0	1,238	0,08	0,425	16	6,441	0,12	0,00580
1,2	1,338	0,07	0,312	18	7,071	0,14	0,00040
1,4	1,432	0,07	0,238	20	7,738	0,16	0,00028
1,6	1,523	0,06	0,186	22	8,362	0,18	0,00020
1,8	1,609	0,06	0,149	24	8,980	0,20	0,00015
2,0	1,693	0,06	0,122	26	9,578	0,22	0,00012
2,5	1,893	0,06	0,0776	28	10,15	0,24	0,000093
3,0	2,090	0,06	0,0524	30	10,85	0,27	0,000073
3,5	2,276	0,06	0,0371	32	11,40	0,29	0,000059
4,0	2,469	0,06	0,0270	34	11,86	0,32	0,000050
4,5	2,635	0,06	0,0206				
5,0	2,817	0,06	0,0158				

$$R = A^{-1/4}\left(\frac{x}{\varphi}\right)^{1/4}\left\{1 + \frac{1}{A}\left[\frac{1}{16}\left(\frac{x}{\varphi}\right)^{1/2} + \frac{3}{64}\frac{1}{x\varphi} - \frac{5}{64}\frac{x\varphi'^2}{\varphi^3} + \frac{1}{32}\frac{\varphi'}{\varphi^2}\right] + \frac{\gamma^2}{2}A\frac{\varphi}{x}\right\} =$$

$$= A^{-1/4}\left(\frac{x}{\varphi}\right)^{1/4}\left\{1 + \frac{1}{A}Q + \frac{\gamma^2}{x}A\frac{\varphi}{x}\right\}, \quad A = 2Z\mu/a$$

Таблица III

x	$\int\limits_{0,3}^{x} \left(\frac{\varphi_0}{x}\right)^{1/2} dx$	$\int\limits_{0,3}^{x} \frac{\eta\cdot 10^{-4}}{(x\varphi_0)^{1/2}} dx$	$\int\limits_{0,3}^{x} \left(\frac{x}{\varphi_0}\right)^{1/2} dx$	Ω	$\int\limits_{0,3}^{x} \frac{\varphi_0'}{x^{3/2}\varphi_0^{1/2}} dx - \int\limits_{0,3}^{x} \frac{\varphi_0^{1/2}}{x^{5/2}} dx$	$\int\limits_{0,3}^{x} \left(\frac{\varphi_0}{x}\right)^{3/2} dx$
0,3	0,000	0,000	0,0000	0,00	—0,000	0,000
0,4	0,141	0,000	0,0712	0,05	—1,552	0,282
0,5	0,260	0,000	0,156	0,08	—2,377	0,452
0,6	0,363	0,000	0,253	0,11	—2,863	0,562
0,7	0,454	0,000	0,362	0,12	—3,195	0,639
0,8	0,563	0,000	0,484	0,14	—3,412	0,693
0,9	0,611	0,000	0,619	0,15	—3,584	0,735
1,0	0,678	0,000	0,766	0,17	—3,701	0,766
1,2	0,799	0,000	1,098	0,18	—3,872	0,811
1,4	0,904	0,000	1,482	0,20	—3,981	0,839
1,6	0,995	0,000	1,919	0,21	—4,056	0,859
1,8	1,077	0,000	2,410	0,22	—4,109	0,872
2,0	1,150	0,000	2,956	0,23	—4,152	0,882
2,5	1,306	0,000	4,565	0,25	—4,217	0,898
3,0	1,432	0,001	6,551	0,27	—4,251	0,906
3,5	1,538	0,001	8,937	0,28	—4,276	0,911
4,0	1,627	0,003	11,749	0,29	—4,289	0,913
4,5	1,703	0,004	15,023	0,30	—4,299	0,915
5,0	1,771	0,006	18,727	0,31	—4,306	0,916
6	1,883	0,012	27,728	0,32	—4,316	0,918
7	1,972	0,022	38,919	0,33	—4,321	0,919
8	2,047	0,037	52,440	0,34	—4,325	0,919
9	2,109	0,061	68,555	0,35	—4,327	0,919
10	2,162	0,095	87,385	0,35	—4,329	0,919
12	2,248	0,211	134,322	0,35	—4,331	0,919
14	2,313	0,434	195,416	0,35	—4,331	0,919
16	2,366	0,819	271,812	0,36	—4,331	0,919
18	2,410	1,446	362,388	0,36	—4,331	0,919
20	2,447	2,447	472,728	0,36	—4,332	0,919
22	2,478	3,989	602,022	0,36	—4,332	0,919
24	2,504	6,247	752,892	0,36	—4,332	0,919
26	2,528	9,516	924,858	0,36	—4,332	0,919
28	2,548	14,057	1120,032	0,36	—4,332	0,919
30	2,566	20,356	1339,366	0,36	—4,332	0,919
32	2,582	28,867	1589,066	0,36	—4,332	0,919
34	2,597	40,136	1858,014	0,36	—4,332	0,919

$$\Theta = \Theta(0{,}3) + A^{1/2}\left\{\int\limits_{0,3}^{x}\left(\frac{\varphi_0}{x}\right)^{1/2} dx - \frac{k}{2}\int\limits_{0,3}^{x}\frac{\eta}{(x\varphi_0)^{1/2}}\,dx + \frac{1}{2Zx_0}\int\limits_{0,3}^{x}\left(\frac{x}{\varphi_0}\right)^{1/2} dx\right\} -$$

$$- A^{-1/2}\Omega + \frac{\gamma^2}{2}\left\{A^{1/2}\left[\int\limits_{0,3}^{x}\frac{\varphi_0'}{x^{3/2}\varphi_0^{1/2}}\,dx - \int\limits_{0,3}^{x}\frac{\varphi_0^{1/2}}{x^{5/2}}\,dx\right] + A^{3/2}\int\limits_{0,3}^{x}\left(\frac{\varphi_0}{x}\right)^{3/2} dx\right\},$$

где

$$\Omega = \frac{1}{32}\left[\int\limits_{0,3}^{x}\frac{x^{1/2}\varphi_0'^2}{\varphi_0^{5/2}}\,dx + \int\limits_{0,3}^{x}\frac{dx}{\varphi_0^{1/2}x^{3/2}}\,dx - \int\limits_{0,3}^{x}\frac{\varphi_0'}{x^{1/2}\varphi_0^{3/2}}\,dx\right] + \frac{1}{8}\left(\frac{x^{1/2}\varphi_0'}{\varphi_0^{3/2}} - \frac{1}{(x\varphi_0)^{1/2}}\right)_{0,3}^{x},$$

$A = 2Z\mu/a.$

$Z = 10$; Ne

$x_0 = 10,8$; $k = 8,300 \cdot 10^{-5}$; $\frac{\mu}{a} = 0,449$; $\beta = 0,002656$;

$K = 0,1902$; $B = 0,197$; $C = 1,88$; $D = 3,71$; $\alpha_s = 1,68$.

v_0	1,00000	v_7	−7,023	u_0	1,00000	u_7	−6,107
v_1	−3,80341	v_8	4,59	u_1	−4,41286	u_8	3,87
v_2	7,68997	v_9	−2,75	u_2	8,38845	u_9	−2,25
v_3	−11,13019	v_{10}	1,5	u_3	−11,30318	u_{10}	1,2
v_4	12,5582	v_{11}	−0,8	u_4	12,2680	u_{11}	−0,6
v_5	−11,8498	v_{12}	0,4	u_5	−11,0713	u_{12}	0,3
v_6	9,700			u_6	8,705		

x	R	Θ	U	x	R	Θ	U
0,3	0,476	2,40	+0,0613	2,0	0,971	5,81	−0,084
0,4	0,521	2,80	+0,0331	2,5	1,08	6,30	+0,004
0,5	0,561	3,15	−0,0057	3,0	1,18	6,70	+0,092
0,6	0,597	3,45	−0,0338	3,5	1,26	7,04	+0,165
0,7	0,632	3,71	−0,0643	4,0	1,34	7,34	+0,222
0,8	0,661	3,95	−0,0909	4,5	1,41	7,61	+0,260
0,9	0,691	4,17	−0,115	5	1,47	7,85	+0,279
1,0	0,720	4,38	−0,129	6	1,59	8,28	+0,274
1,2	0,779	4,75	−0,148	7	1,68	8,66	+0,220
1,4	0,831	5,06	−0,148	8	1,75	9,01	+0,133
1,6	0,885	5,34	−0,136	9	1,81	9,34	+0,028
1,8	0,931	5,58	−0,114	10	1,85	9,64	−0,077

$Z = 14$; Si

$$x_0 = 13{,}0;\quad k = 3{,}025\cdot 10^{-5};\quad \frac{\mu}{a} = 0{,}3859;\quad \beta = 0{,}005238;$$

$$K = 0{,}1726;\quad B = 0{,}185;\quad C = 1{,}76;\quad D = 4{,}84;\quad \alpha_s = 2{,}04.$$

v_0	1,00000	v_7	—15,116	u_0	1,00000	u_7	—14,731
v_1	— 4,47174	v_8	10,78	u_1	— 5,41506	u_8	10,21
v_2	10,19540	v_9	— 7,02	u_2	12,09815	u_9	— 6,47
v_3	—16,39938	v_{10}	4,2	u_3	—18,37971	u_{10}	3,8
v_4	20,5019	v_{11}	— 2,3	u_4	22,1655	u_{11}	— 2,1
v_5	—21,2791	v_{12}	1,2	u_5	—22,1621	u_{12}	1,1
v_6	19,085	v_{13}	— 1	u_6	19,164	u_{13}	0

x	R	Θ	U	x	R	Θ	U
0,3	0,451	2,72	+0,0317	2,5	1,04	6,99	+0,117
0,4	0,494	3,17	—0,0025	3,0	1,14	7,42	+0,179
0,5	0,532	3,55	—0,0369	3,5	1,23	7,79	+0,212
0,6	0,566	3,89	—0,0660	4,0	1,31	8,10	+0,218
0,7	0,599	4,18	—0,0392	4,5	1,39	8,38	+0,206
0,8	0,630	4,45	—0,105	5,0	1,46	8,63	+0,180
0,9	0,660	4,69	—0,114	6	1,58	9,07	+0,093
1,0	0,688	4,91	—0,116	7	1,69	9,45	—0,009
1,2	0,743	5,31	—0,106	8	1,75	9,79	—0,109
1,4	0,795	5,65	—0,082	9	1,83	10,11	—0,201
1,6	0,845	5,95	—0,048	10	1,91	10,40	—0,274
1,8	0,892	6,22	—0,010	12	2,00	10,93	—0,345
2,0	0,939	6,46	+0,029				

$Z = 19$; K

$x_0 = 15,4$; $k = 1,210 \cdot 10^{-5}$; $\frac{\mu}{a} = 0,3440$; $\beta = 0,009620$;
$K = 0,1580$; $B = 0,175$; $C = 1,66$; $D = 6,06$; $\alpha_s = 2,46$.

v_0	1,00000	v_8	24,69	u_0	1,00000	u_8	26,05
v_1	— 5,23710	v_9	—17,44	u_1	— 6,56779	u_9	—17,94
v_2	13,47003	v_{10}	11,3	u_2	17,17568	u_{10}	11,4
v_3	—24,02038	v_{11}	— 6,8	u_3	—29,42806	u_{11}	— 6,7
v_4	33,1374	v_{12}	4	u_4	39,3365	u_{12}	4
v_5	—37,7148	v_{13}	— 2	u_5	—43,3937	u_{13}	— 2
v_6	36,926	v_{14}	1	u_6	41,140	u_{14}	1
v_7	—31,861			u_7	— 34,515		

x	R	Θ	U	x	R	Θ	U
0,3	0,429	3,06	+0,0056	2,5	0,985	7,73	+0,153
0,4	0,470	3,56	—0,0299	3,0	1,08	8,21	+0,160
0,5	0,507	3,98	—0,0595	3,5	1,17	8,60	+0,136
0,6	0,539	4,35	—0,0795	4,0	1,26	8,94	+0,090
0,7	0,570	4,67	—0,0901	4,5	1,34	9,23	+0,040
0,8	0,600	4,96	—0,0919	5,0	1,41	9,51	—0,020
0,9	0,628	5,23	—0,0861	6	1,55	9,87	—0,126
1,0	0,655	5,47	—0,0752	7	1,67	10,35	—0,212
1,2	0,708	5,91	—0,0410	8	1,77	10,69	—0,267
1,4	0,754	6,28	0,0000	9	1,87	10,99	—0,296
1,6	0,801	6,62	+0,0421	10	1,94	11,27	—0,294
1,8	0,843	6,92	+0,0800	12	2,04	11,79	—0,225
2,0	0,885	7,18	+0,110	14	2,14	12,25	—0,103

Z = 26; Fe

$x_0 = 18,2$; $k = 4,722 \cdot 10^{-6}$; $\frac{\mu}{a} = 0,3068$; $\beta = 0,01809$;

$K = 0,1451$; $B = 0,166$; $C = 1,57$; $D = 7,43$; $\alpha_s = 2,86$.

v_0	1,00000	v_8	60,85	u_0	1,00000	u_8	71,88
v_1	— 6,22180	v_9	— 46,85	u_1	— 8,05918	u_9	— 54,09
v_2	18,31498	v_{10}	33,2	u_2	25,01708	u_{10}	37,5
v_3	— 36,59013	v_{11}	— 21,8	u_3	— 49,02616	u_{11}	— 24,1
v_4	56,1379	v_{12}	13,3	u_4	73,3901	u_{12}	14,5
v_5	— 70,5984	v_{13}	— 7,7	u_5	— 90,0127	u_{13}	— 8,2
v_6	75,977	v_{14}	4	u_6	94,277	u_{14}	4
v_7	— 71,843	v_{15}	— 2	u_7	— 86,914	u_{15}	— 2

x	R	Θ	U	x	R	Θ	U
0,3	0,408	3,46	+0,0186	3,0	1,04	9,14	+0,042
0,4	0,446	4,01	—0,0496	3,5	1,13	9,58	—0,026
0,5	0,481	4,48	—0,0680	4,0	1,21	9,94	—0,087
0,6	0,512	4,88	—0,0732	4,5	1,29	10,27	—0,141
0,7	0,542	5,25	—0,0677	5	1,32	10,54	—0,172
0,8	0,570	5,57	—0,0540	6	1,49	11,02	—0,216
0,9	0,597	5,87	—0,0348	7	1,64	11,43	—0,216
1,0	0,623	6,13	—0,0137	8	1,74	11,78	—0,178
1,2	0,673	6,61	+0,0318	9	1,86	12,08	—0,125
1,4	0,720	7,03	+0,0710	10	1,95	12,36	—0,056
1,6	0,765	7,39	+0,0994	12	2,10	12,85	+0,087
1,8	0,808	7,72	+0,116	14	2,20	13,29	+0,214
2,0	0,850	8,01	+0,122	16	2,26	13,70	+0,298
2,5	0,951	8,63	+0,098	18	2,36	14,08	+0,342

Z = 31; Ga

$x_0 = 19,9$; $k = 2,786 \cdot 10^{-6}$; $\frac{\mu}{a} = 0,2881$; $\beta = 0,02582$;

$K = 0,1394$; $B = 0,161$; $C = 1,52$; $D = 8,24$; $\alpha_s = 3,12$.

v_0	1,00000	v_8	103,35	u_0	1,000000	u_8	130,21
v_1	— 6,88517	v_9	— 83,66	u_1	— 9,07047	u_9	— 103,14
v_2	21,97258	v_{10}	62,2	u_2	31,13193	u_{10}	75,1
v_3	— 46,96643	v_{11}	— 42,8	u_3	— 66,10849	u_{11}	— 50,7
v_4	76,6782	v_{12}	27,5	u_4	105,8425	u_{12}	32,0
v_5	— 102,2175	v_{13}	— 17	u_5	— 138,1137	u_{13}	— 19
v_6	— 116,237	v_{14}	9	u_6	153,302	u_{14}	11
v_7	— 115,906	v_{15}	— 5	u_7	— 149,318	u_{15}	— 6

x	R	Θ	U	x	R	Θ	U
0,3	0,396	3,71	—0,0298	3,5	1,09	10,18	—0,105
0,4	0,434	4,30	—0,0555	4,0	1,18	10,51	—0,146
0,5	0,468	4,79	—0,0650	4,5	1,26	10,90	—0,175
0,6	0,498	5,22	—0,0605	5	1,34	11,15	—0,184
0,7	0,527	5,60	—0,0460	6	1,48	11,65	—0,163
0,8	0,554	5,95	—0,0252	7	1,62	12,07	—0,106
0,9	0,580	6,26	—0,0015	8	1,73	12,42	—0,034
1,0	0,605	6,54	+0,0218	9	1,84	12,74	+0,046
1,2	0,654	7,05	+0,0634	10	1,95	13,02	+0,120
1,4	0,699	7,49	+0,0913	12	2,10	13,50	+0,236
1,6	0,744	7,88	+0,104	14	2,21	13,94	+0,303
1,8	0,785	8,22	+0,102	16	2,31	14,33	+0,315
2,0	0,826	8,53	0,090	18	2,38	14,70	+0,279
2,5	0,924	9,19	+0,030	20	2,44	15,04	+0,210
3,0	1,02	9,72	—0,042				

$Z = 37$; Rb

$x_0 = 21,8$; $k = 1,639 \cdot 10^{-6}$; $\frac{\mu}{a} = 2,2706$; $\beta = 0,3699$;

$K = 0,1345$; $B = 0,157$; $C = 1,47$; $D = 9,26$; $\alpha_s = 3,45$.

v_0	1,00000	v_8	179,44	u_0	1,00000	u_8	241,45
v_1	— 7,65289	v_9	— 152,89	u_1	— 10,24861	u_9	— 201,60
v_2	26,59775	v_{10}	119,5	u_2	39,05686	u_{10}	154,5
v_3	— 61,04338	v_{11}	— 86,4	u_3	— 90,25280	u_{11}	— 109,7
v_4	106,3173	v_{12}	58,3	u_4	155,0727	u_{12}	72,7
v_5	— 150,5607	v_{13}	— 37	u_5	— 215,7854	u_{13}	— 45
v_6	181,248	v_{14}	22	u_6	254,380	u_{14}	27
v_7	— 190,889	v_{15}	— 12	u_7	— 262,235	u_{15}	— 15

x	R	Θ	U	x	R	Θ	U
0,3	0,385	3,99	—0,0388	3,5	1,08	10,84	—0,143
0,4	0,421	4,61	—0,0564	4,0	1,17	11,24	—0,153
0,5	0,454	5,13	—0,0557	4,5	1,24	11,59	—0,138
0,6	0,484	5,59	—0,0415	5	1,32	11,90	—0,109
0,7	0,512	6,00	—0,0194	6	1,46	12,42	—0,027
0,8	0,539	6,36	+0,0056	7	1,59	12,85	+0,062
0,9	0,564	6,69	+0,0304	8	1,70	13,22	+0,141
1,0	0,588	6,99	+0,0514	9	1,83	13,54	+0,201
1,2	0,637	7,53	+0,0810	10	1,92	13,82	+0,246
1,4	0,680	8,00	+0,0905	12	2,10	14,31	+0,278
1,6	0,722	8,40	+0,0828	14	2,23	14,74	+0,246
1,8	0,763	8,77	+0,0628	16	2,31	15,14	+0,165
2,0	0,803	9,09	+0,0348	18	2,39	15,49	+0,067
2,5	0,898	9,79	—0,0437	20	2,46	15,83	—0,043
3,0	0,991	10,36	—0,107	22	2,52	16,15	—0,147

$Z = 42$; Mo

$x_0 = 23,2$; $k = 1,120 \cdot 10^{-6}$; $\frac{\mu}{a} = 0,2588$; $\beta = 0,04793$;

$K = 0,1322$; $B = 0,156$; $C = 1,44$; $D = 9,98$; $\alpha_8 = 3,68$.

v_0	1,00000	v_8	269,87	u_0	1,00000	u_8	381,09
v_1	— 8,27771	v_9	— 238,74	u_1	— 11,21535	u_9	— 330,67
v_2	30,66223	v_{10}	— 193,5	u_2	46,17681	u_{10}	263,1
v_3	— 74,21031	v_{11}	— 145,1	u_3	— 113,64649	u_{11}	— 193,7
v_4	135,5737	v_{12}	101,3	u_4	205,8257	u_{12}	133,0
v_5	— 200,7285	v_{13}	— 66	u_5	— 300,3176	u_{13}	— 86
v_6	251,969	v_{14}	41	u_6	370,041	u_{14}	52
v_7	— 276,207	v_{15}	— 24	u_7	— 397,697	u_{15}	— 30

x	R	Θ	U	x	R	Θ	U
0,3	0,377	4,20	—0,0436	3,5	1,06	11,34	—0,131
0,4	0,413	4,85	—0,0540	4,0	1,15	11,76	—0,109
0,5	0,445	5,40	—0,453	4,5	1,22	12,12	—0,069
0,6	0,474	5,88	—0,0247	5	1,2	12,44	—0,021
0,7	0,501	6,30	+0,0014	6	1,44	12,99	+0,079
0,8	0,528	6,68	+0,0269	7	1,54	13,43	+0,156
0,9	0,552	7,03	+0,0495	8	1,69	13,80	+0,212
1,0	0,576	7,34	+0,0662	9	1,81	14,13	+0,239
1,2	0,622	7,90	+0,0821	10	1,92	14,41	+0,244
1,4	0,666	8,38	+0,0758	12	2,09	14,92	+0,197
1,6	0,708	8,81	+0,0539	14	2,25	15,34	+0,104
1,8	0,747	9,19	+0,0229	16	2,35	15,71	—0,031
2,0	0,786	9,53	—0,0110	18	2,44	16,06	—0,112
2,5	0,879	10,26	—0,0859	20	2,50	16,39	—0,212
3,0	0,971	10,83	—0,127	22	2,56	16,71	—0,286

$Z = 47$; Ag

$x_0 = 24 \cdot 5$; $k = 7 \cdot 994 \cdot 10^{-7}$; $\frac{\mu}{a} = 0{,}2489$; $\beta = 0{,}06041$;

$K = 0{,}1310$; $B = 0{,}157$; $C = 1{,}41$; $D = 10{,}66$; $\alpha_s = 3{,}89$.

v_0	1,00000	v_8	392,43	u_0	1,00000	u_8	579,05
v_1	— 8,89816	v_9	— 359,12	u_1	— 12,18270	u_9	— 520,29
v_2	34,96173	v_{10}	300,8	u_2	53,85006	u_{10}	428,1
v_3	— 88,87276	v_{11}	— 232,9	u_3	— 140,47200	u_{11}	— 325,7
v_4	169,6367	v_{12}	167,9	u_4	267,0624	u_{12}	231,0
v_5	— 261,5827	v_{13}	— 113	u_5	— 406,9550	u_{13}	— 154
v_6	341,132	v_{14}	72	u_6	522,120	u_{14}	96
v_7	— 387,796	v_{15}	— 44	u_7	— 582,809	u_{15}	— 57

x	R	Θ	U	x	R	Θ	U
0,3	0,370	4,41	—0,0463	4,0	1,13	12,25	—0,045
0,4	0,405	5,08	—0,0495	4,5	1,20	12,62	+0,009
0,5	0,437	5,65	—0,0336	5	1,27	12,96	+0,065
0,6	0,465	6,15	—0,0082	6	1,42	13,52	+0,152
0,7	0,492	6,59	+0,0194	7	1,55	13,97	+0,200
0,8	0,518	6,98	+0,0436	8	1,67	14,36	+0,213
0,9	0,542	7,34	+0,0619	9	1,80	14,69	+0,200
1,0	0,565	7,66	+0,0727	10	1,90	14,98	+0,163
1,2	0,611	8,25	+0,0739	12	2,09	15,49	+0,057
1,4	0,653	8,75	+0,0535	14	2,24	15,91	—0,061
1,6	0,695	9,19	+0,0211	16	2,36	16,29	—0,172
1,8	0,734	9,59	—0,0157	18	2,44	16,63	—0,256
2,0	0,772	9,94	—0,0498	20	2,54	16,97	—0,318
2,5	0,863	10,69	—0,108	22	2,60	17,26	—0,340
3,0	0,953	11,30	—0,119	24	2,66	17,57	—0,333
3,5	1,04	11,82	—0,103				

$Z = 53$; I

$x_0 = 26,1$; $k = 5,575 \cdot 10^{-7}$; $\frac{\mu}{a} = 0,2387$; $\beta = 0,007750$;

$K = 0,1313$; $B = 0,158$; $C = 1,38$; $D = 11,46$; $\alpha_s = 4,14$

v_0	1,00000	v_8	591,68	u_0	1,00000	u_8	916,24
v_1	— 9,63756	v_9	— 561,66	u_1	— 13,34733	u_9	— 854,82
v_2	40,42145	v_{10}	487,6	u_2	63,78886	u_{10}	729,4
v_3	— 108,47731	v_{11}	— 390,8	u_3	— 177,42538	u_{11}	— 575,1
v_4	217,2471	v_{12}	291,5	u_4	355,8605	u_{12}	422,1
v_5	— 350,1901	v_{13}	— 204	u_5	— 568,6572	u_{13}	— 290
v_6	476,055	v_{14}	134	u_6	762,310	u_{14}	188
v_7	— 562,943	v_{15}	— 83	u_7	— 886,774	u_{15}	— 115

x	R	Θ	U	x	R	Θ	U
0,3	0,363	4,64	—0,0476	4,0	1,10	12,80	+0,034
0,4	0,397	5,35	—0,0420	4,5	1,18	13,19	+0,090
0,5	0,429	5,94	—0,0188	5	1,25	13,54	+0,135
0,6	0,456	6,45	+0,0104	6	1,39	14,11	+0,182
0,7	0,483	6,91	+0,0373	7	1,52	14,58	+0,199
0,8	0,508	7,32	+0,0575	8	1,64	14,98	+0,142
0,9	0,532	7,70	+0,0690	9	1,77	15,33	+0,083
1,0	0,554	8,03	+0,0716	10	1,89	15,62	+0,019
1,2	0,599	8,64	+0,0555	12	2,06	16,13	—0,112
1,4	0,641	9,16	+0,0215	14	2,24	16,57	—0,225
1,6	0,681	9,62	—0,0175	16	2,36	16,94	—0,293
1,8	0,719	10,03	—0,0531	18	2,44	17,29	—0,320
2,0	0,757	10,40	—0,0822	20	2,54	17,61	—0,314
2,5	0,846	11,18	—0,109	22	2,60	17,91	—0,273
3,0	0,934	11,82	—0,084	24	2,68	18,20	—0,202
3,5	1,02	12,35	—0,028	26	2,72	18,48	—0,126

$Z = 58$; Ce

$x_0 = 27{,}2$; $k = 4{,}254 \cdot 10^{-7}$; $\frac{\mu}{a} = 0{,}2314$; $\beta = 0{,}09359$;

$K = 0{,}1324$; $B = 0{,}161$; $C = 1{,}36$; $D = 12{,}00$; $\alpha_s = 4{,}32$.

v_0	1,00000	v_8	814,63	u_0	1,00000	u_8	1310,01
v_1	— 10,26104	v_9	— 795,30	u_1	— 14,33995	u_9	— 1258,10
v_2	45,29885	v_{10}	709,5	u_2	72,84333	u_{10}	1103,9
v_3	— 126,84384	v_{11}	— 583,9	u_3	— 213,04123	u_{11}	— 894,1
v_4	263,7147	v_{12}	447,0	u_4	445,5261	u_{12}	673,9
v_5	— 439,9598	v_{13}	— 320	u_5	— 738,7314	u_{13}	476
v_6	617,593	v_{14}	216	u_6	1024,593	u_{14}	316
v_7	— 752,852	v_{15}	— 138	u_7	— 1230,258	u_{15}	— 196

x	R	Θ	U	x	R	Θ	U
0,3	0,358	4,84	—0,0470	4,0	1,09	13,24	+0,0900
0,4	0,392	5,56	—0,0342	4,5	1,16	13,63	+0,134
0,5	0,422	6,18	—0,0060	5	1,24	14,00	+0,163
0,6	0,450	6,70	+0,0244	6	1,37	14,59	+0,162
0,7	0,476	7,17	+0,0490	7	1,51	15,07	+0,118
0,8	0,500	7,60	+0,0649	8	1,64	15,47	+0,049
0,9	0,524	7,98	+0,0688	9	1,76	15,82	—0,028
1,0	0,546	8,33	+0,0643	10	1,88	16,12	—0,101
1,2	0,590	8,96	+0,0353	12	2,06	16,64	—0,221
1,4	0,631	9,50	—0,0060	14	2,23	17,08	—0,290
1,6	0,671	9,97	—0,0459	16	2,40	17,45	—0,313
1,8	0,709	10,39	—0,0773	18	2,50	17,78	—0,280
2,0	0,746	10,77	—0,0962	20	2,59	18,09	—0,234
2,5	0,834	11,57	—0,0924	22	2,71	18,38	—0,157
3,0	0,920	12,23	—0,0405	24	2,75	18,65	—0,069
3,5	1,00	12,78	+0,0280	26	2,81	18,92	+0,300

$Z=67$; Ho

$x_0=29{,}2$; $k=2{,}760\cdot 10^{-7}$; $\frac{\mu}{a}=0{,}2202$; $\beta=0{,}1271$;

$K=0{,}1378$; $B=0{,}170$; $C=1{,}33$; $D=13{,}05$; $\alpha_s=4{,}66$.

v_0	1,00000	v_8	1388,64	u_0	1,00000	u_8	2330,52
v_1	— 11,40902	v_9	—1419,33	u_1	— 16,19716	u_9	—2396,89
v_2	54,90957	v_{10}	1323,7	u_2	91,14407	u_{10}	2200,9
v_3	— 165,13950	v_{11}	—1137,7	u_3	— 289,98981	u_{11}	—1863,2
v_4	365,3936	v_{12}	908,3	u_4	650,3858	u_{12}	1465,7
v_5	— 645,2426	v_{13}	— 679	u_5	—1146,5478	u_{13}	—1079
v_6	954,923	v_{14}	477	u_6	1681,828	u_{14}	747
v_7	—1223,606	v_{15}	— 317	u_7	—2127,846	u_{15}	— 489

x	R	Θ	U	x	R	Θ	U
0,3	0,350	5,17	—0,0433	4,5	1,13	14,40	+0,151
0,4	0,383	5,93	—0,0182	5	1,20	14,77	+0,132
0,5	0,413	6,57	+0,0163	6	1,34	15,39	+0,056
0,6	0,439	7,13	+0,0454	7	1,47	15,89	—0,039
0,7	0,465	7,62	+0,0624	8	1,60	16,32	—0,128
0,8	0,489	8,07	+0,0658	9	1,73	16,68	—0,198
0,9	0,512	8,47	+0,0573	10	1,84	16,99	—0,244
1,0	0,533	8,83	+0,0409	12	2,05	17,51	—0,274
1,2	0,576	9,49	—0,0054	14	2,24	17,95	—0,239
1,4	0,616	10,06	—0,0504	16	2,37	18,32	—0,161
1,6	0,655	10,55	—0,0816	18	2,48	18,67	—0,056
1,8	0,692	11,00	—0,0954	20	2,59	18,97	+0,046
2,0	0,728	11,39	—0,0925	22	2,67	19,27	+0,153
2,5	0,814	12,24	—0,0360	24	2,73	19,54	+0,242
3,0	0,899	12,92	+0,0434	26	2,84	19,81	+0,323
3,5	0,979	13,50	+0,108	28	2,84	20,06	+0,368
4,0	1,06	13,99	+0,145				

$Z = 74$; W

$x_0 = 30{,}6$; $k = 2{,}048 \cdot 10^{-7}$; $\frac{\mu}{a} = 0{,}2128$; $\beta = 0{,}1577$;

$K = 0{,}1444$; $B = 0{,}179$; $C = 1{,}30$; $D = 13{,}89$; $\alpha_s = 4{,}91$.

v_0	1,00000	v_8	2047,03	u_0	1,00000	u_8	3679,78
v_1	— 12,34398	v_9	— 2161,18	u_1	— 17,74078	u_9	— 3831,46
v_2	63,31604	v_{10}	2079,5	u_2	107,63765	u_{10}	3633,2
v_3	— 200,65021	v_{11}	— 1842,5	u_3	— 364,22553	u_{11}	— 3172,2
v_4	464,4998	v_{12}	1515,3	u_4	859,5821	u_{12}	2571,9
v_5	— 854,4885	v_{13}	— 1165	u_5	— 1583,9396	u_{13}	— 1949
v_6	1313,250	v_{14}	843	u_6	2418,610	u_{14}	1390
v_7	— 1743,566	v_{15}	— 575	u_7	— 3176,116	u_{15}	— 937

x	R	Θ	U	x	R	Θ	U
0,3	0,345	5,42	—0,0378	4,5	1,11	14,96	+0,109
0,4	0,377	6,21	—0,0040	5	1,18	15,35	+0,058
0,5	0,406	6,88	+0,0328	6	1,33	15,99	—0,056
0,6	0,432	7,45	+0,0574	7	1,46	16,50	—0,151
0,7	0,457	7,96	+0,0656	8	1,58	16,94	—0,216
0,8	0,481	8,42	+0,0586	9	1,71	17,31	—0,246
0,9	0,503	8,84	+0,0401	10	1,84	17,66	—0,246
1,0	0,525	9,21	+0,0159	12	2,04	18,15	—0,189
1,2	0,567	9,89	—0,0369	14	2,23	18,62	—0,070
1,4	0,606	10,48	—0,0761	16	2,41	18,97	+0,045
1,6	0,645	10,99	—0,0931	18	2,48	19,34	+0,172
1,8	0,681	11,45	—0,0884	20	2,54	19,62	+0,258
2,0	0,716	11,86	—0,0673	22	2,68	19,95	+0,347
2,5	0,801	12,73	+0,0191	24	2,73	20,19	+0,386
3,0	0,884	13,44	+0,0978	26	2,79	20,50	+0,402
3,5	0,963	14,03	+0,138	28	2,84	20,71	+0,392
4,0	1,04	14,54	+0,139	30	2,94	21,00	+0,353

$Z = 80$; Hg

$x_0 = 31,7$; $k = 1,621 \cdot 10^{-7}$; $\frac{\mu}{a} = 0,2072$; $\beta = 0,1873$;

$K = 0,1529$; $B = 0,191$; $C = 1,29$; $D = 14,44$; $\alpha_s = 5,11$.

v_0	1,00000	v_8	2819,23	u_0	1,00000	u_8	5276,88
v_1	— 13,18965	v_9	— 3055,06	u_1	— 19,16232	u_9	— 5643,47
v_2	71,34381	v_{10}	3014,5	u_2	123,79120	u_{10}	5490,8
v_3	— 236,11635	v_{11}	— 2736,5	u_3	— 440,82317	u_{11}	— 4915,0
v_4	567,3108	v_{12}	2304,6	u_4	1085,0355	u_{12}	4082,0
v_5	— 1079,0323	v_{13}	— 1814	u_5	— 2073,0997	u_{13}	— 3167
v_6	1710,227	v_{14}	1341	u_6	3270,884	u_{14}	2311
v_7	— 2336,974	v_{15}	— 939	u_7	— 4427,212	u_{15}	— 1592

x	R	Θ	U	x	R	Θ	U
0,3	0,341	5,65	—0,0307	4,5	1,10	15,45	+0,044
0,4	0,372	6,46	+0,0101	5	1,18	15,84	—0,024
0,5	0,401	7,15	+0,0466	6	1,31	16,49	—0,142
0,6	0,427	7,74	+0,0648	7	1,44	17,02	—0,213
0,7	0,451	8,26	+0,0632	8	1,57	17,46	—0,236
0,8	0,475	8,73	+0,0462	9	1,69	17,84	—0,217
0,9	0,497	9,16	+0,0197	10	1,81	18,16	—0,174
1,0	0,518	9,55	—0,0097	12	2,01	18,71	—0,040
1,2	0,560	10,24	—0,0625	14	2,20	19,16	+0,106
1,4	0,597	10,85	—0,0904	16	2,38	19,54	+0,235
1,6	0,636	11,37	—0,0906	18	2,49	19,87	+0,326
1,8	0,672	11,84	—0,0682	20	2,56	20,19	+0,381
2,0	0,707	12,26	—0,0325	22	2,67	20,48	+0,407
2,5	0,791	13,16	+0,0671	24	2,80	20,76	+0,402
3,0	0,873	13,88	+0,129	26	2,86	21,01	+0,363
3,5	0,950	14,49	+0,136	28	2,90	21,26	+0,292
4,0	1,03	15,01	+0,102	30	2,92	21,49	+0,209

$Z = 92$; U

$x_0 = 34{,}1$; $k = 1{,}066 \cdot 10^{-7}$; $\frac{\mu}{a} = 0{,}1976$; $\beta = 0{,}2577$;

$K = 0{,}1805$; $B = 0{,}228$; $C = 1{,}26$; $D = 15{,}60$; $\alpha_0 = 5{,}46$.

v_0	1,00000	v_8	5261,69	u_0	— 1,00000	u_8	10690,65
v_1	— 15,07648	v_9	— 5987,33	u_1	— 22,42622	u_9	— 120274,55
v_2	90,60110	v_{10}	6190,5	u_2	164,07771	u_{10}	1227,9
v_3	— 326,47690	v_{11}	— 5879,1	u_3	— 645,84395	u_{11}	— 11506,5
v_4	843,0255	v_{12}	5173,1	u_4	1725,1473	u_{12}	9991,9
v_5	— 1709,4048	v_{13}	— 4248	u_5	— 3534,0590	u_{13}	— 8096
v_6	— 2872,335	v_{14}	3274	u_6	5934,641	u_{14}	6161
v_7	— 4143,935	v_{15}	— 2381	u_7	— 8504,130	u_{15}	— 4423

x	R	Θ	U	x	R	Θ	U
0,3	0,334	6,11	—0,0105	5	1,14	16,79	—0,182
0,4	0,364	6,69	+0,0411	6	1,28	17,47	—0,227
0,5	0,393	7,68	+0,0699	7	1,41	18,02	—0,189
0,6	0,418	8,30	+0,0682	8	1,53	18,48	—0,099
0,7	0,442	8,85	+0,0434	9	1,67	18,87	+0,009
0,8	0,464	9,34	+0,0070	10	1,78	19,20	+0,113
0,9	0,485	9,79	—0,0314	12	1,99	19,76	+0,286
1,0	0,506	10,19	—0,0636	14	2,22	20,22	+0,394
1,2	0,547	10,92	—0,0985	16	2,36	20,59	+0,420
1,4	0,585	11,55	—0,0894	18	2,53	20,93	+0,397
1,6	0,622	12,10	—0,0501	20	2,66	21,22	+0,332
1,8	0,657	12,60	+0,0035	22	2,72	21,50	+0,227
2,0	0,691	13,04	+0,0566	24	2,80	21,76	+0,111
2,5	0,773	13,98	+0,138	26	2,85	22,02	—0,020
3,0	0,853	14,73	+0,127	28	2,91	22,26	—0,145
3,5	0,929	15,38	+0,055	30	2,96	22,49	—0,260
4,0	1,01	15,91	—0,037	32	2,98	22,72	—0,363
4,5	1,07	16,37	—0,129	34	3,06	22,94	—0,453

ОБОЗНАЧЕНИЯ, ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ В ТАБЛИЦАХ ДЛЯ ОТДЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

a — боровский радиус ($5{,}28 \cdot 10^{-9}$ *см*).
μ — мера длины [см. формулы (2)].
x — радиус-вектор в единицах μ.
x_0 — радиус атома.
k — константа для расчета потенциала [формулы (7) и (8)].

Две релятивистские собственные функции F и G [формулы (1) и (1)′] для $x < 0{,}3$ задаются выражениями

$$G = x^{-\beta}[u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots],$$
$$F = \frac{\beta}{\alpha Z} x^{-\beta}[v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + \ldots].$$

Для $x > 0{,}3$ имеем

$$G = U/x, \qquad U = KR \sin \Theta.$$

Для $x > x_0$ имеем

$$U = B \sqrt[4]{x} \sin (C \sqrt{x} + D).$$

В нерелятивистской области G совпадает со шредингеровской собственной функцией ψ.
α_s — поправка Ридберга.

К статье 60

Получив в конце 1926 г. кафедру в Римском университете, Ферми не освободился от необходимости искать дополнительный заработок: жалованье профессора университета было довольно скудным (хотя к этому званию в Италии относились с величайшим пиететом). Это и привело его в редколлегию Итальянской энциклопедии, основанной Джованни Треккани, где Ферми проработал несколько лет, выполняя редакторские и административные обязанности. Избрание членом Королевской академии Италии позволило ему вскоре отказаться от этих обязанностей, но он продолжал писать статьи для энциклопедии.

По словам Э. Сегре, Ферми даже гордился некоторыми из этих статей и, в частности, приводимой ниже статьей о статистической механике. Надо сказать, эта статья довольно типична в том отношении, что она ярко иллюстрирует педагогические способности Ферми и, кроме того, его представление о том, как надо писать статьи такого типа. Несколько слов по этому поводу.

Я помню, что в 1932—1933 гг. Ферми предложил мне, с целью денежной поддержки, написать некоторые статьи для энциклопедии. Когда я написал первую статью — «Плеохроизм» — и представил ее Ферми, он прочел первые фразы и довольно сухо сказал: «Я здесь ничего не понимаю». Он объяснил мне, как надо писать статьи для энциклопедии: по крайней мере, первая их часть (скажем, 1/10 или первые две фразы, если статья короткая и т. д.) должна быть понятна любому образованному человеку. Как будет видно, его статья «Статистическая механика» полностью удовлетворяет этому требованию.

В настоящем издании эта статья, увидевшая свет в 1936 г., помещена ранее знаменитых нейтронных работ, выполненных в 1934 г.: она была написана заведомо не позднее их, и в 1934 г. уже была известна сотрудникам Ферми и студентам Университета.

Б. Понтекорво

60

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА *

Изучение молекулярной и атомной структуры материи по необходимости привело к развитию особых методов, удобных для обсуждения свойств таких систем, которые состоят из колоссального числа индивидуальных

---

* *Statistica meccanica.* Enciclopedia Italiana di Scienze, Lettere ed Arti. Istituto G. Treccani, Roma, 1936 — XV, vol. 32, 518—523. (Здесь, в качестве курьеза, сохранена двойная датировка, установленная в то время в Италии помпезным декретом правительства: наряду с обычной датой повсюду указывался год «фашистской эры», отсчитывавшийся со времени похода на Рим (1922 г.). Как известно, фашистская «эра» прекратила свое существование на двадцать третьем году, а ее «основатель» был повешен итальянскими партизанами. В дальнейшем указываются лишь обычные даты.— *Прим. ред.*)

объектов. Такая проблема имеет аналогию с изучением некой очень многочисленной группы населения, и поэтому эту область физики называют *статистической механикой*.

Очевидно, сложность математического расчета движения системы, состоящей из мириад частиц (а даже в самых малых телах, которые мы можем ощутить, находятся тысячи миллиардов молекул), так велика, что точное описание этого движения — безнадежное дело. Все же следует отметить, что те характеристики, которые мы хотим определить, в общем, связаны со средними свойствами большого числа объектов. Так, например, можно задать вопрос: какова средняя скорость молекул, какова их средняя кинетическая энергия, какова средняя величина расстояния одной молекулы от другой, ближайшей к ней, и т. д. Оказывается, что эти средние свойства имеют поведение, намного более регулярное и поэтому легче поддающееся изучению, чем свойства отдельной молекулы. Значительные флуктуации индивидуального поведения как-то компенсируются при усреднении: они практически исчезают, если число объектов достаточно велико. Так, например, хорошо известно, что давление газа на стенки сосуда обусловлено столкновением молекул газа со стенками: каждое столкновение передает малый импульс стенке, а давление возникает из совокупности этих элементарных толчков. Очевидно, столкновения разных молекул значительно отличаются между собой по интенсивности в зависимости от скорости сталкивающейся молекулы и угла падения. Но с точки зрения определения давления то, что представляет интерес,— это не импульс, передаваемый в одиночном соударении, а его среднее значение и число (огромное!) соударений, происходящих в единицу времени. Оба эти фактора не зависят от случайных флуктуаций в свойствах индивидуальных молекул. Поэтому давление, создаваемое газом, есть совершенно регулярное явление.

Область физики, которая привела к развитию статистической механики, одновременно является той областью, в которой последняя находила большинство применений: это учение о свойствах газов. Можно даже сказать, что статистическую механику и кинетическую теорию газов трудно разделить. Под словом **газ** можно найти историческую справку об основах кинетической теории газов, а также изложение главных методов расчета; там же обсуждается составляющая основание статистической термодинамики связь между вероятностью и энтропией состояния системы. В настоящей статье мы предполагаем, что читатель знаком с этими понятиями и даем некоторые дополнительные сведения, особенно по связи статистической теории с квантовой теорией.

Фазовое пространство. Статистическая постановка задачи для системы, состоящей из большого числа элементов, как, например, газа, состоящего из огромного числа молекул, может быть сформулирована следующим образом. Как известно, состояние механической системы в классической механике характеризуется положением и скоростью всех материальных

точек, которые ее составляют. Для простоты мы рассмотрим случай голономных систем со связями, не зависящими от времени (см. **Кинематика**), так как почти все системы, которые рассматриваются в физических применениях, принадлежат именно к этому классу. Для этих систем положение характеризуется значениями некоторых параметров $q_1, q_2, \ldots, q_f$, называемых *обобщенными координатами*, причем число f этих параметров равно числу степеней свободы системы. Знание f обобщенных координат определяет только положения, а не скорости составляющих систему точек. В связи с этим, кроме $q_1, q_2, \ldots, q_f$, необходимо знать и их производные по времени, $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_f$. Поэтому мы можем утверждать, что для полного определения состояния механической системы следует знать $2f$ величин: $q_1, q_2, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_f$. В аналитической механике полезно и удобно использовать совокупность координат, отличающуюся от приведенной выше: вместо f величин $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_f$ вводятся f других величин: $p_1, p_2, \ldots$ $\ldots, p_f$, которые определяются следующим образом. Кинетическая энергия T (впрочем, как и всякая другая функция состояния системы) есть функция обобщенных координат q и обобщенных скоростей $\dot{q}$:

$$T = T(q_1, q_2, \ldots, q_f;\ \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots \dot{q}_f).$$

Переменная p_r, которая называется *обобщенным импульсом*, сопряженным координате q_r, определяется как

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, f). \tag{1}$$

Вместо обобщенных координат и их производных по времени мы будем представлять состояние системы с помощью $2f$ переменных

$$q_1, q_2, \ldots, q_f, p_1, p_2, \ldots, p_f. \tag{2}$$

Законы, которые определяют временну́ю зависимость переменных, описывающих состояние (уравнения движения), можно записать в канонической форме Гамильтона:

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \qquad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, f), \tag{3}$$

где функция $H(q_1, q_2, \ldots, q_f, p_1, p_2, \ldots, p_f)$, называемая *функцией Гамильтона*, или просто *гамильтонианом*, в случае консервативных систем совпадает с энергией.

Чтобы представить состояние системы, очень удобно пользоваться геометрическим языком. Согласно Дж. У. Гиббсу, мы будем называть *фазовым пространством* $2f$-мерное пространство, для которого $2f$ переменных (2), характеризующих состояние, играют роль декартовых прямоугольных координат. Очевидно, имеется соответствие между точками фазового пространства и состояниями системы: действительно, если состояние за-

дано, то величины q_r и p_r известны, и поэтому можно определить точку фазового пространства. Наоборот, если задана точка в фазовом пространстве, то мы знаем координаты q_r и p_r, а последние определят состояние системы. Таким образом, мы можем утверждать, что точка в фазовом пространстве изображает состояние системы, и в дальнейшем говорить наравне как о состояниях системы, так и о точках, которые их изображают в фазовом пространстве.

Поскольку состояние системы меняется со временем (вследствие движения), точка, представляющая состояние в фазовом пространстве, перемещается по некоторой траектории. Движение описывается уравнениями Гамильтона (3), которые определяют производные по времени координат q_r и p_r изображающей точки, т. е. $2f$ компонент ее скорости в $2f$-мерном фазовом пространстве.

Согласно уравнениям Гамильтона, состояние системы, и, следовательно, значения q_r и p_r, остаются определенными для любого прошлого или будущего момента времени t, если в момент времени $t = 0$ известны q_r и p_r. Геометрически это интерпретируется следующим образом: если известна точка P_0, которая изображает состояние в момент времени $t = 0$, то можно определить точку $P(t)$, которая представляет состояние в любой момент времени. Поэтому через точку P_0 проходит одна (и только одна) траектория — геометрическое место всех точек $P(t)$; при этом все фазовое пространство заполнено семейством таких траекторий. В обычном случае консервативной системы (т. е. не зависящего от времени гамильтониана H), это семейство траекторий имеет следующие свойства:

а) через каждую точку фазового пространства проходит одна (и только одна) траектория;

б) каждая траектория целиком лежит на одной из поверхностей

$$H = \text{const}$$

(принцип сохранения энергии).

Форма этих траекторий, лежащих на поверхностях $H = \text{const}$, в общем довольно сложна; она имеет большое значение для статистических проблем.

В связи с этим рассматриваются *эргодические* системы, т. е. такие системы, для которых вышеупомянутые траектории, все время оставаясь на поверхностях постоянной энергии, в конце концов проходят через все точки поверхности $H = \text{const}$. Систему называют *квазиэргодической*, когда отсутствуют траектории, которые проходили бы через все точки поверхности $H = \text{const}$, хотя существуют траектории, которые плотно заполняют данную поверхность, иными словами, которые проходят на произвольно малом расстоянии от каждой ее точки. Определение, по существу, эквивалентное предыдущему, таково: система называется квазиэргодической, если всегда существует, по крайней мере, одна траектория, которая проходит через два сколь угодно малых элемента поверхности, произвольно выбранных на каждой поверхности $H = \text{const}$.

Для того чтобы получить сведения о статистических свойствах системы, очень важно ответить на вопрос, можно ли рассматривать ее как эргодическую (квазиэргодическую) или нет. В самом деле, чтобы прийти к закону Больцмана, т. е. основному закону статистической механики, требуется, чтобы рассматриваемая система (газ, твердое тело и т. д.) была, по крайней мере, квазиэргодической. В связи с этим происходили продолжительные дискуссии с целью выяснения степени законности следующей гипотезы: системы, для которых обычно применяется статистическая механика, могут рассматриваться как эргодические или квазиэргодические. Был сделан следующий вывод: эргодических механических систем не существует, квазиэргодические же системы могут существовать. По-видимому, можно даже сказать, что очень сложные механические системы без особых свойств симметрий вообще должны быть квазиэргодическими. Естественно, системы, которые должны рассматриваться в статистических приложениях, всегда исключительно сложны вследствие огромного числа составляющих их элементов. Строго говоря, необходимо также считать частью системы и совокупность всех тел, могущих повлиять на движение рассматриваемого объекта, например вследствие передачи тепла. Итак, гипотеза о квазиэргодичности систем, к которым применяются статистические понятия, является весьма правдоподобной.

Среди самых важных для статистических применений свойств фазового пространства мы должны еще отметить теорему Лиувилля. Рассмотрим элементарный объем τ_0 в фазовом пространстве. Пусть каждой точке P_0 этого объема τ_0 соответствует другая точка P фазового пространства согласно следующему правилу: точка P должна изображать состояние, в котором в момент времени t окажется система, в нулевой момент времени находившаяся в состоянии, изображаемом P_0. При фиксированном моменте времени t совокупность точек P заполнит некий другой элемент объема τ, соответствующий элементу τ_0. Теорема Лиувилля утверждает, что гиперобъемы элементов τ и τ_0 одинаковы.

Закон распределения Больцмана. Основная проблема статистической механики — это формулирование закона распределения для системы с данной температурой. Впервые эта проблема была частично решена Максвеллом для случая газа, состоящего из точечных молекул; общее решение для любой системы найдено Л. Больцманом, и поэтому соответствующий закон распределения носит его имя. Проблему нахождения закона распределения можно сформулировать разными способами. Ниже мы их рассмотрим.

Для простоты разберем сначала случай газа, состоящего из молекул одного типа. Каждая молекула представляет собой механическую систему, состояние которой можно изобразить точкой в фазовом пространстве молекулы. Будем мысленно отмечать все точки этого пространства, изображающие состояния, в которых находятся различные молекулы в данный момент времени. Закон, согласно которому плотность этих точек распре-

делена по фазовому пространству, в этом случае прямо даст статистическое распределение молекул.

Коснемся одного метода определения этого распределения, правда, не строгого с логической точки зрения, но очень простого и очевидного. Разделим мысленно фазовое пространство на множество ячеек одинакового гиперобъема. Этот объем должен быть, с одной стороны, достаточно большим для того, чтобы каждая ячейка содержала значительное число молекул; с другой стороны, он должен быть достаточно малым для того, чтобы вариациями плотности распределения изображающих точек внутри одной ячейки можно было пренебречь. Обозначим различные ячейки порядковым номером и пусть N_1, N_2, ..., N_s, ...— числа молекул, изображающие точки которых принадлежат 1-й, 2-й, ..., s-й, ... ячейке. Из элементарной алгебры сочетаний следует, что число способов распределения N молекул газа по различным ячейкам таким образом, чтобы N_1 принадлежало 1-й ячейке, N_2 — 2-й и т. д., равно

$$\Pi = \frac{N!}{N_1!\, N_2! \ldots N_s! \ldots}. \tag{4}$$

Если положить априори вероятности каждого распределения молекул по различным ячейкам одинаковыми (а эта гипотеза никак не оправдана), то выражение (4) будет пропорционально вероятности распределения N_1, N_2, ..., N_s, ...

Теперь следует найти наиболее вероятное распределение, т. е. распределение, для которого Π максимально.Необходимо учесть, что величины N_s связаны двумя соотношениями. Одно из них,

$$N_1 + N_2 + \ldots + N_s + \ldots = N, \tag{5}$$

утверждает, что полное число молекул равно N; другое выражает принцип сохранения энергии и может быть сформулировано следующим образом. Энергия молекулы задается ее состоянием, т. е. изображающей точкой фазового пространства; однако можно думать, что внутри каждой ячейки (так как ее размеры малы) энергия существенно не меняется. Обозначим через w_s энергию молекул, принадлежащих s-й ячейке. Если W — полная энергия газа, то

$$N_1 w_1 + N_2 w_2 + \ldots + N_s w_s + \ldots = W. \tag{6}$$

Проблема нахождения наиболее вероятного распределения состоит тогда в определении таких чисел N_1, N_2, ..., N_s, ..., которые удовлетворяли бы соотношениям (5) и (6) и при этом выражение (4) было бы максимально. Как можно найти, числа N_s выражаются соотношением

$$N_s = g e^{-\beta w_s}. \tag{7}$$

Здесь g и β — константы, определяемые из требования удовлетворения соотношений (5) и (6), а e, как обычно, основание натуральных логариф-

мов. Константу β можно также выразить через абсолютную температуру T с помощью соотношения

$$\beta = \frac{1}{kT}, \tag{8}$$

где постоянная k, называемая постоянной Больцмана, есть не что иное, как отношение газовой постоянной R к числу Авогадро. Ее значение:

$$k = 1{,}36 \cdot 10^{-16}\ см^2 \cdot г \cdot сек^{-2} \cdot град^{-1}.$$

Поскольку все ячейки, на которые мы разделили фазовое пространство, одинаковы по объему, числа N_s пропорциональны плотности изображающих точек. Поэтому предыдущий результат можно сформулировать следующим образом.

Число молекул, координаты и импульсы которых находятся в интервалах между

$$\left.\begin{array}{llllll} q_1 \text{ и } q_1 + dq_1, & q_2 \text{ и } q_2 + dq_2, & \ldots, & q_f \text{ и } q_f + dq_f, \\ p_1 \text{ и } p_1 + dp_1, & p_2 \text{ и } p_2 + dp_2, & \ldots, & p_f \text{ и } p_f + dp_f \end{array}\right\} \tag{9}$$

(т. е. изображающие точки которых находятся внутри элемента гиперобъема фазового пространства $dq_1\, dq_2 \ldots dq_f dp_1 dp_2 \ldots dp_f$), равно

$$dn = Ae^{-\frac{w}{kT}}\, dq_1 dq_2 \ldots dq_f\, dp_1\, dp_2 \ldots dp_f, \tag{10}$$

где A — константа, которую можно определить, зная полное число молекул, а w обозначает энергию молекулы, выраженную через ее переменные $q_1, \ldots, p_1, \ldots$. Формулу (10), которая выражает закон распределения Больцмана, можно рассматривать как самый важный результат статистической механики.

Частными случаями и важными следствиями закона Больцмана (10) являются:

максвелловский закон распределения скоростей; в газе при температуре T число молекул, у которых компоненты u, v, w скоростей поступательного движения заключены в пределах между u и $u + du$, v и $v + dv$; w и $w + dw$, определяется выражением

$$dn = \text{const}\, e^{-\frac{m}{2kT}(u^2+v^2+w^2)}\, du\, dv\, dw, \tag{11}$$

где m — масса одной молекулы (см. **Газ**);

принцип равномерного распределения энергии, который можно сформулировать следующим образом. Возьмем для молекул газа систему прямоугольных обобщенных координат. Кинетическая энергия, которая, вообще говоря, является квадратичной формой $\dot{q}$, будет тогда квадратичной

ортогональной формой

$$T = {}^1/_2\,[m_1(q)\,\dot{q}_1^2 + m_2(q)\,\dot{q}_2^2 + \ldots + m_f(q)\,\dot{q}_f^2]. \qquad (12)$$

В этом случае кинетическая энергия делится между f слагаемыми, каждое из которых представляет энергию, соответствующую одной из f степеней свободы молекулы. Принцип равномерного распределения энергии, который можно довольно просто получить из закона Больцмана, утверждает: средняя величина кинетической энергии, соответствующая каждой степени свободы молекулы, постоянна и равна $kT/2$ (применения этого принципа можно найти в статье **Газ**).

Проблему определения закона распределения можно сформулировать и в другой форме, представляющей иногда значительные преимущества перед той, которую мы только что рассмотрели. Вместо того, чтобы представлять по отдельности состояние каждой молекулы точкой в фазовом пространстве данной молекулы, мы будем рассматривать наше тело и, если надо, все другие тела, с которыми оно может взаимодействовать, в качестве единой механической системы, имеющей огромное число степеней свободы и, следовательно, фазовое пространство со сверхвысоким числом измерений. Состояние этой объединенной сложной системы будет представлено точкой его фазового пространства; и эта точка с течением времени будет двигаться по траектории, которая в конце концов плотно заполнит целиком одну гиперповерхность с постоянной энергией (если система квазиэргодическая).

Используя эти понятия, коснемся здесь способа установления закона распределения Больцмана на основании гипотезы о квазиэргодичности системы. Вначале обсудим некоторые положения.

а) Пусть имеется очень большое число N квазиэргодических одинаковых и вполне независимых друг от друга систем. Состояние каждой из этих систем будет представлено точкой в фазовом пространстве. С течением времени каждая изображающая точка будет двигаться по поверхности постоянной энергии, плотно заполняя ее. Предположим теперь, что значения энергии N систем распределены равномерно в очень узком интервале от E до $E + \Delta E$. Все изображающие точки будут расположены в промежутке между двумя гиперповерхностями

$$H = E \quad \text{и} \quad H = E + \Delta E. \qquad (13)$$

Вначале точки будут распределены между этими двумя гиперповерхностями по закону произвольной плотности. С течением времени точки будут смещаться и плотность распределения, вообще говоря, будет изменяться. Можно доказать (а это нетрудно сделать, применив теорему Лиувилля), что единственный закон, который остается неизменным с течением времени,— это равномерное распределение. Для такого распределения плотности число изображающих точек, принадлежащих элементу объема фазового пространства, заключенному между двумя поверхностями (13),

будет пропорционально объему этого элемента; иными словами, вероятность того, что одна из систем находится в состоянии, принадлежащем элементу объема, пропорциональна объему элемента.

б) Рассмотрим систему, состоящую из двух частей, взаимодействие между которыми является очень слабым, и предположим, что каждая из двух подсистем 1 и 2 обладает чрезвычайно большим числом степеней свободы. (Пусть читатель для определенности представит себе два содержащих мириады молекул тела, соприкасающихся друг с другом так, что между ними может происходить обмен тепла.) Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{N_1}$ — координаты и импульсы первой парциальной системы, а $y_1, y_2, \ldots, y_{N_2}$ — координаты и импульсы второй. Рассмотрим три различных фазовых пространства: пространство первой подсистемы с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_{N_1}$, второй парциальной системы с координатами $y_1, y_2, \ldots, y_{N_2}$ и, наконец, фазовое пространство объединенной системы, состоящей из совокупности двух подсистем, координаты которого будут $x_1, x_2, \ldots, x_{N_1}, y_1, y_2, \ldots, y_{N_2}$. Следует заметить, что элемент объема объединенного фазового пространства можно записать в виде $dx_1, dx_2, \ldots, dx_{N_1} dy_1, dy_2, \ldots, dy_{N_2}$, т. е. как произведение элемента объема первого фазового пространства (dx_1, $dx_2 \ldots \ldots dx_{N_1}$) на элемент объема второго фазового пространства ($dy_1\, dy_2 \ldots dy_{N_2}$).

Объем фазового пространства первой подсистемы, соответствующий состояниям со значениями энергий между E_1 и $E_1 + dE_1$, можно будет записать в виде

$$d\tau_1 = \omega_1 (E_1)\, dE_1; \tag{14}$$

и аналогично для второй подсистемы:

$$d\tau_2 = \omega_2 (E_2)\, dE_2. \tag{15}$$

Легко убедиться в том, что, если обе подсистемы имеют очень большое число степеней свободы, как мы предполагали, то ω_1 и ω_2 являются быстро возрастающими функциями. Например, легко видеть, что

$$\omega (E) = \text{const}\, E^{\frac{3N}{2} - 1}, \tag{16}$$

если одна из подсистем — идеальный газ, содержащий N точечных молекул, заключенных в сосуд постоянного объема. Поскольку N — число огромное, показатель степени очень велик, и поэтому функция ω растет чудовищно быстро.

Пусть

$$E = E_1 + E_2 \tag{17}$$

— полная энергия объединенной системы. Согласно сказанному в «а», вероятность того, что энергия первой подсистемы находится в пределах между E_1 и $E_1 + dE_1$ (и поэтому энергия второй подсистемы находится в пределах между $E - E_1$ и $E - E_1 - dE_1$), пропорциональна объему

объединенного фазового пространства, соответствующему упомянутым состояниям. Элементарный расчет показывает, что этот объем, в свою очередь, пропорционален

$$\omega_1 (E_1)\, \omega_2 (E_2)\, dE_1.$$

Наиболее вероятное распределение энергии соответствует максимуму указанного выражения (или, что то же самое, его логарифма) при условии связи (17). Таким образом находится следующее условие максимума:

$$\frac{d \ln \omega_1 (E_1)}{dE_1} = \frac{d \ln \omega_2 (E_2)}{dE_2}. \qquad (18)$$

А поскольку обе функции ω_1 и ω_2 очень резко изменяются при изменении своих аргументов, то практически можно пренебречь вероятностью распределений (с той же полной энергией E), существенно отличающихся от определенного из условия (18).

Таким образом, предыдущий результат говорит нам следующее. Пусть соприкасаются разные системы, каждая из которых имеет очень большое число степеней свободы (практически каждая система составлена из чрезвычайно большого числа молекул). Тогда энергия распределяется между ними так, что для всех систем величина

$$\frac{d \ln \omega (E)}{dE}$$

имеет одинаковое значение. А это означает, что она не зависит от особенностей индивидуальных систем, а является функцией только температуры T, общей для всех соприкасающихся систем. Поэтому для каждой системы, содержащей большое число молекул, можно записать

$$\frac{d \ln \omega (E)}{dE} = F (T), \qquad (19)$$

где F — некоторая универсальная функция.

Соотношение (19) можно использовать для статистического определения абсолютной температуры или для нахождения $F (T)$, если воспользоваться абсолютной температурой, определенной термометром с идеальным газом. Это можно сделать следующим образом. Применяя выражение (19) к случаю идеального газа и учитывая соотношение (16), находим

$$F (T) = \frac{3N}{2E}$$

(единицей здесь можно пренебречь по сравнению с огромным числом N молекул). С другой стороны, энергия N молекул [см. Газ, формулы (8), (8′)] есть

$$E = \frac{3}{2} NkT,$$

и поэтому

$$F(T) = \frac{1}{kT}.$$

Выражение (19) можно тогда записать в виде

$$\frac{d \ln \omega(E)}{dE} = \frac{1}{kT}. \tag{20}$$

Теперь мы в состоянии получить простое доказательство закона распределения Больцмана. Пусть система обладает температурой T; требуется найти вероятность того, что точка, изображающая ее состояние, находится внутри элемента объема $d\tau$ фазового пространства данной системы. Для того чтобы удержать систему при температуре T, мысленно представим себе, что она соприкасается с находящимся при температуре T телом, гораздо большим, чем данная система. Большая система служит «баней температуры». Нам следует допускать, что она имеет огромное число степеней свободы, так что справедливо соотношение (20). Обозначим через w энергию первой системы, когда ее состояние представлено точкой, принадлежащей элементу $d\tau$. Если E — полная энергия, то энергия второй системы («бани температуры») будет $E - w$; по предположению w очень мало по сравнению с E. Искомая вероятность пропорциональна объему фазового пространства для полной системы (первая + вторая); а этот объем, в свою очередь, пропорционален

$$\omega(E - w)\, d\tau.$$

Учитывая (20), а также тот факт, что w бесконечно мало по сравнению с E, находим

$$\omega(E - w) = \omega(E)\, e^{-\frac{w}{kT}}.$$

Поскольку $\omega(E)$ не зависит от состояния первой системы, следует заключить, что вероятность того, что она находится в состоянии, принадлежащем элементу $d\tau$, пропорциональна:

$$e^{-\frac{w}{kT}}\, d\tau,$$

что и выражает закон Больцмана. Множитель пропорциональности можно определить, если нужно, из условия, что полная вероятность равна единице. Этот множитель имеет вид

$$\frac{1}{\int e^{-\frac{w}{kT}}\, d\tau},$$

где интеграл следует распространить на все фазовое пространство.

Еще одним значительным следствием формулы (20) является установленное Больцманом соотношение между энтропией системы и вероятностью ее состояния. В самом деле, из вышесказанного следует, что $\omega(E)$ пропорциональна вероятности того, что система обладает энергией E. Но интегрирование соотношения (20) дает:

$$k \ln \omega(E) = \int \frac{dE}{T}.$$

Правая часть этого равенства представляет энтропию; поэтому предыдущее соотношение можно записать в виде

$$\text{Энтропия} = k \ln (\text{Вероятность}).$$

Статистика теории квантов. На развитие теории квантов, которое началось благодаря М. Планку в последние годы XIX столетия, т. е. немного позднее классических работ Больцмана, глубокое влияние оказали статистические представления. Можно даже сказать, что статистическая физика дала начало этому развитию. В свою очередь квантовая теория реагировала на статистические представления, модифицируя их во многих существенных моментах.

Принцип равномерного распределения энергии, являясь прямым следствием закона распределения Больцмана, принимает особенно выразительную форму в том случае, когда на систему, к которой применяется этот принцип, действуют силы упругого типа. Как известно, в этом случае средние значения кинетической и потенциальной энергий равны, и поэтому полная энергия в два раза больше средней кинетической энергии; благодаря принципу равномерного распределения, последняя, с другой стороны, равна $(^1/_2)\, fkT$, где f — число степеней свободы системы. Тогда среднее значение энергии системы будет

$$\overline{w} = fkT. \tag{21}$$

Этот результат, кстати, как и все другие следствия принципа равномерного распределения, только частично согласуется с экспериментальными фактами. Так, например, соотношение (21) можно применить к твердому телу, содержащему N атомов. При этом в первом приближении атомы могут рассматриваться как материальные точки, связанные между собой упругими силами; число степеней свободы в этом случае равно $3N$, и поэтому соотношение (21) дает для тепловой энергии твердого тела

$$w = 3NkT.$$

Если, например, мы имеем в виду грамм-атом, то N — число Авогадро; поэтому $Nk = R$. Соотношение принимает вид

$$w = 3RT,$$

а соответствующая атомная теплоемкость

$$c = \frac{dw}{dT} = 3R,$$

т. е. атомная теплоемкость всех твердых элементов постоянна и одинакова (около 6 *кал/град*). Это не что иное, как выражение закона, найденного эмпирически Дюлонгом и Пти.

Хотя, с одной стороны, мы нашли, что принцип равномерного распределения подтверждается экспериментально, полученное значение атомной теплоемкости приводит, с другой стороны, к ряду теоретических трудностей. Во-первых, известно, что в действительности закон Дюлонга и Пти справедлив для большинства твердых тел при обычной температуре; при низких же температурах атомная теплоемкость тел меньше, чем следует из этого закона, и стремится к нулю вместе с абсолютной температурой. Но, согласно принципу равномерного распределения, теплоемкость твердых тел должна быть постоянной. Еще одно затруднение для теории возникает при анализе законности гипотезы о том, что атомы твердых тел с точки зрения статистических эффектов можно рассматривать как материальные точки. Хорошо известно, что атом — очень сложная система с большим числом внутренних степеней свободы, которые не были учтены при расчете теплоемкости твердого тела. В классической статистике невозможно оправдать пренебрежение этими внутренними степенями свободы. В теории теплоемкости газов встречается аналогичная трудность, состоящая в том, что некоторые степени свободы необходимо учитывать, а другие — нет (речь идет, конечно, о расчете теплоемкости).

Как последний пример трудностей, которые встречаются в применении принципа равномерного распределения, приведем случай спектра черного тела, т. е. излучения, установившегося внутри полости, стенки которой имеют одинаковую температуру T. Можно доказать, что поле излучения внутри полости объема V обладает динамическими свойствами, подобными свойствам упругого твердого тела, заполняющего эту полость; такое поле, в частности, способно колебаться с некоторыми характерными частотами, каждая из которых соответствует определенной степени свободы системы. Естественно, что полное число степеней свободы бесконечно, так как речь идет о непрерывной системе. Точнее, число характерных частот, заключенных в пределах между ν и $\nu + d\nu$, равно

$$dn = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu \tag{22}$$

(полученное выражение, проинтегрированное по ν от 0 до ∞, расходится, а это и соответствует тому, что полное число степеней свободы бесконечно).

Согласно принципу равномерного распределения энергии, каждой из этих степеней свободы необходимо, казалось бы, приписать среднюю энергию kT в соответствии с соотношением (21). Поэтому энергия излу-

чения черного тела с частотой в интервале между ν и $\nu + d\nu$ должна была бы составлять

$$dw = \frac{8\pi k}{c^3} VT\nu^2 \, d\nu. \qquad (23)$$

Эта формула, установленная Релеем и Джинсом, согласуется с опытом только для низких частот и высоких температур; она не может быть справедливой всегда хотя бы вследствие того, что она подразумевает бесконечную полную энергию «черного излучения», как это видно при интегрировании (23) по ν от 0 до ∞.

Именно пытаясь разрешить трудности, встретившиеся в статистической теории излучения черного тела, Планк впервые ввел гипотезу квантов (см. **Атом**).

Фундаментальный результат теории квантов — существование дискретной последовательности возможных значений энергии для любой атомной или молекулярной системы — повлек за собой значительные статистические следствия. Пусть w_1, w_2, ..., w_r, ... — энергетические уровни атома или молекулы. Спрашивается, какова вероятность того, что система при температуре T находится в состоянии с энергией w_r? Эту проблему, которая является квантовым аналогом формулировки закона распределения Больцмана, можно трактовать подобно классическому случаю. Получается, что вероятности того, что система находится в состояниях w_1, w_2, ..., w_r, ... пропорциональны соответственно

$$e^{-\frac{w_1}{kT}}, \quad e^{-\frac{w_2}{kT}}, \ldots, e^{-\frac{w_r}{kT}}, \ldots.$$

Следует заметить, что предыдущий результат справедлив только в том случае, когда все уровни w_1, w_2, ..., w_r, ..., являются невырожденными; поэтому в случае вырождения каждый энергетический уровень должен быть учтен столько раз, какова кратность его вырождения.

Это распространение закона Больцмана на квантованные системы имеет очень важные следствия. Оно позволяет, например, рассчитать среднее значение w энергии гармонического осциллятора при температуре T:

$$\overline{w} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \qquad (24)$$

где ν — характерная частота осциллятора и h — постоянная Планка. В предельном случае, когда $h\nu$ пренебрежимо мало по сравнению с kT, предыдущая формула, подобно классической статистике, дает $\overline{w} = kT$, если же это не так, то $\overline{w}$ имеет меньшее значение, чем соответствующее принципу равномерного распределения энергии. Приписывая каждому из осцилляторов (22) среднюю энергию (24), находим вместо формулы Релея и Джинса следующее выражение для энергии излучения черного тела

в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$:

$$dw = \frac{8\pi V}{c^3} \frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu. \qquad (25)$$

Это — знаменитая формула Планка для спектра черного тела. Она блестяще согласуется с опытом и явилась первым экспериментальным фактом, заложившим основу теории квантов.

Впоследствии формула (24) успешно применялась Эйнштейном и П. Дебаем к проблеме теплоемкости твердых тел. Она позволила найти вполне удовлетворительное объяснение тому, что закон Дюлонга и Пти перестает быть справедливым при очень низких температурах и что теплоемкость твердых тел стремится к нулю вместе с абсолютной температурой.

Кроме того, распространение закона Больцмана на квантованные системы позволило понять, почему при расчете теплоемкостей атомы обычно можно рассматривать как материальные точки и полностью пренебрегать их внутренними степенями свободы. Действительно, разница энергий между самым низким энергетическим уровнем (основным уровнем) атомов и другими их энергетическими уровнями, вообще говоря, значительно больше kT. Поэтому, согласно обобщению закона Больцмана, вероятность того, что атом не находится на основном энергетическом уровне, практически равна нулю. Итак, энергия, связанная с внутренними степенями свободы атома, не меняется с изменением температуры; поэтому они и не дают никакого вклада в теплоемкость вещества. Из нашего объяснения, естественно, следует, что его нельзя рассматривать справедливым в абсолютном смысле, а только до тех пор, пока температура не превышает некоторых пределов. Кстати, то, что вклад разных степеней свободы системы в теплоемкость постепенно уменьшается с температурой, следует также из выражения (24) в случае гармонического осциллятора; в самом деле, элементарное обсуждение этой формулы показывает, что, когда T стремится к нулю, не только $\bar{w}$, но и $d\bar{w}/dT$ стремится к нулю.

Связь с принципом Нернста. Здесь следует обратить внимание на связь упомянутых нами результатов с третьим началом термодинамики, или принципом Нернста (см. **Термодинамика**). Последний, как известно, фиксирует аддитивную постоянную, которая в обычном термодинамическом выражении для энтропии остается неопределенной, и утверждает, что для всех конденсированных тел энтропия равна нулю при абсолютном нуле. Энтропия тела при температуре T дается интегралом

$$S = \int_0^T \frac{dQ}{T},$$

причем тело нагревается обратимым способом от температуры 0 до тем-

пературы T; dQ — дифференциал количества тепла, передаваемого телу. Если через c обозначить удельную теплоемкость, то для единицы массы вещества можно написать $dQ = cdT$, а предыдущий интеграл принимает форму

$$S = \int_0^T \frac{cdT}{T}.$$

Ясно, что для сходимости интеграла необходимо, чтобы удельная теплоемкость c равнялась нулю при $T = 0$. Статистика квантованных систем и ведет именно к этому результату.

Кстати, то, что существование дискретных квантовых систем и проблема определения константы энтропии — связанные вещи, видно также из следующих аргументов.

Рассмотрим систему A, состоящую из большого числа N независимых и одинаковых между собой систем a. Классически задача нахождения статистического распределения такой системы решается путем подразделения фазового пространства каждой из систем a на ячейки, имеющие одинаковый гиперобъем. Если N_1, N_2, ... — числа систем a, изображающая точка которых принадлежит первой, второй, ... ячейке, то вероятность состояния, определенная как число способов реализации данного распределения, равна

$$\Pi = \frac{N!}{N_1! N_2! \ldots},$$

а наиболее вероятным распределением, соответствующим закону Больцмана, будет то, при котором вероятность П максимальна.

В этом рассуждении, основанном на классической механике, значение П при заданном законе распределения плотности в фазовом пространстве не полностью определено, так как оно зависит и от произвольного выбора объема ячеек, на которые подразделялось фазовое пространство. Несложный расчет показывает, что изменение этого объема в ϑ раз приводит к изменению П приблизительно на множитель

$$\vartheta^{-N}.$$

С другой стороны, мы видели, что между энтропией S и вероятностью П имеется соотношение Больцмана

$$S = k \ln \Pi.$$

Согласно этой формуле, неопределенности коэффициента при П, обусловленной произвольностью выбора объема ячеек, соответствует неопределенность аддитивной постоянной в выражении для энтропии S. Это означает, что с помощью классической статистической механики интерпретируется второе начало термодинамики, но не принцип Нернста.

Положение становится совершенно иным, когда проводится квантование систем a. Действительно, в этом случае автоматически происходит дискретная классификация возможных состояний систем a, без необходимости произвольного подразделения на ячейки фазового пространства; распределение тогда задается определением чисел N_1, N_2, ... систем, находящихся соответственно в первом, втором, ... квантовом состоянии. Таким образом, исчезает элемент произвола в определении вероятности П, а через соотношение Больцмана, стало быть, и в статистическом определении энтропии. Нетрудно показать, что именно это определение энтропии соответствует со статистической точки зрения принципу Нернста.

Согласно сказанному, разным ячейкам, на которые подразделено в классической механике фазовое пространство, в случае квантованных систем соответствуют квантовые состояния. Интересно отметить, каковы следствия этого факта в предельном случае больших квантовых чисел, когда, согласно принципу соответствия, различия между классической и квантовой механикой постепенно исчезают. Для простоты рассмотрим систему только с одной степенью свободы, характеризуемую обобщенной координатой q и сопряженным импульсом p. В этом случае фазовое пространство является двумерным (с обобщенными координатами q и p).

В предельном случае больших квантовых чисел совпадают, как известно, не только результаты квантовой и классической механики, но и те результаты, которые получаются из правил квантования Бора — Зоммерфельда. Правило Зоммерфельда

$$\int p dq = nh$$

геометрически интерпретируется следующим образом: площадь той части фазовой плоскости, которая расположена внутри орбиты, соответствующей n-му квантовому состоянию, равна nh. Если мы начертим в фазовой плоскости орбиты, соответствующие всем квантовым состояниям, то площадь, заключенная между двумя последовательными орбитами, будет равна h. И, поскольку каждое квантовое состояние соответствует одной ячейке, приходим к выводу, что в случае систем с одной степенью свободы фазовое пространство (плоскость) необходимо разделить на ячейки размером (площадью) h. Если же система обладает f степенями свободы, то ячейки должны иметь гиперобъем, равный h^f.

Эти результаты можно связать и с соотношением неопределенности Гейзенберга

$$\Delta p \Delta q \sim h.$$

В самом деле, это соотношение подразумевает, что невозможно физически определить состояние системы как точку в фазовом пространстве: в качестве предельной точности такого определения выступает площадь порядка величины h, т. е. размеров, которые, как мы видели, следует приписать ячейкам в фазовом пространстве.

Новые статистики. До сих пор мы рассматривали закон распределения Больцмана с двух различных точек зрения, а именно:

а) выражения вероятности того, что удерживаемая при данной температуре T система находится в данном квантовом состоянии (вероятность пропорциональна $e^{-w/kT}$);

б) выражения числа элементарных систем, находящихся в определенном квантовом состоянии (число пропорционально $e^{-w_r/kT}$). Это относится к случаю сложной системы, состоящей из большого числа тождественных элементарных систем (атомов, молекул и т. п.).

В последнем случае для справедливости закона распределения Больцмана необходимо, чтобы составляющие полную систему элементарные системы были независимы друг от друга (т. е. необходимо, чтобы на состояние, в котором находится одна из них, не влияли состояния других систем). Например, закон Больцмана заведомо будет справедливым, если элементарные системы полностью изолированы одна от другой; если же такие системы распределены в одном и том же объеме, как, например, атомы или молекулы газа, то между ними имеются взаимосвязи, что, вообще говоря, ставит под сомнение справедливость закона Больцмана.

Даже если исключить случай, когда между молекулами газа действуют заметные силы, т. е. если рассматривать предельный случай идеального газа, то и тогда молекулы не будут независимыми друг от друга ввиду их неразличимости.

Известно, что в системе, содержащей некое число тождественных частиц (например, электронов атома или молекул газа), наблюдаются своеобразные явления, обусловленные тождественностью этих частиц. С этой точки зрения различные типы частиц можно разбить на две категории.

а) Частицы, подчиняющиеся принципу Паули (например, электроны, протоны); для них обычное квантовое состояние может быть занято не больше чем одной частицей. Вырожденное же состояние может быть занято, по большей мере, столькими частицами, какова его степень вырождения (см. **Атом**). Волновые функции в этом случае антисимметричны (т. е. меняют знак, но не значение) по отношению к обмену координат двух любых тождественных частиц.

б) Частицы, для которых имеет силу статистика Бозе — Эйнштейна (об этом несколько позже), как, например, ядра гелия, атомы водорода или гелия, кванты света и т. д.; математически они характеризуются свойством их волновых функций быть симметричными по отношению к обмену координатами двух частиц.

Для статистических применений важно отметить следующее свойство: пусть N_1, N_2, ..., N_r, ... — числа частиц, занимающих соответственно 1-е, 2-е, ..., r-е квантовое состояние; существует одно и только одно состояние системы, вполне заданное определением «чисел заполнения» N_1, N_2, ..., N_r, ... Для понимания значения этого свойства необходимо вспомнить, что при формулировании закона Больцмана предполагалось, что упомя-

нутое состояние могло быть осуществлено

$$\frac{N!}{N_1!N_2!\ldots}$$

разными способами.

Легко убедиться в том, что априорная вероятность различных состояний существенно изменяется вследствие свойств систем, содержащих тождественные частицы. Это можно пояснить очень простым примером: пусть система содержит две тождественные частицы, каждая из которых может занимать два квантовых состояния 1 и 2, и пусть N_1 и N_2 — числа заполнения двух состояний; априори они могут иметь значения

$$(2,0)\ (1,1)\ (0,2).$$

Число способов реализации этих трех состояний по Больцману равно соответственно 1, 2, 1; при этом тот факт, что состояние (1, 1) можно реализовать двумя способами, связан с тем обстоятельством, что две частицы могут быть взяты в том или ином порядке. Если же справедлива статистика Бозе — Эйнштейна, то числа способов реализации трех состояний равны 1, 1, 1. Наконец, если справедлив принцип Паули, то состояния (2,0) и (0,2) нельзя реализовать, и поэтому числа способов реализации трех состояний соответственно составляют 0, 1, 0.

Легко понять, как эти особенности систем, содержащих тождественные частицы, будут изменять статистические веса, приписываемые различным состояниям газа, и менять поэтому его свойства.

Принципы статистики Бозе — Эйнштейна впервые использовались индийским физиком Бозе в применении к теории излучения черного тела; излучение рассматривалось как газ фотонов (1925). Позже Эйнштейн осознал, что использование принципа Бозе для нумерации состояний допускает более общие применения, и развил теорию идеального газа, молекулы которого подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна.

Статистические следствия принципа Паули были развиты Э. Ферми (1925); статистика, основанная на этом принципе, поэтому и называется статистикой Ферми.

Впоследствии развитие квантовой механики, особенно благодаря Гейзенбергу и Дираку, позволило связать справедливость статистики Ферми (или Бозе — Эйнштейна) для различных элементарных частиц с антисимметрией (или симметрией) волновых функций по отношению к обмену координат двух тождественных частиц.

Свойства подчиняющегося статистике Ферми или Бозе — Эйнштейна газа немногим отличаются от предсказанных классическими законами идеальных газов (статистикой Больцмана), пока температура высока и плотность не очень велика. Отклонения становятся существенными при низких температурах и высоких плотностях; они имеют противоположный знак для двух новых статистик, а именно: в случае статистики Ферми давление оказывается более высоким, чем следовало бы из уравнения

идеальных газов, а в случае статистики Бозе — Эйнштейна оно получается более низким. Для обычного газа область температуры и давления, в которой эти отклонения существенны, совпадает с областью, где уже имеются очень большие отклонения от законов идеальных газов, связанные с действием сил между молекулами и с конечными размерами молекул; эти отклонения так велики, что они маскируют чисто статистический эффект.

Поэтому значение новых статистик в случае обычных газов невелико. Но статистика Ферми нашла интересное применение к изучению поведения электронов внутри металла; известно, что некоторые из электронов внутри металла могут двигаться от атома к атому и образуют таким образом нечто вроде электронного газа. Плотность газа так велика, что его статистические законы и уравнение состояния полностью отличаются от закономерностей идеальных газов, подчиняясь законам, предсказываемым статистикой Ферми. Следствия статистики Ферми для изучения электрических свойств металлов успешно развивались Зоммерфельдом (1927 г.), который сумел качественно интерпретировать большинство свойств металлов.

Ниже представлены главные результаты новых статистик.

Закон распределения: среднее число молекул, находящихся в одном квантовом состоянии (вполне определенном как по его внутреннему состоянию, так и по движению центра масс молекулы) равно

$$\frac{1}{Ae^{w/kT}}$$

в случае Больцмана;

$$\frac{1}{Ae^{w/kT}-1}$$

в случае Бозе — Эйнштейна;

$$\frac{1}{Ae^{w/kT}+1}$$

в случае Ферми; A — константа, w — энергия рассматриваемого состояния. Если выражение $Ae^{w/kT}$ много больше единицы, т. е. если вероятность заполнения состояния очень мала, то очевидно, что результаты трех статистик практически совпадают; в противоположном случае имеются значительные отличия между ними.

Различие между законом распределения Больцмана и законами распределения новых статистик приводит к разным уравнениям состояния идеального газа (под идеальным газом понимается газ, в котором силами между различными молекулами, можно пренебречь). Эти различия и соответствующие явления обычно называют *явлениями вырождения.*

Масштаб явлений вырождения определяется значением параметра

$$D=\frac{nh^3}{(2\pi mkT)^{3/2}}, \tag{26}$$

где n — число молекул на единицу объема и m — масса молекулы. Явления вырождения малы или велики в зависимости от того, мал или велик

параметр D по сравнению с единицей. Так, например, для идеального одноатомного газа, состоящего из N атомов и занимающего объем V при температуре T и давлении p, справедливо (по Больцману) классическое уравнение состояния идеального газа

$$pV = NkT.$$

Для новых статистик получаются различные уравнения состояния, которые в предельном случае малого вырождения можно записать в виде

$$pV = NkT \left\{1 \mp \frac{Nh^3}{2^{5/2} V (2\pi mkT)^{3/2}}\right\}. \tag{27}$$

Верхний знак относится к случаю статистики Бозе — Эйнштейна, а нижний — статистики Ферми. Таким образом, согласно выражению (27), отклонения от классического уравнения идеальных газов стремятся к нулю совместно с параметром вырождения. Если же D сравнимо с единицей (т. е. в предельном случае сильного вырождения), то законы вырожденного газа радикально отличаются от классических.

Например, оказывается, что в идеальном газе, подчиняющемся статистике Ферми, как давление, так и средняя кинетическая энергия молекул не равны нулю при абсолютном нуле; они стремятся к предельным величинам

$$P_0 = \frac{1}{20}\left(\frac{6}{\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2 n^{5/3}}{m}, \qquad L_0 = \frac{3}{40}\left(\frac{6}{\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2 n^{2/3}}{m}, \tag{28}$$

которые называются соответственно *давлением и энергией при абсолютном нуле*.

Аналогично можно найти, что для идеального газа, подчиняющегося статистике Ферми, теплоемкость C_v при постоянном объеме не является постоянной, как это следовало бы из статистики Больцмана, а уменьшается с температурой и стремится к нулю при $T = 0$.

Как уже было упомянуто, статистические характеристики существенны для объяснения электрических свойств металлов. В самом деле, электронный газ, который и определяет эти свойства, находится в условиях довольно сильного вырождения (фактически параметр D оказывается очень большим даже при высокой температуре из-за значительной концентрации и малой массы электронов), и поэтому его поведение со многих точек зрения совершенно отличается от поведения газа, подчиняющегося классическим законам.

ЛИТЕРАТУРА

1. *L. Boltzmann.* Leçons sur la théorie des gas. Páris, 1902.
2. *J. H. Jeans.* The Dynamical Theory of Gases. Cambridge, 1925.
3. *R. H. Fowler.* Statistical Mechanics. Cambridge, 1929.
4. *L. Brillouin.* Les statistiques quantiques et leurs applications. Páris, 1930.
5. *E. Fermi.* Molecole e cristalli. Bologna, 1934.

К статьям 61—72

Статьи 61—72 относятся к одному из наиболее плодотворных периодов творчества Ферми. В них излагаются результаты исследований по медленным нейтронам, ставших вершиной его экспериментальной деятельности в Италии. Чтобы составить представление о месте этих исследований в истории науки, следует обратиться к их обзору, данному самим Ферми в Нобелевской лекции 1938 г. (статья 80).

Хотя до 1934 г. Ферми занимался главным образом теоретической физикой, к этому времени он приобрел также некоторые навыки и опыт физика-экспериментатора, о чем свидетельствуют, например, статьи 23, 24, 32 и 56.

Обосновавшись в Риме и собрав вокруг себя молодых физиков, Ферми много размышлял над возможностью развития экспериментальной физики в Италии. Некоторые физики из его окружения, ставшие впоследствии на долгие годы его ближайшими сотрудниками, интересовались не столько теорией, сколько опытом, и часто вся эта группа обсуждала, какая область эксперимента выглядит наиболее перспективной. Хотя экспериментальное оборудование Римского института физики было почти целиком спектроскопическим и спектроскопические традиции были довольно сильны, в течение ряда лет чувствовалось, что спектроскопия достигла зрелости и что нужно переходить к ядерной физике, которая сулила наибольшие перспективы.

Между 1930 и 1934 гг. физики римской группы посетили ряд заграничных лабораторий с целью овладения экспериментальными методиками, неизвестными в то время в Италии. Наиболее подробно были осмотрены лаборатории Милликена в Пасадене (Разетти), Штерна в Гамбурге и Зеемана в Амстердаме (Сегре), Дебая в Лейпциге (Амальди) и Л. Мейтнер в Берлине (Разетти). Некоторые из нас пробыли в этих лабораториях по году и более, изучая различные экспериментальные методики; по возвращении в Рим мы подробно обсуждали увиденное. После бурного столкновения различных мнений было решено — главным образом под влиянием Ферми,— что лаборатория должна заняться ядерной физикой. Именно тогда Разетти, познакомившийся в Далеме с некоторыми ядерно-физическими методами, приступил к сооружению различных приборов и начал эксперименты, упоминание о которых можно найти во введении к статье 56.

Случай для перехода к действительно новому направлению в ядерной физике представился в 1934 г., когда И. Кюри и Ф. Жолио открыли искусственную радиоактивность. Ферми сразу же увидел, что перед этим направлением могут открыться огромные возможности, если для бомбардировки ядер использовать нейтроны. Именно такого рода случай и был нужен, чтобы в Риме начались масштабные эксперименты. Началу нейтронных опытов помогла счастливая случайность: у профессора Дж. Трабакки из Лаборатории здравоохранения, помещавшейся в Риме в том же здании, что и Физический институт, оказалось более одного грамма радия и установка для выделения из него эманации и приготовления радон-бериллиевых источников. Его чистосердечная помощь была неоценима: все нейтронные источники, которые использовались в 1934— 1937 гг., были приготовлены на этой установке. Опыты с нейтронами начались в 1934 г. во время пасхальных каникул. Ферми решил проверить на опыте свою идею о том, что нейтроны способны быть мощными снарядами для осуществления ядерных превращений. Собственными руками он сделал из алюминия несколько примитивных счетчиков Гейгера —

Мюллера, которые выглядели безобразно, но для поставленной цели служили исправно; затем он приступил к облучению нейтронами (от радон-бериллиевого источника) всех элементов в порядке возрастания атомного номера. Первый его источник был совсем слабый — всего 50 милликюри. В течение нескольких дней опыты не приносили успеха, но Ферми был человеком систематическим и упорно продолжал увеличивать Z. Он начал с водорода, затем последовали литий, бериллий, бор, углерод, азот, кислород — и все безуспешно. Наконец, однако, он добился успеха, получив ожидаемый результат на фторе.

Это произошло 25 марта 1934 г., и в «Ricerca Scientifica» было сразу послано письмо (статья 61) с сообщением об этом результате. Ферми, желавший как можно скорее продвинуть работу, попросил Амальди и Сегре помочь провести опыты. Сообщили об этом и Разетти (который находился тогда в Марокко), чтобы он мог побыстрее вернуться и принять участие в этой работе. Д'Агостино сначала не входил в нашу группу; он работал химиком в Лаборатории здравоохранения и в то время, когда делалась эта работа, был стипендиатом лаборатории М. Кюри в Париже. С самого начала Ферми, Амальди и я старались сделать работу как можно быстрее; мы так разделили свои обязанности: Ферми должен был выполнять значительную часть опытов и расчеты, Амальди предстояло заботиться о том, что мы теперь назвали бы электроникой, а я обеспечивал вещества для облучения, источники и прочее необходимое для работы. Подобное разделение труда отнюдь не было жестким, и каждый из нас участвовал во всех фазах работы. Мы продвигались очень быстро. Вскоре выяснилось, что для предстоящей работы была бы очень полезна химия, и нас очень обрадовала помощь профессионального химика Д'Агостино, когда тот приехал из Парижа на пасхальные каникулы. В то время мы едва были с ним знакомы, но вскоре стали близкими друзьями. Он так никогда и не воспользовался своим обратным билетом в Париж. Вскоре вернулся из своей поездки и Разетти.

Статьи 61, 62, [Б87], [Б88], [Б90] и [Б91] представляют собой подробные отчеты, которые очень быстро писались во время выполнения работы весной и летом 1934 г. Первое, что мы решили сделать, было очевидным — облучить все вещества, какие только могли попасть нам в руки. К счастью, мы получили небольшую субсидию от Национального совета по исследованиям в Риме — сумму около 20 000 лир ($\sim$ 1000 долларов в то время), которую могли расходовать совершенно свободно. Облучения продолжались весьма регулярно, и скоро мы идентифицировали реакции (n, p) и (n, α). Кроме того, было найдено, что во многих случаях нейтрон может создавать радиоактивные изотопы самого вещества мишени, но было совершенно неясно, является ли это результатом реакций $(n, 2n)$ или (n, γ). В то время мы еще думали, что нейтроны тем эффективней вызывают реакции, чем выше их энергия. Наконец, мы дошли до облучения урана (статьи [Б87], [Б88] и 63). У нас получались слабые активности, и поэтому было необходимо очищать уран от всех его дочерних β-активных продуктов, которые могли бы замаскировать любую полученную нами искусственную радиоактивность. Работа эта была очень утомительной, причем после очистки можно было работать совсем недолго, поскольку естественное возрастание β-активности в очищенном уране препятствовало длительному наблюдению искусственной активности. Нам казалось, что облучение урана должно привести к образованию трансурановых элементов, которые по своим свойствам, как ожидалось, аналогичны Re, Os, Ir, Pt. Мы начали искать доказательства

того, что при облучении урана нейтронами ни один из элементов между свинцом и ураном не образуется. Это было доказано и доказано правильно, однако от нас почему-то ускользнула возможность деления урана, хотя на нее особо обращала наше внимание И. Ноддак, предсказавшая такой эффект в присланной нам статье. Причина нашей слепоты не вполне ясна; несколько лет спустя Ферми говорил как-то, что имевшиеся в то время данные по дефектам массы были ошибочны, и на основе той информации деление не представлялось ему возможным.

Наступили летние каникулы, которые Ферми провел в Южной Америке (см. статью [Б97]). По возвращении в Европу он не сразу поехал в Рим, а остановился в Англии из-за Международной конференции по физике (см. статьи 66 и [Б99]), на которой сообщил результаты работ, выполненных в Риме.

Тем же летом мы с Амальди отправились в Кембридж (Англия). Лорд Резерфорд внимательно следил за нашей работой с самого ее начала, и, получив одно из первых писем в «Ricerca Scientifica», он писал Ферми:

«23 апреля 1934 г.

Дорогой Ферми,

Я должен поблагодарить Вас за любезно присланный мне отчет о Ваших недавних опытах по созданию с помощью нейтронов временной радиоактивности в целом ряде элементов. Ваши результаты очень интересны и нет никакого сомнения, что в дальнейшем нам удастся получить больше сведений о действительном механизме таких превращений. Отюдь не очевидно, что этот процесс всегда будет так же прост, каким он кажется в случае наблюдений Жолио.

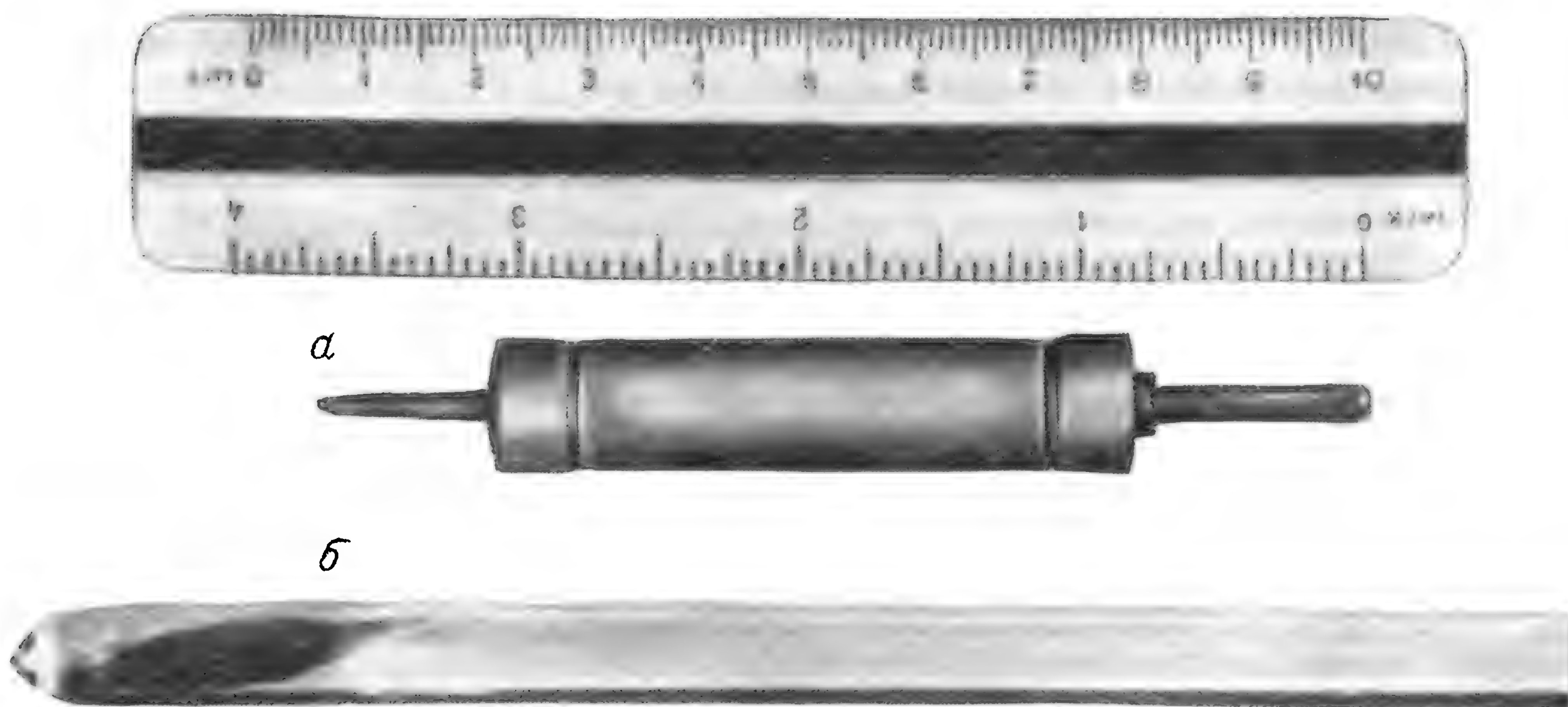
Поздравляю Вас с успешным побегом из сферы теоретической физики! По-видимому, Вы откопали неплохое занятие для начала. Возможно, Вам будет интересно узнать, что профессор Дирак также проводит некие опыты. Это кажется хорошим предзнаменованием для будущего теоретической физики!

Поздравления и лучшие пожелания,
искренне Ваш

Резерфорд.»

Будучи в Кембридже, мы подробно обсудили с Резерфордом наши опыты. Выполненная к тому времени нашей группой работа была обобщена в статье, которую лорд Резерфорд представил Королевскому обществу (статья 65). Рукопись этой статьи готовилась в Риме и была прислана ему в Кембридж. Резерфорд сразу же очень внимательно прочел ее, сделал несколько исправлений, чтобы улучшить наш английский, и передал в Королевское общество. Я спросил его, нельзя ли как-то ускорить публикацию статьи, на что он немедленно ответил: «А зачем же, по-вашему, я президент Королевского общества?» К сожалению, в то время я недостаточно хорошо понимал английский язык Резерфорда и упустил некоторые из его замечаний.

Одним из вопросов, представлявшихся нам особенно важными, был вопрос о том, в каких реакциях — (n, γ) или $(n, 2n)$ — образуются изотопы ядер мишени. Мы пробовали решить эту задачу перекрестной бомбардировкой. В Кембридже над аналогичной проблемой тогда работали Бьердж и Уэсткот, и мы объединили наши усилия. Была обнаружена реакция, которая, по нашему мнению, являлась четким примером реакции (n, γ). Этот результат мы считали очень значительным, и несмотря на ошибочность части аргументов, на которых основывались наши выводы, он оказался верным.



Счетчик Гейгера—Мюллера (*а*) и типичный нейтронный источник (*б*), использовавшиеся Э. Ферми в работах по искусственной радиоактивности

В сентябре мы с Амальди вернулись в Рим и сразу же попытались подтвердить наши выводы о реакциях (n, γ) и (n, $2n$), бомбардируя другие вещества, отличные от использовавшихся Бьерджем и Уэсткотом. Нам показалось, что мы нашли еще один четкий пример реакции (n, γ) в алюминии, о чем немедленно было сообщено Ферми, все еще находившемуся на конференции в Лондоне. На одном из заседаний он упомянул о нашем эксперименте. Вскоре после этого я простудился и несколько дней не мог ходить в лабораторию. Амальди попытался повторить наши опыты и обнаружил для облученного алюминия другой период распада, а это означало, что наша так называемая реакция (n, γ) не имеет места. Спешно об этом сообщили Ферми; он возмутился тем, что в его выступлении оказался результат, который, как теперь выяснилось, видимо, был ошибочен. Он сурово осудил нас и не скрывал своего недовольства. Вся эта история начинала сильно беспокоить нас, поскольку мы не могли найти никаких ошибок ни в одном из опытов, результаты которых не согласовывались между собой. В это время к нам присоединился Б. Понтекорво, только что защитивший дипломную работу и подававший большие надежды. Ему предложили сотрудничать с нами, и с тех пор он участвовал в нашей работе...

Э. Сегре

Ниже я подробно передам мои воспоминания об обстоятельствах, которые привели к открытию процесса замедления нейтронов. Речь будет также идти о работах Ферми с медленными нейтронами, которые велись в течение одного года с момента открытия их существования (октябрь 1934 г.).

После окончания Университета я был оставлен ассистентом кафедры физики. Тема моих исследований была выбрана Ферми и Сегре. Это была работа по классической

спектроскопии в направлении, открытом теоретическим исследованием Ферми о смещении высших линий спектральных серий под действием давления газов (см. статью 64 и комментарий к ней) и экспериментами Амальди и Сегре.

Спектроскопия уже тогда была «старой» областью физики, и новичку было трудно по-настоящему войти в курс дела. Для понимания же оригинальных работ по ядерной физике — новой области науки, — не требовалось большого запаса знаний; к тому же в физических журналах появлялось довольно мало статей по ядерной физике. В 1934 г. практически уже никто в Институте физики не занимался спектроскопией: весь коллектив лихорадочно исследовал радиоактивность, наведенную нейтронами, и на семинарах Института царили «ядерные» доклады. Все эти обстоятельства привели к тому, что мое сердце было гораздо ближе к нейтронным исследованиям Ферми и сотрудников, чем к моей спектроскопической работе, которую я закончил летом 1934 г. Поэтому я был очень рад, когда по возвращении в Рим после каникул мне предложили помочь в нейтронных экспериментах.

Амальди и Понтекорво должны были выполнить количественные измерения относительных активностей, наводимых нейтронами в разных веществах. Предыдущие аналогичные измерения Ферми и сотрудников носили только качественный характер. В это время (неизвестно почему) игнорировался эффект рассеяния и считалось, что действуют только первичные нейтроны из источника Rn + Be; тогда наведенная в образце активность должна быть обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника, если это расстояние гораздо больше размеров источника и образца; но при таких расстояниях в образце наводится ничтожная активность. Итак, наша задача состояла в выборе удобной геометрии опытов по облучению в сравнимых условиях разных элементов (в виде металлов, жидкостей, распыленных веществ) на малом расстоянии от нейтронного источника. Но оказалось, что даже в простом случае, когда измерялись активности только одного образца (стандартного серебряного цилиндра), было трудно получить воспроизводимые результаты.

Как стало ясно впоследствии, это было связано с влиянием рассеяния и замедления нейтронов окружающими предметами. Но вначале, исходя из неявно сформулированной догмы, что «нет других нейтронов, кроме первичных», мы не могли найти никакого объяснения нерегулярности наводимой активации. Первым шагом к решению этой загадки стало измерение активности нашего стандартного цилиндра, когда он находился на расстоянии $R \sim 20$ *см* от источника, причем цилиндр и источник помещались в домик из свинцовых кирпичей, который защищал экспериментаторов от излучения. Закон R^{-2} привел бы к ничтожно малой активности, что в отсутствие домика и было проверено особым экспериментом. Но в домике закон R^{-2} как будто не действовал. Активность в домике на расстоянии 20 *см* была вполне заметна. Мы с Амальди были совершенно уверены в реальности влияния свинца и назвали его «эффектом castelleto», что означает «эффект свинцового за́мка» (позднее стало ясно, что речь идет о неупругом рассеянии нейтронов на свинце). Интересна была реакция Ферми и Разетти. Разетти с его скептическим духом просто не поверил в наш результат. Ферми же сказал, что следует продолжать опыт, но как будто не проявил особого интереса. Как стало ясно позже, это было ложное впечатление.

Через несколько дней Ферми непосредственно включился в решение «свинцовой загадки». Он предложил измерить активность, наводимую в серебряном цилиндре, ког-

да между ним и источником находится узкий свинцовый клин толщиной несколько сантиметров. Этот клин уже был готов, но... измерений с ним ни Ферми, ни другие не проводили. Не сказав никому ни слова, утром 22 октября 1934 г. Ферми решил измерить радиоактивность серебряного цилиндра, «пропуская» нейтроны от источника не через свинцовый, а через парафиновый клин тех же размеров, который он сам быстро изготовил. Результат был ясным: парафиновый «поглотитель» не уменьшал активности, а определенно (хотя и мало) увеличивал ее. Ферми вызвал всех нас и сказал: «Это происходит, вероятно, из-за водорода в парафине; если немного парафина дает заметный эффект, посмотрим, как будет действовать большое его количество». Опыт был сразу же выполнен сначала с парафином, а затем с водой. Результаты были потрясающими: активность серебра в сотни раз превысила ту, с которой мы имели дело ранее! Ферми прекратил шум и волнение сотрудников знаменитой фразой, которую, как говорят, он повторил через 8 лет при пуске первого реактора: «Пошли обедать».

Так был обнаружен эффект Ферми (замедление нейтронов), открывший новую главу ядерной физики, а также новую область техники, как мы говорим сегодня,— атомную технику.

Я так подробно рассказал об открытии медленных нейтронов, поскольку здесь очень существенными были как случайные обстоятельства, так и глубина и интуиция великого ума. Когда мы спросили Ферми, почему он поставил парафиновый, а не свинцовый клин, он улыбнулся и насмешливо произнес C.I.F. (Con Intuito Fenomenale) По-русски это звучало бы примерно, как П.Ф.И. (по феноменальной интуиции).

Было бы неправильно, если бы у читателя вследствие этой ПФИ-вой бравады создалось впечатление, что Ферми нескромен. Он был непосредственным, очень простым и скромным человеком, но он просто был уверен в своих силах. Кстати, когда после обеда в этот знаменитый день он возвратился в Институт и с удивительной ясностью объяснил нам эффект парафина, введя понятие о замедлении нейтронов, он совершенно искренне сказал: «Как глупо, что мы открыли явление случайно и не сумели его предсказать». Ферми сразу же угадал, что нейтроны, теряя энергию в столкновениях с водородом, замедляются вплоть до энергии теплового движения и что как раз медленные нейтроны очень эффективно могут наводить радиоактивность в нашем детекторе. Однако со свойственной ему научной осторожностью он подчеркнул, что идея о «тепловых» нейтронах остается пока гипотезой и ее проверку можно осуществить только при помощи обнаружения влияния температуры парафина или прямого измерения скоростей нейтронов. Первая попытка наблюдения влияния температуры на наведенную активность, кстати, была сделана Ферми очень скоро, но опыт, состоявший в поисках различия активации детектора при холодном и горячем парафине, не дал положительного результата, и только через несколько месяцев Муну и Тилману в Англии, а также Ферми и сотрудникам удалось наблюдать это явление (см. статьи 70 и 71).

Уже в тот же день, сразу после обеда, был выполнен ряд опытов, показавших, что эффект парафина (и воды) связан в основном с водородом, а не с другим элементом, и что он обусловлен нейтронами, а не γ-лучами от источника Rn + Be.

Кроме того, было найдено правило, согласно которому чувствительность к водородсодержащим веществам обнаруживают не все активности, а только те, которые соответствуют образованию радиоактивного изотопа бомбардируемого элемента. Это был очень важный результат, и связь реакции (n, γ) с эффектом водорода объяснила ряд

трудностей, о которых упоминал Сегре в своем комментарии; в частности, стало ясно, что в алюминии медленные и быстрые нейтроны образуют активности с различными периодами.

В ту же ночь 22 октября мы все собрались в доме Ферми (или Амальди, не помню точно). Здесь в ясном телеграфном стиле была написана первая работа по замедлению нейтронов (см. статью 67), которая должна была стать началом новой серии писем в «Ricerca Scientifica» под названием «Влияние водородсодержащих веществ на радиоактивность, наведенную нейтронами».

Уже через две недели было направлено в печать второе (и последнее) письмо (см. статью 68) из этой серии, в котором описано обнаружение гигантских сечений поглощения в таких элементах, как B, Cd и т. д.

Ферми доложил об удивительных свойствах медленных нейтронов директору Института, сенатору профессору Корбино. Это был умнейший человек, первоклассный физик, который, однако, тогда уже не вел научной работы и был одним из руководителей энергетической промышленности Италии. Корбино оживленно реагировал на сообщение Ферми и сказал: «Вы должны обязательно добиться патента на ваш метод получения медленных нейтронов». И сейчас не могу забыть искреннего, сердечного, детского смеха Ферми при намеке Корбино на то, что работы, о которых шла речь, могли бы иметь практическое значение. Корбино же на общее веселье Ферми и его сотрудников довольно сухо заметил: «Вы молоды и ничего не понимаете».

Конечно, Корбино был прав: этот патент, который был оформлен вначале в Италии, а затем и в других странах, оказался очень полезным для изобретателей после того (1950 г.), как замедление нейтронов стало широко использоваться. Среди авторов патента, кроме авторов статьи 67, были также Д'Агостино, не участвовавший в чисто физических работах, и профессор Трабакки — директор Лаборатории здравоохранения, который изготовил для нас источники Rn + Be (и который, кстати, среди нас имел прозвище «Божественное провидение»).

Первая задача, которая возникла при наведении мало-мальского порядка в изучении десятков активностей, состояла в измерении коэффициента α (чувствительности к водородсодержащим веществам данной активности). Этот коэффициент определялся как отношение активности при бомбардировке исследуемого элемента нейтронами в некоторых стандартных условиях в парафине «бесконечных» размеров к активности без парафина в этих же условиях, и для различных активностей изменялся от 1, соответственно реакциям под действием быстрых нейтронов, до нескольких десятков в случае реакций (n, γ) (работы [Б103, Б104] и [Б107]).

Открытие замедляющего эффекта водорода вызвало необходимость решить ряд новых проблем; и скоро совместно с изучением радиоэлементов, образованных нейтронами, важную роль в работе стали играть уже исследования свойств самих нейтронов (замедление, рассеяние, поглощение и т. д.).

Результаты работ, выполненных в первые три месяца после открытия явления замедления нейтронов, достаточно подробно изложены в статье 69, представленной Резерфордом в «Proceedings of Royal Society». В этой статье содержатся практически все основные идеи физики медленных нейтронов, за исключением, конечно, важнейшего вопроса о «группах нейтронов» и нейтронных резонансах, который, кстати, Ферми удалось полностью обосновать и разобрать через год (см. статьи [Б112—Б117], 73, 74).

Как видно, темп работ был потрясающим! При этом в лаборатории никогда не ощущалось спешки, и Ферми был всегда спокоен.

Помимо уже упомянутых важных исследований, выполненных в эти три месяца, я хотел бы упомянуть следующие.

1. Были обнаружены и систематически исследованы γ-лучи от захвата медленных нейтронов (статьи [Б103] и 69).

2. В случае бора и лития, у которых большие сечения поглощения медленных нейтронов не связаны с заметной интенсивностью γ-лучей, были обнаружены (статьи [Б104, Б107] и 69) реакции под действием медленных нейтронов с испусканием заряженных частиц [реакция (n, α)].

3. Обнаружено и правильно интерпретировано явление замедления нейтронов в неупругих соударениях со свинцом и в упругих соударениях с углеродом (статьи [Б104] и 69). Итак, был пролит свет на первую нашу загадку «свинцового за́мка».

4. Измерено сечение рассеяния тепловых нейтронов в парафине и впервые исследовано пространственное распределение медленных нейтронов в парафине и воде вокруг источника быстрых нейтронов (работы [Б103] и 69).

С теоретической точки зрения Ферми уже в это время довольно глубоко понимал как фазу замедления нейтронов, так и фазу диффузии тепловых нейтронов. Что же касается теоретической стороны, относящейся к ядерной физике, Ферми в 1935 г. был озабочен тем, что большим значениям сечений поглощения не соответствовали большие сечения рассеяния. Эта загадка вместе с проблемой интерпретации нейтронных резонансов (предмет интенсивных теоретических и экспериментальных работ Ферми в следующем году) была разрешена знаменитой работой Нильса Бора, в которой было введено понятие составного ядра. В это время Ферми думал, что сечение поглощения медленных нейтронов в широком интервале энергий должно быть обратно пропорциональным скорости нейтронов (см. статью 69). Как мы знаем сейчас, это только часть правды. Однако, по словам Сегре, «...представления о длине рассеяния и возможности резонансов не покидали головы Ферми. Действительно, понятие длины рассеяния и соответствующие типичные диаграммы Ферми развивал уже в 1933 г. для того, чтобы объяснить некоторые спектроскопические явления, экспериментально обнаруженные Амальди и Сегре (см. статью 64). У Ферми была сильно развита способность находить аналогии в явлениях, на первый взгляд совсем не связанных между собой, и, к нашему удивлению, он безо всякого труда перенес теорию смещения спектральных линии на нейтронную физику. В это время Ферми сделал также ряд вычислений, относящихся к поведению нейтронов в водородсодержащих средах, при помощи подхода, который сегодня называется методом Монте-Карло. В то время он не распространялся об этом, и я узнал это лишь много лет спустя. Это экспериментирование с теорией замедления нейтронов, как мы увидим, дало свои плоды на следующий год...»

После открытия эффекта замедления систематически проводились и облучения урана (и тория) с парафином и без него (см. статьи 69, [Б108] и 71). Однако загадка множественности обнаруженных активностей не была решена Ферми; для этого потребовалось открытие деления Ганом и Штрассманом (1939 г.). Сейчас мне кажется чудом, что Ферми с его глубиной и интуицией не сумел теоретически предугадать процесса деления (см., однако, выше комментарий Сегре).

Что же касается экспериментов с ураном, то группе Ферми в это время не повезло: деление могло быть открыто экспериментально в Риме в январе 1935 г., если бы не случайные обстоятельства. Несколько слов об этом. Среди многочисленных активностей, вызванных в уране и тории нейтронами, согласно Ферми, могли бы находиться и α-активности. Эти α-активные радиоэлементы с периодом больше нескольких секунд искались, но не были найдены. Тогда была рассмотрена возможность того, что при бомбардировке урана и тория медленными нейтронами α-частицы испускаются мгновенно, как это было найдено нами в боре. Аппаратура для наблюдения α-частиц была той же самой, которая] использовалась для экспериментов с бором. Итак, образец из окиси урана бомбардировался в парафине медленными нейтронами; образец находился перед малой импульсной ионизационной камерой, соединенной с линейным усилителем, способным регистрировать импульсы ионизации от α-частиц. Так как ожидалось, что искомые α-частицы имеют пробег больше, чем естественные α-частицы от урана, то с целью уменьшить фон последних перед урановым образцом была помещена алюминиевая фольга толщиной, эквивалентной 5 *см* воздуха. Именно эта фольга и помешала наблюдению больших импульсов ионизации, обусловленных осколками деления! Не раз в 1939 г. и позже сотрудники Ферми обсуждали случай со «зловредной» алюминиевой фольгой и задумывались над вопросом: «Допустим, что мы в 1935 г. наблюдали большие импульсы ионизации от урана; сумел бы Ферми понять явление, т. е. открыть деление?»

Работой 69, точнее, написанной позднее работой 71, заканчивается тот период «нейтронной» деятельности Ферми, который я решил несколько прокомментировать. Уже после летних каникул (сентябрь 1935 г.) открылась новая «нейтронная» фаза деятельности Ферми, о которой рассказывает Э. Амальди в комментарии к статьям 73 и 74.

Теперь несколько слов о тех статьях из этого цикла работ, о которых не упоминалось выше. Статьи Б97, Б100, Б111 и В126 были написаны с целью полупопулярного изложения или по другим причинам, важным лишь для того времени.

Обстоятельные статьи [Б93, Б94] и [Б109], содержание которых полностью излагается в статьях 65 и 69, были написаны по-итальянски по следующим причинам. Из коллектива сотрудников, работавших вместе с Ферми в период 1934—1938 гг., только Ферми и Разетти достигли вершины их карьеры, т. е. они уже возглавляли университетские кафедры. Другие же сотрудники Ферми находились, так сказать, в начале их университетской карьеры. Далее, для участия в конкурсе на присуждение различных премий и университетских кафедр в Италии в это время большое значение имели работы, написанные по-итальянски, в которых должен быть ясен вклад соискателя в дан ную работу. Итак, опубликование работы [Б93], подписанной Ферми, и работы [Б109], подписанной Ферми и Разетти, было равносильно заявлению, что за ряд нейтронных работ, подписанных только Амальди, только Сегре или только Понтекорво, авторы отвечали полностью. Это было явным преувеличением и свидетельствует о крайне благородном отношении Ферми к своим сотрудникам.

Б. Понтекорво

61

РАДИОАКТИВНОСТЬ, НАВЕДЕННАЯ НЕЙТРОННОЙ БОМБАРДИРОВКОЙ. I *

В этом письме я хочу сообщить о некоторых опытах, поставленных, чтобы выяснить, не вызывает ли нейтронная бомбардировка наведенной радиоактивности — явления, аналогичного наблюдавшемуся супругами Жолио при облучении α-частицами.

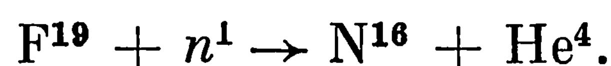
Я пользовался следующей аппаратурой: источником нейтронов служила стеклянная трубочка, содержавшая порошок бериллия и радон. Используя примерно 50 милликюри радона (предоставленного мне проф. Дж. К. Трабакки, которому я хотел бы выразить здесь свою глубокую признательность), можно было получить более 100 000 нейтронов в секунду; они сопровождаются, разумеется, очень интенсивным γ-излучением, которое, однако, не вносит никаких помех в опыты подобного рода. Изучаемые элементы содержались в маленьких цилиндриках, которые — в течение времени от нескольких минут до нескольких часов — подвергались действию излучения этого источника.

Затем они быстро подносились вплотную к счетчику с проволочным электродом [1], наружная стенка которого представляла собой алюминиевую фольгу толщиной около 0,2 *мм*, позволявшую, таким образом, β-лучам попасть в счетчик. До сих пор эксперимент дал положительный результат для двух элементов.

Алюминий. Алюминиевый цилиндрик, облучавшийся нейтронами примерно в течение двух часов и поднесенный затем к счетчику, в первые минуты значительно увеличивает скорость счета — на 30—40 импульсов в минуту. Со временем этот эффект ослабевает, убывая вдвое примерно за 12 минут.

Фтор. Фтористый кальций, облучавшийся несколько минут и затем быстро поднесенный к счетчику, вызывал увеличение числа импульсов. Эффект быстро затухает, уменьшаясь вдвое примерно за 10 секунд.

Возможная интерпретация этих явлений состоит в следующем. Бомбардируемый нейтронами фтор распадается с испусканием α-частицы. Ядерная реакция, вероятно, такова:



$$F^{19} + n^1 \rightarrow N^{16} + He^4.$$

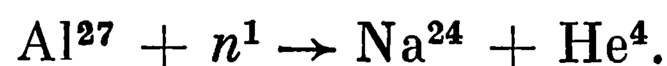
Возникающий при этом азот с атомным весом 16, испустив β-частицу, мог бы затем превратиться в O^{16}. Аналогичное объяснение можно было

---

* *Radioattività indotta da bombardamento di neutroni*. I. Ric. Scientifica, 1934, 5 (1), 283.

[1] Счетчик Гейгера — Мюллера. (*Прим. ред.*)

бы принять и для алюминия; при этом возможной ядерной реакцией будет



$$Al^{27} + n^1 \rightarrow Na^{24} + He^4.$$

Образовавшийся таким путем Na^{24} мог бы оказаться новым радиоактивным элементом, превращающимся в Mg^{24} с испусканием β-частицы.

Если такая интерпретация верна, то здесь мы имеем дело с искусственным образованием радиоактивных элементов, излучающих обычные β-частицы (в отличие от найденных Жолио веществ, которые испускают позитроны). В частности, в случае азота должно быть два радиоактивных изотопа: обнаруженный Жолио N^{13}, который, испуская позитрон, превращается в C^{13}, и N^{16}, который излучает электрон и переходит в O^{16}.

В настоящее время продолжаются опыты, в которых исследуются другие элементы и более детально изучается само явление.

Рим, 25 марта 1934 г.

См. вводные замечания к статье 61

62

РАДИОАКТИВНОСТЬ, НАВЕДЕННАЯ НЕЙТРОННОЙ БОМБАРДИРОВКОЙ. II *

С помощью метода, описанного в предыдущем письме, были продолжены опыты по изучению радиоактивности, образующейся во многих других элементах при бомбардировке нейтронами (полученными из препарата радон + бериллий).

Железо. Период полураспада около 2 *час*. В случае этого элемента можно было провести химическое разделение. Образующийся активный продукт является, по-видимому, марганцем, поскольку дает все характерные для этого металла реакции.

Кремний. Эффект очень сильный, период около 3 *мин*. Испускаемые электроны были сфотографированы в камере Вильсона. Среднее время жизни получается одинаковым как для металлического кремния, так и для кварца.

Фосфор. Период около 3 *час*, эффект — сильный. Электроны сфотографированы в камере Вильсона. Химическое отделение образовавшегося активного продукта дает для него характеристики кремния.

Хлор. Обнаруживает эффект с периодом, наибольшим из всех исследованных до сих пор элементов.

Ванадий. Период 5 *мин*.

Алюминий. В подтверждение результатов предыдущего письма электроны были сфотографированы в камере Вильсона.

Медь. Эффект несильный, период около 6 *мин*.

Мышьяк. Период около 2 дней.

Серебро. Сильный эффект, период около 2 *мин*.

Теллур. Период около 1 *час*.

Иод. Сильный эффект; период около 30 *мин*.

Хром. Эффект сильный, период около 6 *мин*. Электроны сфотографированы в камере Вильсона.

Барий. Слабый эффект, период около 2 *мин*.

Элементы Na, Mg, Ti, Zn, Zr, Se, Sb, Br, La также обнаруживают некоторый эффект с различными интенсивностями и периодами.

Некоторые элементы обладают, по-видимому, двумя и более периодами полураспада, что может быть обусловлено либо несколькими образую-

---

* *Radioattività provocata da bombardamento di neutroni*. II. Ric. Scientifica, 1934, 5 (1), 330—331.

щимися изотопами, либо — последовательными радиоактивными превращениями. Продолжаются опыты по уточнению этих результатов и с целью изучения более широкого круга элементов.

Ядерная реакция, которая влечет за собой эти явления, в различных случаях может быть разной. Выполненное в опытах с железом и фосфором химическое разделение указывает, по-видимому, на то, что, по крайней мере, в этих двух случаях происходит поглощение нейтрона и испускание протона. Нестабильные продукты — соответственно марганец и кремний — превращаются в исходный элемент, испустив β-частицу.

Химическое разделение элементов выполнялось д-ром О. Д'Агостино; в физической части работы участвовали д-ра Э. Амальди и Э. Сегре.

Институт физики Римского университета

К статье 63

Обстановка, в которой была выполнена эта работа, описана в комментарии Сегре к статьям 61—72. Напомню, что активности, которые Ферми принял за трансурановые элементы, в действительности являются продуктами деления, открытого пять лет спустя. Здесь я хотел подчеркнуть крайнюю осторожность формулировок Ферми: «Эти результаты... позволяют предположить возможность того, что атомный номер соответствующего элемента может быть больше 92». Кстати, Ферми очень переживал случай с элементом 93, хотя его работы никак не затормозили открытия деления; существование активностей с $Z > 92$ было предложено, как видно, с чрезвычайной осторожностью.

Б. Понтекорво

63

ВОЗМОЖНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ С АТОМНЫМ НОМЕРОМ ВЫШЕ 92 *

До недавнего времени считалось общепринятым, что возникающий при искусственном расщеплении атом обычно должен соответствовать стабильному изотопу. Супруги Жолио первыми обнаружили, что это не обязательно так; в некоторых случаях атом-продукт может быть радиоактивным (с измеримым средним временем жизни) и переходить в устойчивую форму лишь по излучении позитрона.

Количество элементов, которые могут активироваться при бомбардировке как α-частицами (Жолио), так и протонами (Кокрофт, Гилберт, Уолтон) или дейтронами (Крейн, Лауритсен, Хендерсон, Ливингстон, Лоуренс), неизбежно ограничивается тем обстоятельством, что вследствие кулоновского отталкивания расщепить можно только легкие элементы.

В случае нейтронной бомбардировки такого ограничения нет. Высокая эффективность этих частиц в осуществлении расщеплений вполне компенсирует слабость существующих нейтронных источников по сравнению с источниками α-частиц и протонов. Действительно, было показано [1], что значительное число элементов (47 из 68 изученных до настоящего времени) любого атомного веса может активироваться под действием нейтронных источников, состоящих из стеклянной трубочки, наполненной

---

* *Possible Production of Elements of Atomic Number Higher than* 92. Nature, 1934, **133**, 898, 899.

[1] E. Fermi. Ric. Scient., 1934, 5 (1), 283, 330 (статьи 61 и 62); Nature, 1934, 133, 757; E. Amaldi, O. D'Agostino, E. Fermi, F. Rasetti, E. Segrè. Ric. Scient., 1934, 5 (1), 452.

порошком бериллия и радоном (до 800 *мкюри*). Такой источник обеспечивает выход около одного миллиона нейтронов в секунду.

Было установлено, что все активируемые таким способом элементы (с интенсивностью, достаточной для магнитного анализа испускаемых частиц по знаку заряда) дают только отрицательные электроны. Теоретически это понятно, поскольку поглощение бомбардирующего нейтрона создает избыток числа нейтронов, имеющихся в ядре; по этой причине устойчивое состояние достигается обычным путем превращения нейтрона в протон, что связано с испусканием β-частицы.

В ряде случаев оказалось возможным провести химическое отделение β-активного элемента, пользуясь обычной методикой добавления небольших количеств соседних элементов в облученное вещество. С помощью химического анализа эти элементы затем отделялись и порознь исследовались на β-активность счетчиком Гейгера — Мюллера. Активность всегда целиком следовала за определенным элементом, с которым, таким образом, можно было отождествить активный элемент.

В трех случаях (алюминий, хлор, кобальт) активный элемент, образовавшийся при бомбардировке элемента с атомным номером Z, имеет атомный номер $Z - 2$. В четырех случаях (фосфор, сера, железо, цинк) атомный номер активного продукта равен $Z - 1$. В двух случаях (бром, иод) активный элемент является изотопом бомбардируемого.

Эти факты указывают, по-видимому, на то, что возможны три основных процесса: а) захват нейтрона с мгновенным испусканием α-частицы; б) захват нейтрона с испусканием протона; в) захват нейтрона с излучением γ-кванта, чтобы избавиться от избытка энергии. С точки зрения теории вероятность процессов «а» и «б» очень сильно зависит от энергии испущенной α- или Н-частицы, и тем сильнее, чем выше атомный вес элемента. При современном состоянии теории ядра вероятность процесса «в» можно оценить лишь очень приближенно; тем не менее можно, по-видимому, заключить, что она в 100 или 1000 раз меньше наблюдаемой величины.

Нам казалось, что особое внимание стоит уделить тяжелым радиоактивным элементам — торию и урану, поскольку общая неустойчивость ядер в этой области атомных весов могла бы повести к последовательным превращениям. По этим соображениям автор в сотрудничестве с Ф. Разетти и О. Д'Агостино предпринял исследование этих элементов.

Опыты показали, что оба элемента, предварительно очищенные от обычных активных примесей, могут сильно активироваться при бомбардировке нейтронами. Начальная наведенная активность соответствовала в наших экспериментах примерно 1000 импульсам в минуту в гейгеровском счетчике, изготовленном из алюминиевой фольги толщиной 0,2 *мм*. Кривые распада этих активностей показывают, что явление оказывается довольно сложным. Предварительное изучение активности тория показало, что у этого элемента, по меньшей мере, два периода.

Случай урана изучен лучше; было хорошо установлено наличие перио-

дов полураспада около 10 *сек*, 40 *сек*, 13 *мин* плюс еще два периода: от 40 *мин* до одного дня. Большая неопределенность кривых распада, обусловленная статистическими флуктуациями, делает весьма затруднительным выяснение того, представляют ли эти периоды последовательные или альтернативные процессы распада.

Были сделаны попытки химической идентификации β-активного элемента с периодом 13 *мин*. Общая схема этих опытов состояла в добавлении к облученному веществу (очищенный от своих продуктов распада уранилнитрат в концентрированном растворе) такого количества обыкновенного β-активного элемента, чтобы счетчик давал несколько сот импульсов в минуту. Если удается показать, что наведенную активность, идентифицируемую по характерному периоду, можно химически отделить от добавляемой активности, то резонно предположить, что эти активности не принадлежат одному элементу.

Следующая реакция позволяет отделить 13-минутный продукт от большинства наиболее тяжелых элементов. Облученный раствор урана разбавляется 50%-ной азотной кислотой; добавляется небольшое количество марганцевой соли, после чего при добавлении к кипящему раствору хлората натрия марганец осаждается в виде двуокиси (MnO_2). Этот осадок двуокиси марганца содержит значительную долю активности.

Эта реакция сразу же показывает, что 13-минутная активность не есть изотоп урана. Для проверки возможности того, что она связана с элементом 90 (торий) или 91 (протактиний), мы повторяли опыт, по меньшей мере, десять раз, добавляя такое количество урана-$X_1 + X_2$, которое соответствовало примерно 2000 импульсам в минуту. В качестве удерживающих носителей урана-X добавлялось также некоторое количество церия и лантана. В этих условиях марганцевая реакция уносила только 13-минутную активность, и никаких следов от 2000 импульсов урана-X_1 (период 24 дня) в осадке найдено не было. Уран-X_2 также не был обнаружен, хотя вся процедура проводилась менее чем за две минуты после осаждения двуокиси марганца, так что несколько сот импульсов от урана X_2 (период 75 *сек*) было бы легко заметить.

Были получены аналогичные данные, исключающие атомные номера 88 (радий) и 89 (актиний). Для этого использовались мезоторий-1 и -2, причем добавлялись барий и лантан; как и в первом случае, результат был полностью отрицателен. Возможное выпадение в осадок урана-X_1 и мезотория-1, которые излучают β-лучи, недостаточно проникающие, чтобы быть зарегистрированными нашими счетчиками, обнаружилось бы при последующем образовании соответственно урана-X_2 и мезотория-2.

Наконец, мы добавляли в облученный раствор урана немного неактивного свинца и висмута и показали, что условия реакции с участием двуокиси марганца можно регулировать так, чтобы получить осадок с 13-минутной активностью, но без свинца и висмута.

Итак, мы исключили возможность того, что 13-минутная активность обусловлена изотопами урана (92), протактиния (91), тория (90), актиния

(89), радия (88), висмута (83), свинца (82). Ее поведение исключает также экацезий (87) и радон (86).

Эти отрицательные результаты по отождествлению 13-минутной активности с большим числом тяжелых элементов позволяют предположить возможность того, что атомный номер соответствующего элемента может быть больше 92. Если это элемент 93, он должен быть химическим гомологом марганца и рения. В какой-то мере эту гипотезу поддерживает тот наблюдаемый факт, что 13-минутная активность уносится осадком сернистого рения, нерастворимого в соляной кислоте. Поскольку, однако, несколько элементов легко осаждается в такой форме, этот довод нельзя считать очень веским.

Отличить от предыдущей возможность атомных номеров 94 и 95 нелегко, так как их химические свойства, вероятно, весьма сходны. Ценную информацию о рассматриваемых процессах можно было бы получить, изучая возможное испускание тяжелых частиц. Тщательный поиск таких тяжелых частиц еще не был проведен, поскольку для их наблюдения требуется, чтобы активный продукт находился бы в виде очень тонкого слоя. Поэтому в настоящее время представляется преждевременным строить какую-либо определенную гипотезу о цепочке рассматриваемых распадов.

К статье 64

Происхождение этой статьи связано с экспериментальными работами Амальди и Сегре, изучавших спектр поглощения щелочных металлов вблизи границы серий s и p. Было найдено, что в присутствии постороннего газа под давлением линии поглощения сдвигались без чрезмерно большого уширения: можно было наблюдать даже термы от 20 p до 30 p. Отсутствие ожидавшегося уширения и сдвиг энергетических уровней были довольно загадочны; мы много говорили об этом с Ферми. Ему пришло в голову, что внешние электроны могут чувствовать влияние диэлектрической постоянной газа (аналогичная идея встретилась позже, при изучении тормозной способности). Оценки по этой гипотезе дали порядок величины эффекта, согласующийся с наблюдениями. Однако когда было испробовано несколько газов, то выяснилось, что азот дает эффект не того знака. Диэлектрический эффект всегда смещает линии в сторону бóльших длин волн; здесь же происходил сдвиг в обратном направлении. Дальнейшие размышления Ферми привели его к открытию еще одной причины сдвига уровней, которая могла приводить к сдвигу обоих знаков с величиной, сравнимой со сдвигом вследствие диэлектрического эффекта.

Это описывается во второй части статьи, где мы впервые встречаем понятия длины рассеяния и «псевдопотенциала». Это замечательное теоретическое достижение, впервые продемонстрировавшее применение борновского метода к глубокой и узкой потенциальной яме, дало метод, который Ферми много раз использовал в нейтронных исследованиях. Действительно, во многих его последующих теоретических работах рис. 1 является чем-то вроде фирменной марки.

Э. Сегре

Статья 64 не имеет отношения к нейтронной тематике. Она была выполнена Э. Ферми в самый последний период спектроскопической деятельности римского Института физики, а написана значительно позже, когда уже ядерная тематика стала главной в жизни Ферми и его лаборатории. В связи с экспериментальной работой Амальди и Сегре «О смещении высших линий спектральных серий под действием давления благородных газов» и теорией явления, данной Ферми в статье 64, мне посоветовали исследовать такое же явление, но под влиянием ртутных паров. Это было мое первое научное исследование и последняя экспериментальная работа по классической спектроскопии в лаборатории, по крайней мере, в этот период.

Несколько слов о моих первых встречах с Ферми.

До того как я стал студентом Римского университета, я видел Ферми один раз в Пизе. Мне тогда было около 10 лет. Ферми был студентом «Scuola Normale» при Пизанском университете. Мой старший брат подружился с очень одаренным человеком, двадцатидвухлетним студентом-физиком Франко Разетти. В нашей семье через брата все знали, что у Разетти есть друг, однокурсник,— настоящий гений. И вот однажды Разетти привел его к нам домой. В моей памяти об этой знаменательной для нашей семьи встрече точно сохранились некоторые подробности, например, где сидел Ферми. Но теперь мне трудно вспомнить мои прямые впечатления и отделить их от впечатлений моих родителей и братьев, суть которых сводилась к следующему: «Не преувеличивает

ли Разетти? Кто может поверить, что такой застенчивый и молчаливый юноша — гений!»

Второй раз я увидел Ферми в Риме, когда он был уже знаменитым и состоял членом Королевской академии Италии. Это было в 1931 г. после окончания мною первых двух курсов инженерного факультета Пизанского университета. Я не любил чертить и решил перейти на третий курс физического факультета, бросив инженерные занятия. Мой старший брат уверенно утверждал: «Физика — это значит Рим, там Ферми и Разетти!» Итак, я попытался добиться перевода и поехал в Рим, где Ферми и Разетти устроили мне неофициальный экзамен. После экзамена, на котором я показал довольно средние знания по физике, Ферми сделал некоторые замечания, и именно ради того, чтобы о них рассказать я и начал так издалека. Вот к чему они сводятся: «К сожалению,— сказал Ферми,— сегодня физики делятся на две категории: теоретиков и экспериментаторов. Требования к теоретикам очень высоки. Если физик-теоретик не находится на очень высоком уровне, его работа бессмысленна. В этом смысле есть аналогия, скажем, между профессией физика-теоретика и профессией ученого-египтолога. Если египтолог не оказался исключительно ярким ученым, это означает, что он просто ошибся в выборе профессии. Что же касается физиков-экспериментаторов, то здесь и для человека средних способностей всегда имеется возможность полезной работы. Экспериментатор может, скажем, измерять плотность всех веществ. Это будет очень нужная работа, хотя для этого не требуется большого ума».

Итак, я стал студентом физического факультета Римского университета с оговоркой, что впоследствии буду экспериментатором.

В период, когда я был студентом, Ферми читал в университете три курса лекций: по теоретической физике, математической физике и геофизике; но вообще им читались лекции и по другим разделам физики. Все курсы были исключительно интересными; если же говорить о самой характерной особенности лекций, то это — удивительная ясность их изложения. Ферми читал лекции три раза в неделю, утром, по два часа. В Институт он всегда приходил в 9 часов утра, работу дома начинал не позже 6 часов утра. Вообще он вел очень регулярный образ жизни. Иногда Ферми импровизировал лекции для нескольких студентов или сотрудников — старая «привычка», о которой не раз говорится в настоящем издании. Я помню случай, когда он начал рассказывать двум студентам третьего курса о теории групп, но, поняв по выражениям наших лиц, что это слишком трудно, почти без иронии перешел к разряду конденсатора. Регулярно проходили семинары, на которых обычно рассказывалось о самых интересных последних работах, опубликованных в литературе. В 1933 г. на семинаре подробно разбиралась классическая книга Резерфорда, Чэдвика и Эллиса о радиоактивности; это был один из подготовительных элементов перехода деятельности Института физики от классической спектроскопии и физики атомов и молекул к ядерной физике.

И развлечения Ферми также были вполне регулярными: два раза в неделю — теннис по часу, один раз в неделю он собирал у себя сотрудников, играли в пинг-понг и другие игры. Я помню в числе гостей Ферми, кроме сотрудников лаборатории, таких видных физиков, как Баба́, Бете, Блох, Лондон, Пайерлс, Плачек, Теллер, Уленбек. Утром в воскресенье Ферми и все сотрудники приходили в лабораторию, но уже только к 10 часам утра и всего на два часа.

В воскресенье, в кабинете директора Института, профессора Корбино, Ферми просматривал новые журналы, особенно «Nature», «Zeitschrift für Physik», «Physical Review», «Comptes Rendus», иногда беседовал с Корбино, говорил с сотрудниками о физике и обсуждал планы воскресных прогулок, которые всегда совершались после обеда. Иногда во время этих прогулок играли в «две лиры» — игру, придуманную Ферми и состоящую в следующем. В ней принимают участие два противника и один судья. Первый игрок задает второму вопрос по физике. Если ответ (по мнению судьи) правилен, то ответивший получает одну лиру от противника. Если же ответ неправилен, то судья просит первого игрока самого ответить на свой вопрос, и при удовлетворительном ответе игрок получает лиру от противника. Однако, если судья может доказать, что первый игрок не в состоянии правильно ответить на вопрос, то сам судья получает две лиры от него. Поскольку судьей обычно был Ферми, он всегда умел доказать неправильность ответа или, по крайней мере, непонимание сути дела. Итак, игра, по существу, всегда была в «две лиры». Среди затрагиваемых в игре вопросов помню капиллярность, эргодические системы, радугу, волны моря. Ферми говорил очень медленно, что не типично для итальянца, его смех также был своеобразным, и, как ни странно, физики, окружавшие его, говорили и смеялись, как он. Коллектив физиков во главе с Ферми был очень дружным, и хотя жил в основном физикой, из моего рассказа было бы неправильно сделать вывод о нем, как об обществе скучных людей.

На провинциального студента из Пизы образ жизни этого коллектива действовал ошеломляюще. Должен сказать, что даже и привычки коллектива, которые со временем мне уже не казались особенно положительными (подражание, пусть несознательное, Ферми, некоторая профессиональная деформация, не совсем обоснованная самоуверенность вне области физики), тогда произвели на меня колоссальное впечатление.

Б. Понтекорво

64

О СМЕЩЕНИИ ВЫСШИХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДАВЛЕНИЯ *

Теоретически рассмотрено смещение далеких термов серий в спектрах поглощения паров щелочных металлов, наблюдавшееся Амальди и Сегре в случае, когда пар находится в атмосфере постороннего газа. Установлено соотношение между смещением линий и предельным сечением соударения очень медленных электронов с молекулами возмущающего газа.

§ 1. Э. Амальди и Э. Сегре [1] сообщили о значительном смещении линий высокого порядка в спектре поглощения паров щелочных металлов, про-

---

* *Sopra lo spostamento per pressione delle righe elevate delle serie spettrali.* Nuovo Cimento, 1934, 11, 157—166.

[1] E. Amaldi, E. Segrè. Nuovo Cimento, 1934, 11, 145.

исходящем при наличии атмосферы постороннего газа. Наиболее интересные особенности явления можно сформулировать следующим образом.

При одинаковом давлении постороннего газа смещение для далеких термов серии поглощения оказывается больше, чем для первых термов этой серии.

С увеличением порядкового номера линии смещение, по-видимому, стремится к пределу, приблизительно пропорциональному давлению постороннего газа.

Для двух исследованных паров (натрий и калий) смещения одинаковы в пределах точности измерений.

Величина смещения, а также его знак зависят от природы постороннего газа.

В настоящей работе я хочу обсудить с теоретической точки зрения поведение далеких термов атома, находящегося в атмосфере постороннего газа. Рассматривается случай, соответствующий условиям опытов Амальди и Сегре, когда радиус орбиты настолько велик, что внутри нее оказывается несколько тысяч возмущающих атомов.

С качественной точки зрения имеются две основные причины, приводящие к смещению линий высокого порядка под действием давления.

а) Когда атом возбуждается вследствие перемещения одного из его электронов на очень далекую орбиту, все атомы возмущающего газа, попавшие внутрь этой орбиты, окажутся в электрическом поле, которое обусловлено тем, что перемещенный электрон теперь не участвует в экранировании заряда ядра. Это поле вызывает поляризацию посторонних атомов, а смещение термов соответствует затрачиваемой на это энергии. В § 2 мы покажем, что эта причина всегда действует таким образом, что способствует смещению линий в красную сторону.

б) Атомы возмущающего газа действуют на оптический электрон, как потенциальные ямы, находящиеся на его пути; действие этих ям, понижающих средний уровень потенциала, в котором движется внешний электрон, можно, казалось бы, оценить с помощью первого приближения теорий возмущений. В этом случае при любых обстоятельствах следовало бы ожидать понижения высоких энергетических уровней по отношению к основному терму и поэтому — красного смещения линий. Более точное рассмотрение, однако, показывает, что первое приближение не только недостаточно с количественной точки зрения, но может привести даже и к неправильному знаку смещения. Действительно, мы покажем, что влияние потенциальных ям может приводить (в зависимости от обстоятельств) как к красному, так и к фиолетовому смещению и что порядок величины эффекта, как правило, больше, чем смещение, обусловленное причиной «а». Таким образом, из теории следует, что общее смещение линий иногда происходит в красную сторону, а иногда — в фиолетовую, что и согласуется с наблюдениями. Мы покажем также, что, по крайней мере, в случае, когда посторонний газ — одноатомный, существует простое соотношение между смещением спектральных линий и сечением соударения очень мед-

ленных электронов с атомами постороннего газа. Это, по-видимому, и было действительно подтверждено в случае одноатомных газов, исследованных Амальди и Сегре.

В § 2 и 3 мы рассмотрим смещения, обусловленные причинами «а» и «б», а в § 4 объясним, почему, несмотря на присутствие внутри орбиты большого числа возмущающих атомов, термы остаются достаточно определенными для того, чтобы спектральные линии довольно высокого порядка еще разрешались.

§ 2. Смещение линий, обязанное поляризации атомов постороннего газа, рассчитывается следующим образом. Вследствие возбуждения оптический электрон оказывается на орбите такого большого радиуса, что внутри ее содержится много «посторонних» атомов, которые теперь подвергаются действию электрического заряда e атомного остатка. Пусть r_i — расстояние одного из посторонних атомов до центра щелочного атома; посторонний атом будет находиться в электрическом поле с напряженностью e/r_i^2. Обозначим через α коэффициент поляризуемости атома постороннего газа; этот коэффициент связан с диэлектрической постоянной ε газа соотношением

$$\varepsilon = 1 + 4\pi n\alpha, \tag{1}$$

где n — число атомов в единице объема. Из элементарных соображений следует, что если атом помещается в электрическое поле E, то его энергия, связанная с поляризацией, будет равна $-\alpha \cdot E^2/2$. Поэтому, полагая $E = e/r_i^2$, находим обусловленное поляризацией атомов постороннего газа изменение энергии

$$\Delta W_\varepsilon = -\frac{\alpha e^2}{2}\sum_i \frac{1}{r_i^4}. \tag{2}$$

Суммирование следует распространить на все атомы постороннего газа, расстояние которых до ядра рассматриваемого атома меньше среднего расстояния от возбужденного электрона; практически же, ввиду больших размеров орбиты, суммирование можно распространить на все атомы газа.

Итак, смещение линий, обусловленное этой причиной, зависит главным образом от суммы обратных четвертых степеней расстояния возмущающих атомов от ядра возмущенного атома. Нетрудно видеть, что среднее значение такой суммы, по крайней мере в случае пренебрежения конечными размерами атомов, оказывается бесконечным; однако наиболее вероятное значение этой суммы — конечно. Полагая

$$z_i = \frac{4\pi}{3} r_i^3 n,$$

получаем

$$\sum \frac{1}{r_i^4} = \left(\frac{4\pi n}{3}\right)^{4/3} \sum \frac{1}{z_i^{4/3}}.$$

Далее, переменные z_i могут принимать все положительные значения; а вероятность того, что одна из величин z_i лежит в интервале между z и $z + dz$, равна dz. В этих условиях закон статистического распределения величин $\Sigma z_i^{-4/3}$ был недавно рассчитан Дж. Виком [2], который нашел, что наиболее вероятное значение такой суммы составляет приблизительно 2,6. Таким образом, для наивероятнейшего значения $\sum \frac{1}{r_i^4}$ найдено

$$\left(\sum \frac{1}{r_i^4}\right)_0 = \left(\frac{4\pi n}{3}\right)^{4/3} \cdot 2{,}6 \cong 17{,}5\, n^{4/3}. \qquad (3)$$

Итак, благодаря той причине, которую мы сейчас рассматриваем, линия расширяется и смещается; согласно выражению (3), смещение положения, при котором интенсивность является максимальной, равно

$$\Delta W_\varepsilon = -17{,}5 \frac{\alpha \cdot e^2}{2} n^{4/3}.$$

Поскольку закон статистического распределения $\sum \frac{1}{r_i^4}$ совершенно несимметричен (при отклонении от максимума кривая распределения гораздо более круто падает в сторону малых значений, чем в сторону больших), то мы думаем, что в действительности наблюдаемое положение линии несколько сдвинуто в красную сторону относительно положения, при котором интенсивность максимальна. Значение, несколько лучше согласующееся с наблюдениями, можно, по-видимому, получить, увеличив числовой множитель с 17,5 до 20. Кстати, результаты при этом изменятся незначительно. Учитывая и выражение (1), запишем

$$\Delta W_\varepsilon = -20 \frac{(\varepsilon - 1)\, e^2}{8\pi} n^{4/3}. \qquad (4)$$

Таким образом, рассмотренная причина вызывает снижение термов высокого порядка по отношению к основному терму, т. е. она приводит к красному смещению спектральных линий. Это смещение (в волновых числах) равно

$$\Delta_\varepsilon = +20 \frac{(\varepsilon - 1)\, e^2}{8\pi hc} n^{4/3} = +0{,}00093\, (\varepsilon - 1)\, n^{4/3} \qquad (5)$$

(знак «+» означает смещение в красную сторону). Смещение, обязанное этой причине, оказывается приблизительно равным одному $см^{-1}$ при давлениях посторонних газов порядка одной атмосферы. Наконец, следует заметить, что все предыдущие результаты справедливы только в том случае, когда посторонний газ не обладает постоянным дипольным моментом. Наблюдения Амальди и Сегре и ограничиваются случаями такого типа.

---

[2] G. C. Wick. Rend. Lincei, 1934, **19**, 27.

§ 3. Обсудим теперь следствие причины «б» § 1, которая, как мы уже говорили, важнее предыдущей, по крайней мере в большинстве случаев. Будем рассматривать случай, когда возмущающий газ является одноатомным.

Потенциал, действующий на оптический электрон, когда он находится в состоянии с довольно высоким квантовым числом, состоит из суммы потенциала U атомного остатка, изменяющегося довольно регулярно и медленно (за исключением области, находящейся в непосредственной близости к атомному остатку), и потенциальных ям V_i, представляющих действие на электрон отдельных атомов возмущающего газа. Эти потенциальные ямы довольно глубоки, но имеют малые размеры по сравнению с де-бройлевской длиной волны электрона (поскольку возмущающие атомы нейтральны). Очевидно, ψ-функция электрона под действием этого потенциала в среднем будет медленно и регулярно изменяться; на это среднее поведение будут наложены нерегулярности, локализованные в малой области вокруг каждой из потенциальных ям. Поэтому будет удобно наряду с ψ рассмотреть другую функцию, $\overline{\psi}(x, y, z)$, которая представляет среднее значение ψ в окрестности точки x, y, z, малой по сравнению с дебройлевской длиной волны, но достаточно большой, чтобы содержать значительное число атомов постороннего газа. Функция $\overline{\psi}$ воспроизводит общее поведение ψ-функции, но не имеет ее нерегулярностей вблизи потенциальных ям.

Из определения $\overline{\psi}$ с помощью элементарных вычислений можно найти, что

$$\Delta\overline{\psi} = \overline{\Delta\psi}, \tag{6}$$

где Δ — оператор Лапласа.

Уравнение Шредингера для нашего электрона имеет вид

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(W - U - \sum V_i\right)\psi = 0. \tag{7}$$

Усредним уравнение (7) по окрестности точки x, y, z, подобной определенной ранее, т. е. достаточно малой для того, чтобы U не изменялось значительно. Учитывая соотношение (6), получаем

$$\Delta\overline{\psi} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(W - U)\overline{\psi} - \frac{8\pi^2 m}{h^2}\overline{\sum V_i\psi} = 0. \tag{8}$$

Чтобы рассчитать среднее значение последнего члена, заметим, что величиной $(W - U)$ внутри потенциальной ямы можно пренебречь по сравнению с потенциалом V ямы. Кроме того, ψ в области, близкой к потенциальной яме (на расстоянии от нее, большем радиуса ρ ямы, но меньшем де-бройлевской длины волны), имеет практически постоянное значение, равное в первом приближении $\overline{\psi}$. Отсюда видно, что ψ внутри ямы и в ее окрестности зависит практически только от расстояния r до центра

ямы. Следовательно, если положить в этой области

$$\psi = \frac{u(r)}{r}, \tag{9}$$

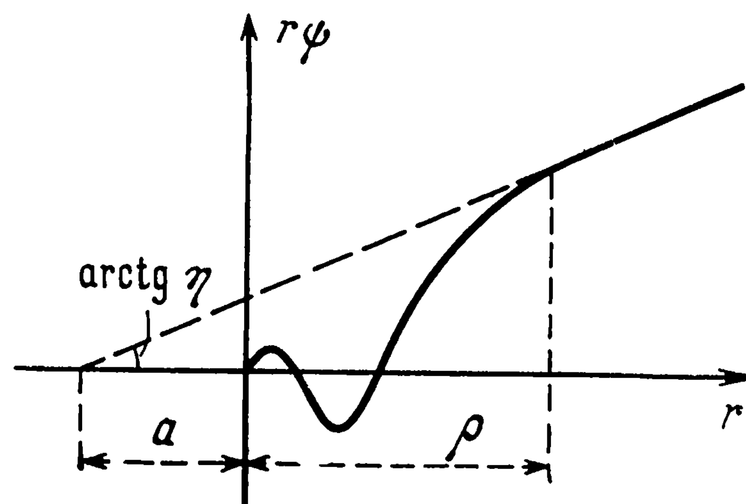
то функция $u(r)$ будет удовлетворять в первом приближении дифференциальному уравнению

$$u''(r) = \frac{8\pi^2 m}{h^2} V(r) u(r). \tag{10}$$

Тогда вне ямы, где $V(r) = 0$, u представляет собой линейную функцию r. И поскольку значение ψ вдали от ямы должно стремиться приблизительно к значению $\overline{\psi}$, то вне ямы можно положить

$$u(r) = (a + r)\overline{\psi}. \tag{11}$$

Здесь a — длина, смысл которой становится ясным из рисунка, где по оси абсцисс отложены значения r, а по оси ординат — u. Как следует из равенства (9), u обращается в нуль при $r = 0$, в то время как для r, больших ρ, она описывается прямой линией. Продолжим эту прямую линию так, чтобы она пересеклась с осью абсцисс; a — расстояние от точки пересечения до начала координат.



Учитывая соотношения (9), (10) и (11), находим

$$\frac{8\pi^2 m}{h^2}\int V\psi d\tau = 4\pi \frac{8\pi^2 m}{h^2}\int Vurdr = 4\pi\int u'' rdr = 4\pi\, |u'r - u|_0^r = -4\pi a\overline{\psi}, \tag{12}$$

и поскольку в единице объема содержится n потенциальных ям, то получаем, наконец,

$$\frac{8\pi^2 m}{h^2}\overline{\sum V_i\psi} = -4\pi a n\overline{\psi}. \tag{13}$$

Поэтому уравнение (8) принимает вид

$$\Delta\overline{\psi} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(W_0 - U)\overline{\psi} = 0, \tag{14}$$

где

$$W_0 = W + \frac{h^2 an}{2\pi m}. \tag{15}$$

Уравнение (14) для $\overline{\psi}$ имеет вид уравнения Шредингера, относящегося к случаю отсутствия постороннего газа. Из него поэтому следует, что W_0 принимает значения, равные энергетическим уровням невозмущенного атома. Согласно соотношению (15), энергия W электрона в присутствии постороннего газа отличается от W_0 на константу

$$-\frac{h^2 an}{2\pi m}. \tag{16}$$

Для положительного a высокие термы снижаются по отношению к основному терму, в то время как для отрицательного a они повышаются. В первом случае линии смещаются в красную сторону, во втором — в фиолетовую. Смещение (в $см^{-1}$) дается формулой

$$\Delta_\sigma = \frac{han}{2\pi mc}. \tag{17}$$

Константу a, фигурирующую в этой формуле и имеющую порядок величины размеров атома, можно было бы рассчитать, интегрируя дифференциальное уравнение (10), если бы был известен вид потенциала V, обусловленного атомом постороннего газа. Действительных же сведений об этом потенциале недостаточно даже для грубой оценки константы.

Однако интересно отметить, что величину a, но не ее знак, можно получить, если известно сечение соударения очень медленных электронов с атомами постороннего газа. В самом деле, для очень медленных электронов сечение столкновения обусловлено, как известно, только рассеянием s-волн. В этом случае оно имеет вид [3]

$$\sigma = \frac{h^2}{\pi p^2} \sin^2 \delta_0. \tag{18}$$

Здесь p — импульс электрона (по предположению, очень малый) и δ_0 — разность фаз между s-волнами, соответствующими свободным электронам с импульсом p, и волнами, соответствующими электронам, находящимся под действием потенциала атома V. Из соотношения (11) легко видеть, что в предельном случае очень малых p имеем

$$\delta_0 = \frac{2\pi pa}{h}. \tag{19}$$

Тогда после замены синуса углом соотношение (18) примет вид

$$\sigma = 4\pi a^2. \tag{20}$$

[3] См., например: G. Wentzel. Handbuch der Physik, XXIV/I, 2 Aufl. Berlin, 1933, S. 711.

Эта формула позволяет получить абсолютное значение a, но не ее знак. Подстановка в (17) дает

$$\Delta_\sigma = \pm n \frac{h\sqrt{\sigma}}{4\pi^{3/2}mc}. \qquad (21)$$

Полное смещение линии дается суммой Δ_ε и Δ_σ; поэтому, согласно соотношениям (5) и (17), оно оказывается равным

$$\Delta = 20\frac{(\varepsilon - 1)e^2}{8\pi hc} n^{1/3} + \frac{han}{2\pi mc}. \qquad (22)$$

В большинстве случае второй член превышает первый. Поскольку он для одних газов может быть положительным, а для других — отрицательным, то полное смещение линий может быть как красным, так и фиолетовым, что фактически и наблюдается.

Для сравнения полученных здесь формул с опытами следует обратиться к цитированной работе Амальди и Сегре.

Заканчивая этот параграф, резюмируем условия справедливости полученных здесь результатов. Они таковы:

а) посторонний газ должен быть одноатомным, чтобы его потенциал мог рассматриваться как сферически-симметричный;

б) плотность постороннего газа должна быть большой, чтобы внутри куба, стороны которого равны де-бройлевской волне оптического электрона, содержалось много атомов газа; это условие и имеет место для газа с давлением порядка одной атмосферы и для термов, соответствующих полному квантовому числу порядка нескольких десятков;

в) посторонний газ должен быть достаточно разреженным для того, чтобы расстояние между его атомами было большим как по сравнению с радиусом самих атомов, так и по сравнению с радиусом соударения, соответствующим электронам малой скорости.

§ 4. Наконец, следует уточнить, при каких условиях возмущение, оказываемое атомами постороннего газа, не будет вызывать такого уширения линий, которое сделало бы невозможным их наблюдение. Пренебрегая обычными причинами уширения спектральных линий (эффект Допплера, столкновения атома как целого с атомами постороннего газа и т. д.), ограничимся только учетом тех из них, которые характерны для рассматриваемого явления. По существу, их две. Одна из них связана с рассмотренным в § 2 эффектом поляризуемости атомов постороннего газа, а вторая зависит от действия потенциальных ям, изученного в § 3.

Первая причина уширения зависит от того, что смещение терма ΔW_ε, как это следует из формулы (2), пропорционально величине $\sum r_i^{-4}$. Его значение зависит от распределения атомов постороннего газа вокруг атомного остатка рассматриваемого атома; соответствующие значения в зависимости от возможных распределений могут колебаться в довольно широ-

ких пределах. Из расчета Виком закона распределения величины $\sum z_i^{-4/3}$ следует, что функция статистического распределения этой суммы достигает половины своего максимального значения при значениях аргумента 2 и 5. Тогда ширина линии, рассчитанная по способу § 2, будет приблизительно равна

$$20 \frac{(\varepsilon - 1)\, e^2}{8\pi \hbar c} n^{1/3}\ см^{-1}, \tag{23}$$

что в реальных условиях часто может превышать 1 $см^{-1}$.

Вторая причина уширения линий состоит в следующем. Рассмотрим классическое движение оптического электрона по далекой орбите с довольно высоким квантовым числом. На своем пути он медленно проходит через атомы постороннего газа. Далее, чтобы линии могли четко проявиться, электрон должен сделать, по крайней мере, несколько оборотов по своей орбите, не испытав ни одного мешающего его движению соударения с одной из молекул постороннего газа. Если σ — сечение соударения очень медленного электрона с атомами постороннего газа, то его средний свободный пробег

$$l = 1/\sigma n.$$

Поэтому для появления различимых линий требуется, чтобы этот средний свободный пробег был больше длины орбиты. Длина p-орбит с большим полным квантовым числом n^* приблизительно равна

$$4an^{*2}, \tag{24}$$

причем здесь a — радиус первой боровской орбиты. Таким образом, из условия, чтобы длина орбиты была меньше среднего свободного пробега электрона, имеем

$$4an^{*2} < \frac{1}{\sigma n}. \tag{25}$$

Отсюда можно заключить, что по этой причине практически невозможно наблюдать линии с порядковым номером выше

$$n_0^* = \frac{1}{2\sqrt{a\sigma n}}. \tag{26}$$

Например, в случае, когда посторонним газом является аргон при нормальной концентрации $2{,}7 \cdot 10^{19}$ *атом/см*^{3}, из формулы (26) находим $n_0^* = 39$, принимая для сечения соударения, найденного Амальди и Сегре, значение $\sigma = 11{,}6 \cdot 10^{-16}$ $см^2$. Естественно, порядковый номер последних линий серии в спектре поглощения, которые удается разрешить при указанной концентрации атомов аргона, практически будет заметно меньше этого предела, так как существуют и другие причины уширения.

См. вводные замечания к статье 61

65

ИСКУССТВЕННАЯ РАДИОАКТИВНОСТЬ, НАВЕДЕННАЯ НЕЙТРОННОЙ БОМБАРДИРОВКОЙ *

(Совместно с Э. Амальди, О. Д'Агостино, Ф. Разетти и Э. Сегре)

1. Введение

Эта статья ставит целью дать более полный отчет об экспериментах, проводимых в Физической лаборатории Римского университета, по новым радиоэлементам, которые образуются при нейтронной бомбардировке. Предварительные результаты уже докладывались в коротких сообщениях [1].

Кюри и Жолио [2] открыли, что атом — продукт искусственного расщепления — не всегда должен соответствовать какому-то стабильному изотопу, но может также распадаться с довольно продолжительным средним временем жизни, испуская легкие частицы. В качестве бомбардирующих частиц они пользовались α-частицами полония и обнаружили, что испускаемой легкой частицей обычно является позитрон. Подобные же результаты были получены на ряде элементов другими экспериментаторами, которые пользовались α-частицами, а также искусственно ускоренными протонами и дейтронами [3].

Применение для бомбардировки заряженных частиц ограничивает круг активируемых веществ только легкими элементами. Действительно, этими методами можно было активировать лишь около десяти элементов — до атомного номера 15.

Поэтому представлялось целесообразным испробовать действие нейтронной бомбардировки, поскольку эти частицы могут достигать ядер

* *Artificial Radioactivity Produced by Neutron Bombardment.* (With E. Amaldi, O. D' Agostino, F. Rasetti, E. Segrè.) Proc. Roy. Soc. London, 1934, A146, 483—500. Представлено лордом Э. Резерфордом.

[1] Fermi. Ric. Scien., 1934, 5(1), 283, 330 (статьи 61, 62); Amaldi, D'Agostino, Fermi, Segrè. Ric. Scient., 1934, 5 (1), 452, 652; 5 (2), 21; Fermi, Rasetti, D'Agostino. Ric. Scient., 1934, 5 (1), 536; Fermi. Nature, 1934, 133, 757, 898 (статья 63). См. также: Fermi. Nuovo Cim., 1934, 11, 429; Amaldi, Fermi, Rasetti, Segrè. Nuovo Cim., 1934, 11, 442; Amaldi, Segrè. Nuovo Cim., 1934, 11, 452; D'Agostino. Gazz. Chim. Ital., 1934, в печати.

[2] Curie, Joliot. C. R. Acad. Sci. Paris, 1934, 198, 254, 561.

[3] Frish. Nature, 1934, 133, 721; Wertenstein. Nature, 1934, 133, 564; Cockroft, Gilbert, Walton. Nature, 1934, 133, 328; Neddermeyer, Anderson. Phys. Rev., 1934, 45, 498; Lauritsen, Crane, Harper. Science, 1934, 79, 234.

даже самых тяжелых элементов. Конечно, существующие источники нейтронов гораздо менее интенсивны, чем источники α-частиц, протонов или дейтронов. Однако было резонно предположить, что этот недостаток частично компенсируется за счет более высокой эффективности нейтронов как расщепляющих частиц. В самом деле, опыт показал, что из примерно шестидесяти элементов, изученных подобным методом, могут активироваться более сорока.

2. Экспериментальная методика

Нейтронный источник состоял из запаянной стеклянной трубки диаметром около 6 *мм* и длиной 15 *мм*, содержавшей порошок бериллия и радон в количестве до 800 *мкюри*. Согласно обычно принимаемому выходу нейтронов из бериллия, число испускаемых этим источником нейтронов должно быть порядка 1000 в секунду на милликюри. Эти нейтроны распределены по очень широкой области энергий от нуля до 7 или 8 млн. *эв*, кроме совсем небольшой доли, обладающей энергиями, примерно вдвое бóльшими этого предела.

Нейтроны сопровождаются очень интенсивным γ-излучением, но это не создает каких-либо неудобств, поскольку наведенная активность исследуется после облучения, а радон без бериллия, как было показано, никакого эффекта не дает. Испускаемые бериллием нейтроны сопровождаются γ-излучением более жестким, чем излучение от всех продуктов радона (5—6 млн. *эв*, около одного γ-кванта на нейтрон). Однако представляется совершенно невероятным, что наблюдаемые эффекты были каким-то образом связаны с этим γ-излучением, поскольку γ-излучение гораздо большей интенсивности и лишь незначительно меньшей энергии не дает никакого эффекта.

Испускание электронов активированными веществами регистрировалось счетчиками Гейгера — Мюллера (около 5 *см* длиной и 1,4 *см* в диаметре) со стенками из тонкой алюминиевой фольги толщиной от 0,1 до 0,2 *мм*. Приложенное напряжение достигало 1000—1500 *в*. Усиленные импульсы считались механическим счетчиком, который запускался тиратроном.

Исследуемые вещества приготавливались обычно в форме цилиндров, которые можно было надвигать на счетчик, чтобы свести к минимуму потери интенсивности из-за геометрических факторов. Во время облучения вещество располагалось как можно ближе к источнику. Вещества, которые после облучения нужно было обрабатывать химически, часто облучались в пробирке в виде концентрированных водных растворов.

Кривые распада наведенной активности для многих элементов оказались простыми экспонентами. Иногда их можно было разложить на две экспоненты или более; в этом случае было удобно облучать вещество в течение различных промежутков времени, чтобы активировать различные компоненты с разными интенсивностями. Наличие нескольких средних

времен жизни в некоторых случаях определенно связано с различными изотопами данного элемента; когда же имеется один изотоп, оно может быть отнесено на счет альтернативных процессов распада, а иногда (уран) — цепочки распадов. При переходе от элемента к элементу интенсивность активации изменяется в широких пределах. Для некоторых элементов эффект едва измерим: число импульсов, создаваемых облученным веществом, по порядку величины равно числу фоновых импульсов в счетчике. В других веществах активация столь сильна, что число импульсов, когда вещество помещается слишком близко к счетчику, составляет по порядку величины несколько тысяч в минуту, так что их нельзя сосчитать вследствие недостаточной разрешающей способности.

Точных измерений интенсивности активации различных элементов выполнено не было, так как это потребовало бы проведения опытов в хорошо известных геометрических условиях, а также знания эффективности регистрации электронов нашими счетчиками и их поглощения в данном веществе и алюминиевой фольге. Однако была произведена весьма приближенная оценка этих факторов и для ряда элементов дается число, выражающее интенсивность активации (i). Она определена как число распадов в секунду в 1 *г* элемента, который находится на расстоянии 1 *см* от нейтронного источника, содержащего 1 *мкюри* радона (в равновесии со своими продуктами распада) и порошок бериллия. Вещество всегда облучалось до тех пор, пока не достигалось насыщение активного продукта. Как показало измерение числа импульсов от известных количеств калия и урана, эффективность наших счетчиков (включая поглощение в алюминиевой фольге и геометрические факторы) составляла около $^1/_{20}$.

С помощью этой величины, которая выражает интенсивность, можно легко получить сечение активации при столкновении с нейтроном, если известно число нейтронов, испускаемых за секунду источником в 1 *мкюри*. Полагая это число равным 1000, сразу же находим сечение

$$\sigma = 2\cdot 10^{-26} iA,$$

где A — атомный вес элемента.

Чтобы иметь возможность судить о ядерной реакции, благодаря которой возникает активный элемент, последний необходимо идентифицировать химически. Резонно предположить, что атомный номер активного элемента должен быть близок к атомному номеру Z бомбардируемого элемента. Вследствие того, что количество активного вещества очень мало (в наиболее благоприятных случаях оно составляет около 10^9 атомов), нет никакой надежды выделить его обычными методами. Поэтому облученное вещество растворялось, и в раствор добавлялись небольшие количества неактивных элементов, которые могли быть, как предпоагалось, изотопами активного продукта. Эти добавки и облученный элемент отделялись затем друг от друга химическим путем и порознь исследовались на активность. Обычно оказывалось, что активность четко следует за каким-то

одним элементом, и тогда активный продукт можно считать изотопом этого элемента.

Было проведено предварительное изучение проникающей способности β-лучей новых радиоэлементов. Для этой цели использовались счетчики стандартного типа, а изучаемое вещество помещалось не вплотную к счетчику, но изготовлялось в виде цилиндра с внутренним диаметром, несколько бо́льшим диаметра счетчика, чтобы между ними можно было вставлять цилиндрические алюминиевые экраны разной толщины. Таким путем были получены кривые поглощения более или менее экспоненциального типа. Поскольку геометрия опыта при измерении поглощения отличается от стандартной и, кроме того, определяется число импульсов, а не полная ионизация, мы проверили этот метод, измерив коэффициенты поглощения для известных радиоактивных веществ; как и ожидалось, было найдено различие (около 20%). Соответственно этому были исправлены полученные данные.

В ряде случаев поглощение двумя миллиметрами свинца не было полным, что принималось как свидетельство наличия γ-излучения.

Весьма существенно было установить, являются ли испускаемые частицы положительными или отрицательными электронами. Ввиду слабости излучения представлялось удобным воспользоваться для этой цели методом неоднородного магнитного поля, предложенным Тибо [4]. Но даже и с такой светосильной аппаратурой эти опыты пришлось ограничить элементами, которые могут сильно активироваться (Al, Si, P, S, Cr, As, Br, Rh, Ag, I, Ir, U). Во всех случаях наблюдались только отрицательные электроны. Однако это не исключает того, что небольшую долю (примерно до 15%) испускаемых частиц могут составлять позитроны.

Для нескольких очень сильно активируемых элементов оказалось также возможным сфотографировать испускаемые электроны в камере Вильсона.

3. Экспериментальные результаты

Исследованные элементы перечислены здесь в порядке атомных весов; сводка результатов помещена в таблице в конце статьи.

1 *Водород.* При облучении воды в течение 14 *час* источником 670 *мкюри* не найдено никакого эффекта.

3 *Литий.* Гидроокись, облучавшаяся 14 *час* источником 750 *мкюри*, неактивна.

4 *Бериллий.* Обнаруживает крайне слабую активность, которая вполне может быть связана с примесями.

5 *Бор.* То же, что и для бериллия.

6 *Углерод.* Парафин, облучавшийся 15 *час* источником 220 *мкюри*, неактивен.

---

[4] Thibaud. C. R. Acad. Sci. Paris, 1933, 197, 447.

7 *Азот.* Гуанидин карбонат (около 35% N), облучавшийся 14 *час* источником 500 *мкюри*, неактивен.

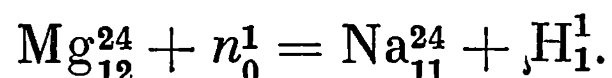
8 *Кислород.* Никакой активности; см. водород.

9 *Фтор.* Этот элемент, облученный в виде фтористого кальция, может сильно активироваться ($i = 0{,}7$). Поскольку кальций оказался неактивным, этот эффект был приписан фтору. Активность спадает с очень коротким периодом полураспада — около 9 *сек.* В этом случае никакое химическое разделение не было возможно. Но так как известно, что при нейтронной бомбардировке фтор расщепляется с испусканием α-частицы, активным ядром является, вероятно, N^{16}. Испустив электрон, этот неустойчивый изотоп переходит в стабильный O^{16}. Исключительная стабильность последнего ядра согласуется с наблюдавшейся очень высокой энергией β-лучей; интенсивность уменьшается наполовину в слое Al 0,24 *г/см*^{2}. Эти и все последующие данные по поглощению даны для алюминия.

11 *Натрий.* Этот элемент был облучен в виде карбоната. Натрий обнаруживает довольно сильную активацию, убывающую с периодом около 40 *сек.*

12 *Магний.* Этот элемент может довольно сильно активироваться, и кривые распада указывают на наличие двух периодов: около 40 *сек* и 15 *час.* Для большего периода толщина слоя половинного поглощения составляет 0,06 *г/см*^{2}.

Активный элемент, распадающийся с 15-часовым периодом, оказалось возможным отделить химически. Облученный магний растворялся и к нему добавлялась соль натрия. Магний осаждался затем в виде фосфата и оказался неактивным, тогда как остающийся в растворе натрий несет активность. Таким образом, показано, что активный атом не является изотопом магния; поскольку же неон тоже можно исключить, мы считаем его изотопом натрия, образующимся по реакции

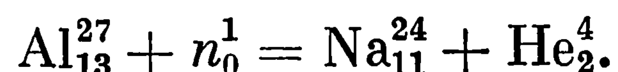


$$Mg^{24}_{12} + n^1_0 = Na^{24}_{11} + H^1_1.$$

13 *Алюминий.* При нейтронной бомбардировке этот элемент приобретает сильную активность. Кривые распада указывают на два периода — около 12 *мин* ($i = 0{,}8$) и 15 *час* ($i = 0{,}5$). Толщина слоя половинного поглощения составляет соответственно 0,07 и 0,06 *г/см*^{2}.

Долгопериодную активность можно было отделить химически, растворяя облученный алюминий и прибавляя к нему малые количества натрия и магния. Алюминий и магний осаждаются затем в виде гидроокисей и фосфатов и оказываются неактивными. Раствор, который содержит натрий, выпаривался и обнаружил активность с 15-часовым периодом.

Активный элемент, вероятно, тот же самый, что и в случае магния, в пользу чего свидетельствует тождественность периодов и толщин половинного поглощения. В данном случае ядерная реакция такова:



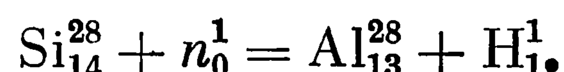
$$Al^{27}_{13} + n^1_0 = Na^{24}_{11} + He^4_2.$$

Испустив электрон, этот активный изотоп Na^{24} переходит в стабильный изотоп Mg^{24}.

Активный продукт с 12-минутным периодом не был выделен. Однако мы считаем, что это, вероятно, Mg^{27}, так как другие два возможных случая — Al^{28} и Al^{26} — по-видимому, нужно исключить; первый — потому, что Al^{28}, как будет видно далее, является радиоактивным изотопом с периодом 3 *мин*, а второй — вследствие того, что Al^{26} должен был бы, вероятно, распадаться с испусканием позитронов.

14 *Кремний*. Кремний также сильно активируется ($i = 0{,}7$) и имеет период, по-видимому, несколько меньше 3 *мин*. Толщина слоя половинного поглощения β-лучей равна 0,16 *г/см*^{2}.

Химическое отделение активного элемента достигалось выпариванием облученного кремния вместе с плавиковой и серной кислотами после добавления алюминия и магния. Кремний выделяется в виде фторида, а высаженный из остатка алюминий оказывается носителем активности. Поэтому активным продуктом является, возможно, изотоп алюминия, а ядерной реакцией — процесс



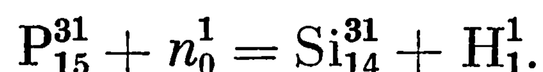
$$\mathrm{Si}_{14}^{28} + n_0^1 = \mathrm{Al}_{13}^{28} + \mathrm{H}_1^1.$$

Такой вывод согласуется с гипотезой Кюри, Жолио и Прайсверка[5] о тождественности этого активного изотопа продукту, возникающему при столкновении α-частиц с Mg^{25} и имеющему тот же самый период.

15 *Фосфор*. Этот элемент обнаруживает сильную активность ($i = 0{,}6$), распадающуюся с периодом около 3 *час*, а также и активность, вдесятеро менее интенсивную, с периодом 3 *мин*, которую впервые заметили Кюри, Жолио и Прайсверк. Толщина слоя половинного поглощения β-лучей 3-часового продукта составляет 0,09 *г/см*^{2}.

Активный продукт с периодом полураспада 3 *час* оказалось возможным отделить химически. С этой целью фосфор облучался в виде концентрированного раствора фосфорной кислоты; затем этот раствор разбавлялся водой и в него добавлялось небольшое количество силиката натрия. После этого вещество высушивалось, чтобы сделать кремний нерастворимым, потом растворялось в воде и фильтровалось. Активность была найдена в кремнии.

Ядерная реакция, вероятно, идет следующим образом:



$$\mathrm{P}_{15}^{31} + n_0^1 = \mathrm{Si}_{14}^{31} + \mathrm{H}_1^1.$$

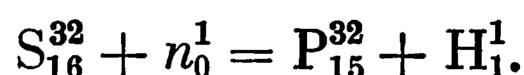
3-минутный активный продукт химически не был отделен, однако тождественность периодов позволяет предположить, что это мог бы быть тот же самый Al^{28}, получаемый из кремния.

16 *Сера*. Сера обнаруживает довольно сильную активность, распадающуюся с периодом около 13 дней (измеренным не очень точно). Толщина слоя половинного поглощения β-лучей — 0,10 *г/см*^{2}.

---

[5] Curie, Joliot, Preiswerk. C. R. Acad. Sci. Paris, 1934, 198, 2089.

Химическое отделение активного продукта было проведено следующим образом: облученная серная кислота сначала разбавлялась, затем в нее вводилось ничтожное количество фосфата натрия, и при добавлении молибдата аммония фосфор высаживался в виде фосфоромолибдата. Активность была обнаружена в осадке. Мы полагаем, следовательно, что ядерная реакция такова:

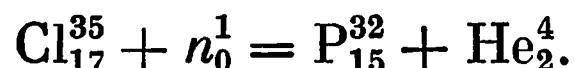


$$S^{32}_{16} + n^{1}_{0} = P^{32}_{15} + H^{1}_{1}.$$

Испуская электрон, этот активный P^{32} превращается в стабильный изотоп S^{32}.

17 *Хлор*. Период полураспада и проникающая способность β-лучей этого элемента примерно таковы же, что и у серы. Интенсивность $i = 0{,}1$. Активная субстанция выделялась совершенно аналогичным методом, что и в случае серы. Облученный хлористый аммоний растворялся в разбавленной азотной кислоте, затем добавлялся фосфор, который выделялся, как и в предыдущем случае. Как и раньше, этот элемент оказался носителем активности.

Ядерная реакция, приводящая к образованию того же активного фосфора, который был получен из серы, следующая:



$$Cl^{35}_{17} + n^{1}_{0} = P^{32}_{15} + He^{4}_{2}.$$

20 *Кальций*. Не было замечено никакой активности.

22 *Титан*. Можно было наблюдать очень слабый эффект с периодом в несколько минут. Однако нельзя исключить того, что он мог быть обусловлен примесями.

23 *Ванадий*. Этот элемент проявляет среднюю активность. Период полураспада составляет около 4 *мин* и в пределах экспериментальных ошибок совпадает с аналогичными величинами, наблюдавшимися у хрома и марганца и связанными с изотопами ванадия. Это обстоятельство позволяет предположить, что активным элементом может быть V^{52}. Толщина слоя половинного поглощения такая же, как и для хрома,— 0,16 *г/см*^{2}.

24 *Хром*. Металлический хром достаточно сильно активируется при облучении нейтронами. Как и в предыдущем случае, период полураспада составляет около 4 *мин*. Толщина слоя половинного поглощения — 0,16 *г/см*^{2}.

Для идентификации активного элемента мы поступили следующим образом: в облученный хромат аммония вводилось некоторое количество ванадата натрия, и ванадий осаждался при добавлении нашатырного спирта. Поскольку активность оказывается в осадке, она наверняка не связана с изотопом хрома. Чтобы выяснить, не была ли она обусловлена каким-либо изотопом титана, в облученное соединение хрома помимо ванадия добавлялась титановая соль, и титан высаживался путем гидролиза. Осадок не обнаружил никакой активности. Следовательно, мы считаем, что активное вещество представляет собой, по-видимому, тот же самый

изотоп V^{52}, что и раньше, образующийся согласно ядерной реакции



$$Cr_{24}^{52} + n_0^1 = V_{23}^{52} + H_1^1.$$

25 *Марганец*. Мы облучили двуокись марганца и обнаружили довольно интенсивную активность, распадающуюся с двумя периодами — около четырех минут и два с половиной часа. Толщина слоя половинного поглощения электронов, испускаемых 2,5-часовым продуктом,—0,16 *г/см*^{2}.

Долгопериодную активность нельзя было отделить от марганца добавлением хрома и ванадия и осаждением их соответственно в виде хромата и ванадата свинца. Поэтому возможно, что она связана с изотопом марганца Mn^{56} — тем же самым, который извлекается из облученных железа и кобальта,— поскольку на это указывает тождественность периодов полураспада.

Чтобы идентифицировать 4-минутный активный элемент, мы облучали нитрат марганца, добавляли соединение ванадия и осаждали ванадий в виде ванадата свинца. При этом активность выпадает в осадок. Аналогичная реакция была проведена с хромом; в этом случае осадок тоже оказался активным, но явно с более низким выходом. Активным элементом является, вероятно, изотоп V^{52}, а ядерная реакция такова:



$$Mn_{25}^{55} + n_0^1 = V_{23}^{52} + He_2^4.$$

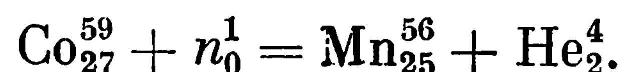
Таким образом, один и тот же активный ванадий получается, по-видимому, из хрома, ванадия и марганца (см. рисунок).

26 *Железо*. Этот элемент обнаруживает довольно сильную активность ($i = 0,05$), распадающуюся с периодом 2,5 *час* [6]. Толщина слоя половинного поглощения — 0,16 *г/см*^{2}. Активный продукт можно отделить следующим образом: облученное железо растворяется в азотной кислоте, добавляется небольшое количество растворимой соли марганца, а затем Mn осаждается в виде MnO_2 при добавлении хлората натрия. Активность оказывается в осадке марганца. Возможно, что активный элемент образуется согласно реакции



$$Fe_{26}^{56} + n_0^1 = Mn_{25}^{56} + H_1^1.$$

27 *Кобальт*. Кобальт может становиться активным, а кривые распада указывают такой же период полураспада, что и для железа. Тем же методом, который был описан для железа, активный продукт можно химически отделить вместе с марганцем. Этот факт позволяет предположить, что это опять может быть изотоп Mn^{56}. В данном случае ядерная реакция должна быть такой:



$$Co_{27}^{59} + n_0^1 = Mn_{25}^{56} + He_2^4.$$

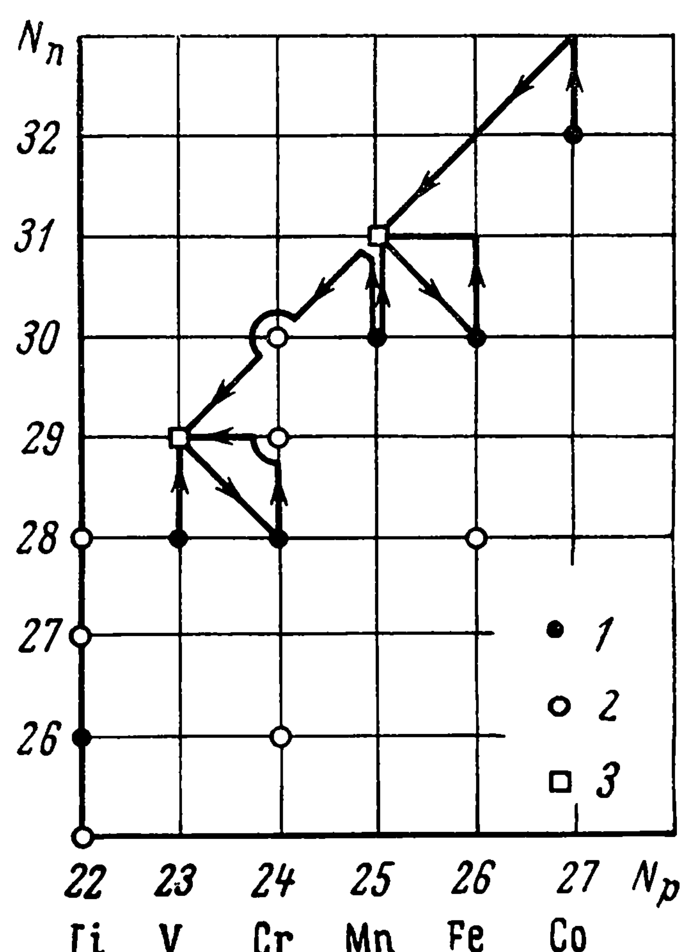
---

[6] См. также: Fleischmann. Naturw., 1934, **22**, 434.

Активный изотоп Mn^{56} образуется, по-видимому, из кобальта, железа и марганца (см. рисунок).

28 *Никель*. Было установлено, что этот металл, облучавшийся 13 *час* источником 250 *мкюри*, не активируется.

29 *Медь*. Этот элемент обнаруживает среднюю активность, распадающуюся с периодом около 6 *мин*. В качестве одной из возможностей мы предполагаем, что активное ядро могло бы быть таким же, как и ядро, которое образуется из цинка, т. е. изотопом меди.



Возможная схема превращений, которые происходят в элементах с атомными номерами от 23 до 27; схема нанесена на протон-нейтронной диаграмме

1 — стабильные изотопы, если они представляют более 20% данного элемента;
2 — то же, но менее 20%;
3 — активные изотопы; превращения показаны стрелками

30 *Цинк*. Обнаруживает слабую активность, кривая распада которой соответствует двум периодам: один около 6 *мин*, другой — гораздо больше и пока еще не измерен.

Активный элемент с периодом 6 *мин* был выделен химически растворением облученного металла, добавлением меди и никеля и осаждением меди в виде сернистой соли, либо высаживанием ее электрохимически на цинковую подложку. В обоих случаях медь оказывается носителем активности. Добавленный никель, который осаждался с помощью диметилглиоксима, был неактивным. Таким образом, активным элементом является, вероятно, изотоп меди.

31 *Галлий*. Этот элемент обнаруживает умеренно сильную активность, распадающуюся с периодом около 30 *мин*.

33 *Мышьяк*. Дает сильный эффект, причем активность распадается с периодом около одного дня. Толщина слоя половинного поглощения — 0,16 *г/см²*. Мы попытались отделить активное вещество, добавляя галлий и германий и осаждая — после выделения мышьяка — первый в виде ферроцианида, а второй — в виде сернистой соли. В то время как осаждение галлия было, по-видимому, полным, в случае германия мы не уверены, что он был отделен полностью. В обоих случаях выделенное вещество не было активным; это позволяет предположить, что эта активность при-

надлежит, вероятно, изотопу мышьяка. Поскольку, однако, реакция с германием дала довольно неопределенный результат, мы не можем считать этот вывод несомненным.

34 *Селен.* Этот элемент активировался слабо. Период полураспада — примерно 35 *мин.*

35 *Бром.* Бромистый аммоний оказался очень активным в результате нейтронного облучения. Кривые распада показывают два периода: около 30 *мин* и 6 *час.* Для идентификации активного вещества мы добавляли мышьяк и селен и отделяли их: первый в виде сернистой соли, а второй — электрохимически. Оба они оказались неактивными. Следовательно, активными элементами являются, по-видимому, изотопы брома. Для проверки мы добавили мышьяк и селен, а осаждали бром (в виде бромистого серебра) и обнаружили, что осадок содержит активность. Мы считаем, что два периода могут быть связаны с двумя активными изотопами, Br^{80} и Br^{82}, которые образуются из двух обычных изотопов, Br^{79} и Br^{81}.

37 *Рубидий.* Нитрат рубидия обнаружил очень слабую активность, распадающуюся с периодом около 20 *мин.*

38 *Стронций.* Облучавшийся 13 *час* источником 400 *мкюри* этот элемент оказался неактивным.

39 *Иттрий.* После 30-минутного облучения источником 750 *мкюри* этот элемент был неактивным.

40 *Цирконий.* Окись циркония обнаружила крайне слабую активность с периодом в несколько минут. Возможно, она обусловлена примесями.

42 *Молибден.* Этот элемент обнаруживает очень слабую активность. Кривые распада показывают, по меньшей мере, два периода: один — около 15 *мин*, второй — более одного дня.

43. *Рутений.* После 40-минутного облучения источником 750 *мкюри* этот элемент остался неактивным.

45 *Родий.* Металлический родий мог сильно активироваться, а измеренные распадные кривые согласуются с наличием двух периодов, один из которых — около 50 *сек* и второй — 5 *мин.* Основная активность принадлежит более короткому периоду. Толщина слоя половинного поглощения электронов 5-минутного активного продукта равна 0,10 *г/см*^{2}.

46 *Палладий.* При нейтронной бомбардировке этот элемент становится умеренно активным. Кривые распада активности не очень точны, но указывают на период порядка шести часов. Слой половинного поглощения — 0,03 *г/см*^{2}.

47 *Серебро.* Очень активный элемент. Кривые распада показывают один период около 20 *сек* и второй — примерно 2 *мин* (интенсивность последнего $i = 0{,}5$, толщина слоя половинного поглощения 0,08 *г/см*^{2}).

48 *Кадмий.* Металлический кадмий активировался, но слабо. Кривые распада дают период, несколько больший одного часа.

50 *Олово.* Этот металл обнаружил крайне слабую активность, обусловленную, возможно, примесями.

51 *Сурьма.* То же, что и для олова.

52 *Теллур*. Обнаруживает слабую активность, распадающуюся с периодом около получаса.

53 *Иод*. Мы облучали как элементарный иод, так и иодистый аммоний. Оба обнаружили сильную активность, распадающуюся с периодом 30 *мин*. Интенсивность $i = 0{,}4$. Толщина слоя половинного поглощения — 0,09 *г/см*^{2}. Активный элемент следует за иодом, когда последний осаждается добавлением азотной кислоты в раствор облученного иодистого аммония, в который уже были добавлены теллур и сурьма. Он следует а этим элементом и при осаждении в виде иодистого серебра в присутствии теллура и сурьмы. Здесь, вероятно, имеет место образование активного изотопа иода.

55 *Цезий*. Цезий (тартрат) обнаружил очень слабую активность, период полураспада которой еще не измерен сколь-нибудь точно.

56 *Барий*. Мы облучали гидроокись и нашли, что она слабо активна. Кривые распада дают период около 3 *мин*.

57 *Лантан*. Было установлено, что этот элемент после 40-минутного облучения источником 400 *мкюри* остается неактивным.

58 *Церий*. Этот элемент, облучавшийся 30 *мин* источником 400 *мкюри*, остался неактивным.

59 *Празеодим*. Этот элемент так же, как и другие редкие земли — Nd, Sm и Pr, — был нам любезно предоставлен профессором Ролла из Флорентийского университета. Они очень чисты и представлены в виде окисей. Празеодим обнаруживает довольно слабую активность. Кривые распада дают период около 5 *мин*, а возможно и еще больше.

60 *Неодим*. Обнаруживает довольно слабую активность; период — около одного часа.

62 *Самарий*. Активность тоже довольно слаба, период — около 40 *мин*.

73 *Тантал*. Этот элемент, облучавшийся 2,5 *час* источником 750 *мкюри*, остался неактивным.

74 *Вольфрам*. Этот элемент обнаруживает крайне слабую активность, вероятно, с продолжительным периодом.

75 *Рений*. Этот элемент после 10-минутного облучения источником 750 *мкюри* остался неактивным.

76 *Осмий*. После 15-часового облучения источником 450 *мкюри* этот элемент остался неактивным.

77 *Иридий*. У этого элемента сильная активность, распадающаяся с периодом около 20 *час*. Толщина слоя половинного поглощения — 0,13 *г/см*^{2}.

Для выяснения химической природы этой активности мы облучали тетрахлорид иридия, добавляли осмий и рений, затем отделяли их: первый — дистилляцией тетраокиси, второй — в форме сульфида. Оба оказались неактивными. Иридий же сохранил активность, которая, по-видимому, обусловлена изотопом этого элемента.

78 *Платина*. Чистая платина (Heraeus) обнаружила крайне слабую активность с коротким периодом полураспада.

79 *Золото*. Мы облучили этот металл и нашли, что он весьма интен-

сивно активируется. Период — около двух дней; толщина слоя половинного поглощения — 0,33 *г/см²*.

Мы попытались отделить активную субстанцию, растворяя облученную золотую фольгу в царской водке, добавляя платину и иридий и осаждая затем эти элементы соответственно в виде хлороплатинатов и хлороиридиатов. Оба они оказались неактивными, тогда как активность была найдена в золоте; это указывает, таким образом, на то, что активным ядром является изотоп золота. Эта активность остается с золотом и тогда, когда добавляется и выпаривается ртуть.

80 *Ртуть.* Этот элемент после сильного облучения обнаружил крайне слабую активность, которая могла быть связана с примесями.

81 *Таллий.* То же, что и для ртути.

82 *Свинец.* Этот элемент после 10-часового облучения источником 500 *мкюри* остался неактивным.

83 *Висмут.* То же, что и для свинца.

90 *Торий.* К настоящему времени этот элемент не был достаточно исследован. Очищенный от своих обычных β-активных продуктов распада азотнокислый торий становится очень активным в результате облучения. Кривые распада указывают, по меньшей мере, на два периода: менее 1 *мин* и около 15 *мин.*

92 *Уран.* Об этом элементе здесь приводятся лишь основные результаты, поскольку его поведение анализировалось недавно в другой работе [7].

Помимо периодов полураспада 10 *сек*, 40 *сек* и 13 *мин*, мы идентифицировали позднее еще один — около 1,5 *час.* Интенсивность активации для каждого из этих периодов равна по порядку величины 0,5. Мы уже обсуждали эксперименты, которые как будто доказывают, что 13-минутный активный продукт не является изотопом ни одного из элементов с атомными номерами от 86 до 92 (радон, экацезий, радий, актиний, торий, протактиний, уран). Эти опыты повторялись в разных условиях и главной целью ставили получить подтверждение нетождественности 13-минутного продукта с протактинием, причем особенно трудно такое подтверждение получить ввиду наличия у Pa короткопериодного изотопа UX_2. Описанная уже реакция осаждения марганца дает для 13-минутного продукта выход около 15%. Ее выход для UX_2 сильно зависит от условий протекания реакции и может варьировать между 2 и 10%, причем естественный распад этого вещества учитывается. Более эффективной реакцией для получения 13-минутного активного продукта является следующая: облученный азотнокислый уран растворяется в разбавленной соляной кислоте; добавляется некоторое количество нитрата рения, а затем при добавлении тиосульфата натрия рений осаждается в виде сернистой соли. Этот осадок уносит около 50% активности, а иногда и более. Найденная в осадке рения доля UX_1 и UX_2 также меняется в зависимости от условий реакции (особенно она зависит от кислотности), но может быть сделана очень малой,

Fermi. Nature, 1934, **133**, 898. (Статья 63.)

вероятно, менее 1%. На деле оказалось возможным отделить 13-минутный активный продукт и измерить его период, используя уран, вообще не очищенный от UX. 90-минутный и 13-минутный активные продукты обладают, по-видимому, совершенно аналогичными химическими свойствами, так как в реакции любого типа они всегда получаются примерно в одинаковой пропорции. Поэтому обе эти активности, по-видимому, обусловлены продуктами с атомным номером выше 92 — возможно, изотопами одного и того же элемента.

4. Теоретический анализ

Здесь мы хотим обсудить с теоретической точки зрения те процессы, которые могут происходить при нейтронной бомбардировке. При нынешнем состоянии теории ядра эти рассуждения могут носить лишь предварительный характер. Эмпирические результаты предыдущих параграфов можно резюмировать следующим образом.

а) Активироваться может значительная доля элементов любого атомного веса. С этой точки зрения нельзя заметить никакого особого различия между легкими и тяжелыми элементами.

б) Сечения столкновения нейтрона с элементами, которые могут активироваться наиболее сильно, по порядку величины равны геометрическому сечению ядра. Это означает, что значительная доля нейтронов, достигающих ядра, создает активный атом.

в) Иногда активный продукт является изотопом исходного атома (атомный номер Z); в других случаях его атомный номер на одну или две единицы меньше. В этом отношении, по-видимому, существует разница между легкими и тяжелыми элементами. Для легких элементов атомный номер активных продуктов обычно меньше Z, тогда как в пяти исследованных случаях тяжелых элементов, не являющихся естественно-радиоактивными, активный продукт оказывается изотопом исходного элемента.

г) Испускаемые электроны всегда несут отрицательный заряд; во всяком случае, позитроны ни разу не были зарегистрированы.

Объяснение общего механизма активации легких элементов, по-видимому, не встречает особых трудностей. Представляется, что обычно он сводится к захвату падающего нейтрона и последующему немедленному вылету α-частицы или протона. Если энергия испущенной α-частицы или протона составляет несколько миллионов *эв*, то из теории Гамова следует, что необходимое для испускания частицы время крайне мало; поэтому весьма высока вероятность того, что этот процесс произойдет прежде, чем нейтрон покинет ядро. В результате этого процесса, который может занять время порядка 10^{-20} *сек*, ядро превращается в другое, новое ядро, в среднем обладающее более высоким атомным весом, чем это должно было бы соответствовать его ядерному заряду, так как процессы поглощения нейтрона и испускания α-частицы или протона увеличивают отношение числа нейтронов к числу протонов в таком ядре. Вероятно, это является

причиной того, что всегда наблюдается испускание отрицательных электронов. Процесс излучения электрона восстанавливает правильное значение отношения чисел нейтронов и протонов и отвечает образованию стабильного изотопа. С увеличением атомного веса бомбардируемого элемента потенциальный барьер, окружающий ядро, становится все более значительным препятствием для испускания тяжелых положительно заряженных частиц; поэтому легко понять, почему процессы с испусканием протонов и α-частиц становятся крайне маловероятными.

Теоретическая интерпретация, по-видимому, встречает трудности в случае реакций, обычных для тяжелых элементов, когда активированный атом является изотопом исходного. Самым простым было бы предположение о захвате падающего нейтрона, что приводит к образованию нестабильного изотопа бомбардируемого элемента с атомным весом на единицу бо́льшим, чем до начала процесса. Однако если попытаться объяснить, каким образом нейтрон может захватываться ядром в устойчивое или квазиустойчивое состояние, то эта гипотеза приведет к серьезным теоретическим затруднениям, хотя она и согласовалась бы с наблюдаемым фактом испускания отрицательных электронов. Обычно принимается, что нейтрон притягивается ядром только тогда, когда он находится от центра ядра на расстоянии порядка 10^{-12} *см*. Отсюда следует, что нейтрон с энергией в несколько миллионов *эв* может оставаться в ядре (т. е. испытывать сильное взаимодействие с частицами, составляющими ядро) лишь на протяжении времени, порядка 10^{-21} *сек*, т. е. порядка классического времени, необходимого нейтрону для того, чтобы пройти сквозь ядро. Нейтрон захватывается в том случае, если в течение этого времени он сможет потерять избыток своей энергии (например, испустить γ-квант). При оценке вероятности такого процесса излучения обычными методами получается значение, слишком малое для того, чтобы объяснить наблюдаемые сечения. Для сохранения гипотезы захвата нейтрона нужно либо допустить, что вероятность излучения γ-кванта (или какого-либо эквивалентного процесса, как, например, образование электрон-позитронной пары) гораздо больше, чем это обычно принимается, либо предположить, что по причинам, которые не могут быть поняты в рамках существующей теории, ядро может оставаться не менее 10^{-16} *сек* в достаточно высоком энергетическом состоянии, в котором возможно испускание нейтрона.

Альтернативная гипотеза состоит в том, что падающий нейтрон не захватывается, но вызывает испускание другого нейтрона из ядра. Такой процесс можно было бы описать следующим образом: первичный нейтрон теряет часть своей энергии, переводя ядро в возбужденное состояние при каком-то неупругом столкновении. Теоретически можно легко понять, что в значительной части соударений нейтронов с ядрами такие процессы возможны. Если энергия возбуждения достаточно велика, то нейтрон может быть испущен до того, как ядро потеряет свою энергию за счет излучения γ-квантов. Образовавшийся в таком процессе атом является изотопом исходного и имеет атомный вес на единицу меньший.

Возражение, которое может встретить эта гипотеза, состоит в том, что если число нейтронов уменьшается, а не увеличивается, то априори атом при своем последующем распаде с большей вероятностью должен был бы испустить позитрон, но не отрицательный электрон, как это наблюдается на опыте. Однако в тех немногих изученных случаях, когда тяжелые элементы активируются нейтронной бомбардировкой и превращаются в свои изотопы, а изотопный состав соседних элементов известен, всегда существует — в качестве возможного конечного продукта такого превращения — стабильный изотоп элемента с $Z + 1$, имеющий атомный вес на единицу меньше, чем исходный элемент. Следует помнить также, что если нестабильное ядро имеет возможность (из энергетических соображений) испустить как электрон, так и позитрон, то согласно теории β-лучей[8] при прочих равных условиях излучение электрона будет более вероятным.

В заключение заметим, что в настоящее время представляется довольно затруднительным сделать выбор между этими двумя альтернативами, и чтобы выяснить этот вопрос, нужно поставить дальнейшие опыты.

Радоновые источники были предоставлены профессором Дж. К. Трабакки (Физическая лаборатория Министерства здравоохранения в Риме), без любезной помощи которого эти исследования были бы невозможны. Поэтому мы приносим ему нашу самую горячую благодарность. Эта работа субсидировалась Национальным советом по исследованиям (Рим). Мы благодарим также профессора Н. Парравано и профессора Л. Ролла, обеспечивших нас некоторыми редкими химическими соединениями.

5. Таблица результатов

Основные результаты проведенного исследования сведены в таблицу (см. стр. 635, 636). В 1-й колонке таблицы дается атомный номер и символ изучавшегося элемента; во 2-й — изотопный состав, причем жирным шрифтом напечатаны изотопы, которые представляют более 20% данного элемента. В 3-й колонке приводятся наблюдаемые периоды полураспада, причем знак «—» означает, что мы искали эту активность, но не обнаружили ее; в 4-й — общая оценка интенсивности: в (высокая), с (средняя), н (низкая). В 5-й колонке указывается средняя энергия электронов в миллионах *эв*. Она была получена при измерении поглощения с помощью довольно грубой экстраполяции, основанной на коэффициентах поглощения обычных β-активных веществ без сильного γ-излучения (RaE и UX_2). В 6-й колонке указано, наблюдались γ-лучи или нет; прочерк означает, что мы искали γ-лучи, но не обнаружили их. В 7-й колонке дается вероятный активный продукт. Ради простоты мы всегда предполагаем захват нейтрона; если же нейтрон испускается, то соответствующие атомные веса следует уменьшить на две единицы. Когда имеется два периода и более, данные в 4—7-й колонках относятся к разным периодам в соответствии с их порядком.

Поступила 25 июля 1934 г.

---

[8] Fermi. Zs. f. Phys., 1934, 88, 161. (Статья 58.)

Таблица

Атомный номер	Изотопы	Период полураспада	Интенсивность	Средняя энергия β-лучей, 10^6 *эв*	γ-лучи	Активный изотоп
1 H	1, 2	—	—			
3 Li	6, 7	—	—			
4 Be	9	?	?			
5 B	10, 11	?	?			
6 C	12, 13	—	—			
7 N	14, 15	—	—			
8 O	16, 17, 18	—	—			
9 F	19	9 *сек*	в	2	да	N^{16} (?)
11 Na	23	40 *сек*	с			
12 Mg	24, 25, 26	40 *сек*; 15 *час*	с; с	—; 0,5	?; да	—; Na^{24}
13 Al	27	12 *мин*; 15 *час*	в; в	0,6; 0,5	да; да	—; Na^{24}
14 Si	28, 29, 30	3 *мин*	в	1,3	да	Al^{28}
15 P	31	3 *мин*; 3 *час*	с; в	—; 0,7	?	Si^{31}
16 S	32, 33, 34	13 дней	с	0,8	—	P^{32}
17 Cl	35, 37	13 дней	с	0,8		P^{32}
20 Ca	40, 42, 43, 44	—	—			
22 Ti	46, 47, 48, 49, 50	3 *мин*	н			
23 V	51	4 *мин*	с	1,3		V^{52} (?)
24 Cr	50, 52, 53, 54	4 *мин*	с	1,3	да	V^{52}
25 Mn	55	4 *мин*; 150 *мин*	с; с	—; 1,3		V^{52}; Mn^{56}
26 Fe	54, 56	150 *мин*	с	1,3	да	Mn^{56}
27 Co	59	150 *мин*	н			Mn^{56}
28 Ni	58, 60, 61, 62	—	—			
29 Cu	63, 65	6 *мин*	с			
30 Zn	64, 66, 67, 68, 70	6 *мин*; ?	н; н			Cu; —
31 Ga	69, 71	30 *мин*	с			
33 As	75	1 день	в	1,3	да	As^{76}
34 Se	74, 76, 77, 78, 80, 82	35 *мин*	н			
35 Br	79, 81	30 *мин*; 6 *час*	в; в	—; 0,7 (?)	—	Br^{80}; Br^{82}
37 Rb	85, 87	20 *мин*	н			
38 Sr	86, 87, 88	—	—			
39 Y	89	—	—			
40 Zr	90, 91, 92, 94, 96	?	н			
42 Mo	92, 94, 95, 96, 97, 98, 100	15 *мин*; (?)	н; н			
44 Ru	96, 98, 99, 100, 101, 102, 104	—	—			
45 Rh	—	50 *сек*; 5 *мин*	в; с	0,8	—	
46 Pd	—	6 *час*; (?)	н	0,3	—	

Таблица (окончание)

Атомный номер	Изотопы	Период полураспада	Интенсивность	Средняя энергия β-лучей, 10^6 *эв*	γ-лучи	Активный изотоп
47 Ag	**107**, **109**	20 *сек*; 2 *мин*	в; в	—; 0,7	—	
48 Cd	110, 111, **112**, 113, **114**, 116	70 *мин*	н			
50 Sn	112, 114, 115, 116, 117, **118**, 119, **120**, 121, 122, 124	—	—			
51 Sb	**121**, **123**	?	?			
52 Te	122, 123, 124, 125, 126, (127), **128**, **130**	30 *мин* (?)	н			
53 I	**127**	30 *мин*	в	0,7	—	I^{128}
55 Cs	**133**	(?)	н (?)			
56 Ba	135, 136, 137, **138**	3 *мин*	н			
57 La	**139**	—	—			
58 Ce	**140**, 142	—	—			
59 Pr	**141**	5 *мин*	н			
60 Nd	**142**, 143, **144**, 145, 146	1 *час*	н			
62 Sm	144, **147**, 148, 149, 150, **152**, 154	40 *мин*	н			
73 Ta	**181**	—	—			
74 W	**182**, 183, **184**, 186	(?)	н (?)			
75 Re	**185**, **187**	—	—			
76 Os	186, 187, 188, 189, **190**, **192**	—	—			
77 Ir	—	20 *час*	в	1,1	да	Ir
78 Pt	—	(?)	н (?)			
79 Au	—	2 дня	в	0,3	—	Au
80 Hg	196, 197, 198, 199, **200**, 201, **202**, 203, 204	(?)	(?)			
81 Tl	**203**, **205**	(?)	(?)			
82 Pb	203, 204, 205, **206**, **207**, **208**, 209	—	—			
83 Bi	**209**	—	—			
90 Th	**232**	1 *мин* (?); 15 *мин*	в; в			
92 U	**238**	15 *сек*; 40 *сек* 13 *мин*; 100 *мин*	в; в; в; в		да	*

* Относительно урана см. § 3 этой статьи.

См. вводные замечания к статье 61

66

ЕСТЕСТВЕННЫЙ БЕТА-РАСПАД *

Обсуждение

Проф. Э. Ферми.— В связи с теорией β-лучей я бы хотел указать на то, что в оценке убывания интенсивности непрерывного β-спектра при низких энергиях теория, по-видимому, расходится с экспериментом.

Я не думаю, чтобы экспериментальные результаты по этому вопросу были совершенно определенными, поскольку малая проникающая способность электронов низкой энергии сильно затрудняет их исследование; если же все-таки расхождение было бы установлено вне всякого сомнения, то еще оставалась бы возможность изменить конкретную форму взаимодействия между протонами и нейтронами, с одной стороны, и электронами и нейтрино — с другой, чтобы восстановить согласие. Форма такого взаимодействия в моей теории β-лучей была выбрана лишь ради ее простоты, хотя существует большое разнообразие и других специальных видов взаимодействия, которые при необходимости можно было бы испробовать. Это относится не только к энергетическому распределению в непрерывном β-спектре, но и к правилу отбора для запрещенных переходов, хотя представленные в докладе доктора Эллиса доводы, по-видимому, определенно свидетельствуют в пользу правила отбора в его нынешней форме.

Я полностью согласен с д-ром Гамовым, что его эмпирические данные и более общие соображения симметрии являются сильным доводом в пользу возможности существования отрицательного протона. Тем не менее мне бы хотелось указать на ряд трудностей для его точки зрения, которые связаны, главным образом, с теоретической интерпретацией того факта, что атомные веса приближенно равны удвоенным атомным номерам. В теории Гейзенберга интерпретация этого обстоятельства опирается на простое предположение, согласно которому взаимодействие протон — нейтрон является основной силой, определяющей связь в ядре, и не зависит от более детальных предположений об этом взаимодействии. Если же теперь допустить наличие внутри ядра частицы нового типа, в которую нейтроны могут превращаться, испуская положительные электроны, то, по-видимому, будет трудно понять, почему число таких отрицательных протонов всегда остается очень малым и не сказывается на отношении атомного веса к атомному номеру.

* *Natural Beta Decay*. International Conference on Physics. London, 1934, vol. 1. Nuclear Physics, 66—71; Physical Society (London).

Я согласен с д-ром Гамовым, что эта трудность отнюдь не является фундаментальной, поскольку можно было бы предположить существование значительных сил отталкивания между протонами разного знака, действующих только на близких расстояниях. Однако если мы предположим существование таких сил, то, как мне кажется, их нужно будет очень тщательно подобрать, чтобы предотвратить образование отрицательных протонов в значительном количестве и все-таки допустить их наличие в ядрах совершенно разных атомных весов, таких, как бериллий и свинец.

См. вводные замечания к статье 61

67

ВЛИЯНИЕ ВОДОРОДСОДЕРЖАЩИХ ВЕЩЕСТВ НА РАДИОАКТИВНОСТЬ, НАВЕДЕННУЮ НЕЙТРОНАМИ. I*

(Совместно с Э. Амальди, Б. Понтекорво, Ф. Разетти и Э. Сегре)

При выполнении экспериментов по изучению наведенной нейтронами радиоактивности серебра мы заметили следующую аномалию в интенсивности активации: слой парафина толщиной в несколько сантиметров, помещенный между источником нейтронов и серебром, увеличивает, а не уменьшает активность. Продолжая опыты, мы убедились в том, что наличие больших блоков парафина, окружающих нейтронный источник и мишень, увеличивает интенсивность активации от нескольких десятков до нескольких сотен раз — в зависимости от геометрии опыта.

В последующих наблюдениях мы пытались выяснить — сначала лишь в общих чертах — обстоятельства, при которых это явление имеет место. К настоящему времени были установлены следующие факты:

а) радиевый источник без бериллия не дает этого эффекта, что заставляет нас приписать его действию нейтронов, а не γ-лучей;

б) вода создает эффект приблизительно той же интенсивности, что и парафин; мы считаем весьма вероятным, что этот эффект зависит от присутствия водорода, поскольку вещества, содержащие кислород, но не водород ($NaNO_3$), не вызывают возрастания активности (по крайней мере, такого же порядка величины);

в) эффект, наблюдавшийся на серебре, проявляется не всеми элементами, которые могут активироваться нейтронами; к настоящему времени мы уже наблюдали, что кремний, цинк и фосфор не обнаруживают заметного увеличения активности, тогда как медь, серебро и иод активируются гораздо сильнее, чем в отсутствие воды.

Эти немногочисленные факты указывают, по-видимому, на существование правила: к водородсодержащим веществам чувствительны лишь те элементы, при бомбардировке которых возникают активности, обусловленные изотопами исходного элемента.

Заслуживает упоминания опыт с алюминием. В воде он приобретает активность (с периодом немного менее трех минут), соответствующую

---

* *Azione di sostanze idrogenate sulla radioattività provocata da neutroni*. I. (Con E. Amaldi, B. Pontecorvo, F. Rasetti, E. Segrè). Ric. Scientifica, 1934, 5 (2), 282—283.

Al^{28}, который можно выделить из облученного кремния. При нормальных условиях эта активность столь слаба, что почти незаметна по сравнению с другими активностями, возникающими в этом же элементе.

Подобным же образом цинк и медь, из которых получается один и тот же активный продукт [1] (изотоп меди), в нормальных условиях активируются со сравнимой интенсивностью, тогда как в воде медь обнаруживает намного больший эффект, нежели цинк.

Представляется возможным следующее объяснение этих фактов: нейтроны быстро теряют энергию в ряде повторных столкновений с ядрами водорода. Сечение столкновения нейтрон — протон, вероятно, увеличивается с уменьшением энергии и можно ожидать, что после нескольких соударений нейтроны будут двигаться подобно молекулам диффундирующего газа, достигая в конечном счете энергий, соответствующих тепловому движению. Таким образом, вокруг источника нейтронов возникает нечто похожее на раствор нейтронов в воде или парафине. Концентрация этого раствора в каждой точке зависит от интенсивности источника, геометрических условий процесса диффузии и возможных процессов захвата нейтронов водородом или другими присутствующими ядрами.

Не исключено, что подобная точка зрения может оказаться существенной при объяснении эффектов, наблюдавшихся Ли [2].

Изучение всех этих явлений продолжается.

Институт физики Римского университета

Рим, 22 октября 1934

---

[1] T. Bjerge, C. H. Westcott. Nature, 1934, **134**, 286.
[2] D. E. Lea. Nature, 1934, **133**, 24.

См. вводные замечания к статье 61

68

ВЛИЯНИЕ ВОДОРОДСОДЕРЖАЩИХ ВЕЩЕСТВ НА РАДИОАКТИВНОСТЬ, НАВЕДЕННУЮ НЕЙТРОНАМИ. II *

(Совместно с Б. Понтекорво и Ф. Разетти)

В предыдущем письме мы сообщали о воздействии водородсодержащих веществ на радиоактивность, вызываемую нейтронной бомбардировкой, и упомянули гипотезу, согласно которой это влияние, т. е. значительное усиление наведенной радиоактивности, обусловлено замедлением нейтронов, испускаемых источником. После этого мы провели следующие опыты.

1. Установив, что непосредственная активация серебряного цилиндрика источником (350 *мкюри* Rn + Be), расположенным в 20 *см* от него, оказывается ничтожно малой, мы поместили этот источник в центре наполненного водой цилиндра диаметром 14 *см*. После этого при той же самой геометрии опыта серебро активируется довольно интенсивно: наши счетчики давали около ста отсчетов в минуту — приблизительно столько же регистрировалось бы при непосредственном контакте серебряного цилиндрика с источником в отсутствие воды.

Предполагая, что влияние водородсодержащих веществ действительно обусловлено диффузией и последующим замедлением нейтронов, этот эксперимент можно интерпретировать следующим образом. Нейтроны, или по крайней мере, заметная часть их, прежде чем покинуть контейнер с водой, замедляются таким образом, что их средняя скорость значительно уменьшается, причем выходящий поток остается постоянным либо, возможно, убывает. Этот опыт, следовательно, позволяет сравнить действие одинакового числа нейтронов с различными скоростями и обнаруживает огромную эффективность более медленных из них.

2. То обстоятельство, что медленные нейтроны оказываются столь эффективными при активации разных веществ, приводит к мысли, что они должны также и сильно поглощаться. Для проверки этого предположения мы провели вторую серию экспериментов. Небольшая родиевая пластинка, расположенная в полости внутри парафинового блока, активировалась один раз без фильтров, а затем — будучи окруженной поглотителями толщиной вплоть до 0,5 *см*. До настоящего времени мы исследовали лишь сильные поглотители. Родий был выбран в качестве детектора медленных нейтронов благодаря его очень высокой активации, так что при использовании родиевой пластинки с поверхностью всего в несколько квадратных сантиметров эффект можно удобно наблюдать с помощью элек-

* *Effetto di costanze idrogenate sullà radioattività provocata da neutroni*. II. (Con B. Pontecorvo, F. Rasetti). Ric. Scientifica, 1934, 5 (2), 380—381.

троскопа. В водородсодержащей среде практически возбуждается только короткоживущая активность родия с периодом полураспада 44 *сек*, удобным для измерений. В результате этих опытов было установлено существование огромного различия в поглощающей способности различных элементов для медленных нейтронов. В качестве примера крайних случаев отметим, что слой бора около 4 *мг/см*^{2} или слой иттрия 15 *мг/см*^{2} уменьшают активность вдвое, т. е. поглощающие способности для нейтронов и α-частиц оказываются вполне сравнимыми. С другой стороны, чтобы создать такое же поглощение в свинце, требуются толщины порядка нескольких сантиметров. Эти результаты можно описать, выразив поглощающую способность через атомное сечение. Значения сечений, найденные для наиболее сильно поглощающих элементов, по порядку величины равны 10^{-21} *см*^{2}, т. е. примерно в тысячу раз больше геометрических сечений ядер. Наибольшие сечения, определенные до сих пор, составляют $3\cdot10^{-21}$ для бора, $7\cdot10^{-21}$ для иттрия, $0{,}8\cdot10^{-21}$ для иридия, $0{,}4\cdot10^{-21}$ для родия и $0{,}6\cdot10^{-21}$ *см*^{2} для лития. Большие сечения обнаруживают также Cl, Co и Ag. В настоящее время продолжается систематическое исследование этого вопроса, поскольку для ядерного поглощения такие сечения необычны.

Некоторые из элементов с наибольшими сечениями оказываются среди тех веществ, которые в водородсодержащих средах обнаруживают и самые большие активности. Грубая оценка полного числа активных ядер, которые можно получить за пределами наполненного водой сосуда, содержащего источник, приводит к выводу, что для таких элементов количество активированных атомов равно числу испущенных нейтронов. Для других же элементов, таких, как литий и бор, большому коэффициенту поглощения не соответствует сколько-нибудь заметная активность. Этот факт можно истолковать, предположив, что возникающие радиоактивные ядра ускользают от нас вследствие своих периодов полураспада (очень больших или очень малых) или в силу низкой проникающей способности их β-лучей, либо же допустив, что захват нейтрона ведет к образованию стабильных изотопов, как, например, превращение Li^6 в Li^7 или B^{10} в B^{11}.

Мы искали также аномальное поглощение при непосредственной активации, не используя водородсодержащие среды, и получили отрицательный результат. Этот факт позволяет думать, что данный эффект характерен для медленных нейтронов.

И, наконец, был поставлен опыт по активации родия (помещенного на фиксированном расстоянии от источника) в сосуде с раствором борной кислоты разных концентраций. Как и можно было предвидеть, уже очень низкие концентрации оказываются вполне достаточными, чтобы сильно уменьшить активацию. При нашей геометрии опытов (родий находился примерно в 3 *см* от источника) активность снижается вдвое в присутствии раствора с концентрацией 0,2% бора. Увеличение концентрации не приводит к дальнейшему пропорциональному уменьшению активности. Так, при концентрации в три раза большей поглощение возрастает на $\sim$70%.

Институт физики Римского университета. Рим, 7 ноября 1934 г.

См. вводные замечания к статье 61

69

ИСКУССТВЕННАЯ РАДИОАКТИВНОСТЬ, НАВЕДЕННАЯ НЕЙТРОННОЙ БОМБАРДИРОВКОЙ. II *

(Совместно с Э. Амальди, О. Д'Агостино, Б. Понтекорво, Ф. Разетти и Э. Сегре)

Введение

В этой статье описываются дальнейшие результаты по изучению искусственной радиоактивности, наведенной нейтронной бомбардировкой; они были получены в Физической лаборатории Римского университета после публикации нашей первой статьи на ту же тему [1]. Предварительные сообщения, содержащие основные результаты, уже печатались некоторыми из нас [2].

Несомненно, самый интересный новый результат связан с воздействием водородсодержащих веществ на активацию некоторых элементов, бомбардируемых нейтронами (§ 1). Интерпретируя это явление, мы предполагаем, что нейтроны замедляются в столкновениях с ядрами водорода (§ 2). В § 3 обсуждаются некоторые аномально большие сечения поглощения медленных нейтронов; во многих случаях такое аномальное поглощение связано с испусканием γ-лучей (§ 4). Ряд попыток получения информации об энергии медленных нейтронов описан в § 5. Эксперименты по рассеянию медленных нейтронов описываются в § 6, а в § 7 рассмотрено образование медленных нейтронов за счет воздействия веществ, в которых нет водорода. В § 8 упомянутые выше результаты обсуждаются с теоретической точки зрения. В § 9 и 10 рассматриваются химические методы раз-

---

* *Artificial Radioactivity Produced by Neutron Bombardment. II.* (With E. Amaldi, O. D' Agostino, B. Pontecorvo, F. Rasetti, E. Sergè.) Proc. Roy. Soc. London, 1935, A149, 522—558. Представлено лордом Э. Резерфордом.

[1] Fermi, Amaldi, D'Agostino, Rasetti, Segrè. Proc. Roy. Soc., 1934, A146, 483. (Статья 65.)

[2] Fermi, Amaldi, Pontecorvo, Rasetti, Segrè. Ric. Scient., 1934, 5 (2), 282 (статья 67); Fermi, Pontecorvo, Rasetti. Ric. Scient. 1934, 5 (2), 380 (статья 68); Amaldi, D'Agostino, Segrè. Ric. Scient., 1934, 5 (2), 381; Amaldi, D'Agostino, Fermi, Pontecorvo, Rasetti, Segrè. Ric. Scient., 1934, 5(2), 467; 1935, 6 (1), 123. Бьердж и Уэсткот повторили некоторые из наших опытов и получили аналогичные результаты (Bjerge, Westcott. Proc. Camb. Phil. Soc., 1935, 31, 145); мы благодарны им за присылку рукописи.

деления радиоактивных изотопов и усовершенствование методики измерений. Результаты систематического исследования различных элементов приведены в § 11; в конце статьи они сведены в таблицу.

§ 1. Воздействие водородсодержащих веществ на активацию

Выполняя описанные ранее исследования, мы заметили некоторые нерегулярности в интенсивности активации серебра нейтронами (от источника радон + бериллий), которые, казалось, зависели от ряда не очень ясных геометрических факторов. Последующее изучение показало, что на активацию сильно влияют окружающие нейтронный источник предметы; в частности, она чрезвычайно возрастает, когда источник и активируемое вещество окружаются значительным количеством воды или парафина. Сразу же можно было предположить, что этот эффект связан с присутствием водорода, так как вещества, не содержащие водород, не обнаружили сравнимого эффекта (см. § 7).

Чтобы объяснить, обусловлена ли столь высокая активация нейтронами или γ-лучами, которые весьма интенсивно испускаются нашим источником, мы повторили опыт, используя в качестве источника 100 *мг* радия без бериллия и не обнаружили никакой наведенной радиоактивности. Отсюда следует, что эффект действительно связан с нейтронами. Этот вывод подтверждается тем, что такое же действие водорода наблюдалось и с (Po + + Be)-источником нейтронов, причем интенсивность эффекта соответствовала числу испущенных нейтронов.

Не каждое активируемое нейтронами вещество проявляет увеличение активности при облучении через слой воды. Наиболее чувствительными к такому влиянию активностями оказываются: Na (15 *час*), Al (2,3 *мин*), V (3,75 *мин*), Ag (22 *сек*, 2,3 *мин*), Cu (5 *мин*), Rh (44 *сек*, 3,9 *мин*). На активацию некоторых элементов (или отдельных периодов распада) вода не влияет; среди них: Si (2,3 *мин*), Al (10 *мин*), Mg (40 *сек*), Mn (3,75 *мин*), Zn (5 *мин*). Возрастание активности в присутствии воды отмечалось нами всякий раз, когда было известно, что активный элемент является изотопом бомбардируемого (около 20 случаев).

Для приближенной оценки чувствительности различных активностей к действию воды или парафина мы выражали ее в условном масштабе. Цилиндр из исследуемого вещества (около 2 *см* в диаметре и 5 *см* длиной) облучается источником, который ставится на его центр. Тонкие металлические опоры поддерживают источник и цилиндр на некотором расстоянии от других предметов. Измеряется активность, достигаемая за подходящее время облучения. После этого тот же цилиндр облучается тем же самым источником при том же их относительном расположении в течение равного промежутка времени, но при этом оба они окружены большим цилиндрическим блоком парафина 27 *см* в диаметре и высотой 20 *см*. Отношение активностей в присутствии парафина и без него принимается в качестве

меры чувствительности к водородсодержащим веществам и обозначается через α. В таком масштабе $\alpha = 1$ означает, что данное вещество не показывает никакого возрастания активности при облучении в парафине. Это определение коэффициента чувствительности является, конечно, лишь эмпирическим, поскольку оно в какой-то мере зависит от геометрии опыта.

Отличные от единицы коэффициенты чувствительности наблюдались в пределах от $\alpha = 1{,}6$ для U (13 *мин*, 100 *мин*) до $\alpha = 40$ для V (3,75 *мин*). Следует, однако, заметить, что последняя цифра может и не быть максимальной, ибо многие вещества не активируются заметным образом при облучении в воздухе, и соответствующие активности проявляются только при облучении в воде, да и то довольно слабо.

Возрастание активации, обусловленное наличием парафина или воды, становится гораздо бо́льшим, когда источник и облучаемое вещество отстоят на несколько сантиметров друг от друга (см. § 5).

§ 2. Объяснение воздействия водородсодержащих веществ замедлением нейтронов

Описанные в предыдущем разделе опыты можно объяснить, предположив, что действие окружающей источник воды, или, вернее, водорода, связано с рассеянием и замедлением первичных нейтронов при упругих соударениях с ядрами водорода.

Легко показать, что столкновение нейтрона с протоном уменьшает энергию нейтрона в среднем в e раз. Следовательно, 10 столкновений доведут энергию нейтрона до $\sim 1/20\,000$ ее начальной величины. Если положить начальную энергию равной $4 \cdot 10^6$ *эв*, то после 10 соударений она должна составить около 200 *эв*, а уменьшение ее до значений, соответствующих тепловому равновесию, потребовало бы менее 20 столкновений. Описанные нами ранее явления можно теперь объяснить, предполагая, что некоторые ядра легче захватывают медленные нейтроны, нежели быстрые. В этом и следующем разделах наши опыты будут обсуждаться в рамках такой гипотезы.

Возрастание активности за счет действия водорода можно приписать как рассеянию, вызывающему увеличение потока нейтронов через активируемое вещество, так и более высокой эффективности столкновения медленного нейтрона (по сравнению с быстрым). Чтобы показать существенно бо́льшую значимость второго фактора, был поставлен следующий эксперимент.

Серебряный цилиндр облучался источником Rn + Be (350 *мкюри*), расстояние между источником и цилиндром составляло 20 *см*. Если, кроме воздуха, их ничто не окружало, то после облучения никакой активности в цилиндре зарегистрировать не удавалось. Затем, при том же самом расстоянии, источник был окружен цилиндром (14 *см* в диаметре и 14 *см*

глубиной), наполненным водой. Облученное в таких условиях серебро обнаруживает высокую активность (около 100 импульсов в минуту на наших счетчиках). Этот опыт показывает, что медленные нейтроны гораздо более эффективны, чем быстрые. Действительно, окружение источника водой не увеличивает числа нейтронов, падающих на серебро (может быть, немного уменьшает его из-за поглощения). Поскольку же в этих условиях вода значительно увеличивает активацию, следует сделать вывод, что выход активации на один падающий нейтрон сильно возрастает благодаря замедлению нейтронов.

§ 3. Поглощение медленных нейтронов

Вывод предыдущего раздела, согласно которому сечение активации многих элементов намного больше для медленных нейтронов, чем для быстрых, побуждает выяснить, сильно ли поглощаются медленные нейтроны теми элементами, которые чрезвычайно интенсивно активируются нейтронами. В этой связи мы провели систематическое изучение поглощения медленных нейтронов в различных элементах.

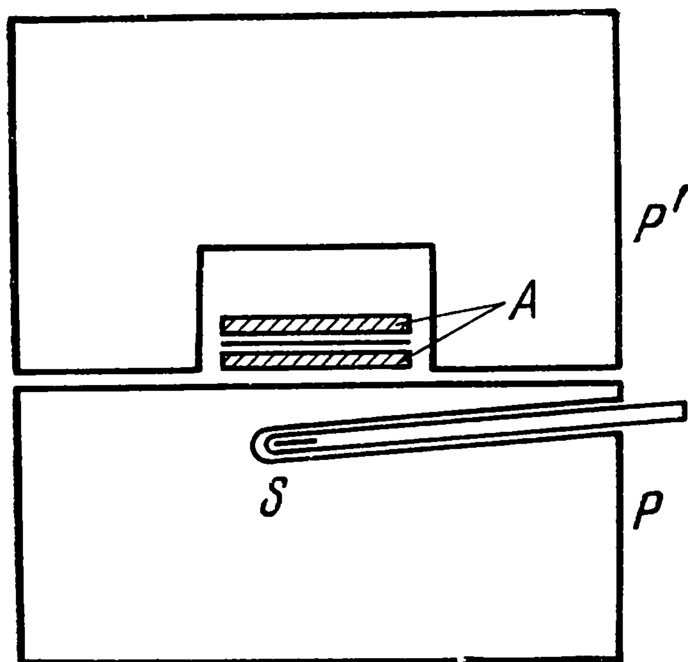


Рис. 1

Главная цель этого исследования состояла в отыскании элементов с аномально большими коэффициентами поглощения медленных нейтронов; поэтому обычно использовались довольно тонкие слои поглощающего материала. На рис. 1 показано устройство для таких измерений поглощения. Источник нейтронов — трубка (S) с Rn + Be — помещается внутри парафинового цилиндра P (диаметром 24 *см*, высотой 14 *см*) примерно в 2 *см* от его верхней поверхности. На цилиндр P ставился второй цилиндр P'; в его нижней поверхности было сделано углубление диаметром в несколько сантиметров и глубиной 2—3 *см*. Детектор медленных нейтронов—родиевая пластинка, иногда серебряная,—располагался внутри этого углубления, и его активность измерялась после облучения (в течение стандартного промежутка времени) сначала без поглощающих слоев, а затем в окружении двух пластинок поглотителя A, как показано на рис. 1. Отношение активностей, измеренных без поглощающих слоев и с ними, определяет поглощение. В этих опытах, а также и во многих других, детектором медленных нейтронов обычно служил родий, наведенная активность которого очень велика и может весьма точно измеряться ионизационной камерой; кроме того, из двух периодов полураспада Rh — 44 *сек* и 3,9 *мин* — существенным, практически, оказывается лишь первый, что очень облегчает обработку результатов измерений.

В итоге таких измерений поглощения было найдено, что толщина δ слоя половинного поглощения медленных нейтронов изменяется для различных элементов в очень широких пределах. Для некоторых элементов он крайне мал. Так, например, мы установили, что для бора $\delta = 0{,}004$ *г/см*²$, для иттрия[3] $\delta = 0{,}015$ *г/см*^{2}, для кадмия $\delta = 0{,}014$ *г/см*^{2}; наоборот, для ряда других элементов δ в несколько тысяч раз больше. Так, несколько сантиметров свинца поглощают слабее, чем слой бора в несколько *мг/см*^{2}.

Выражая коэффициенты поглощения через σ — ядерное сечение столкновения медленного нейтрона, которое приводит к активации,— в некоторых случаях можно получить удивительно большие значения; например, $\sigma = 3000 \cdot 10^{-24}$ для B, $\sigma = 7000 \cdot 10^{-24}$ для Y^3 и $\sigma = 10000 \cdot 10^{-24}$ *см*^{2} для Cd. Последнее сечение является пока наибольшим. Интересно, что эти сечения намного больше геометрических, в то время как для быстрых нейтронов, как хорошо известно, они сравнимы с геометрическими сечениями ядер [4]. Действительно, мы непосредственно установили, что поглощение бором обычных быстрых нейтронов, по крайней мере, в 1000 раз меньше поглощения в этом же элементе нейтронов медленных.

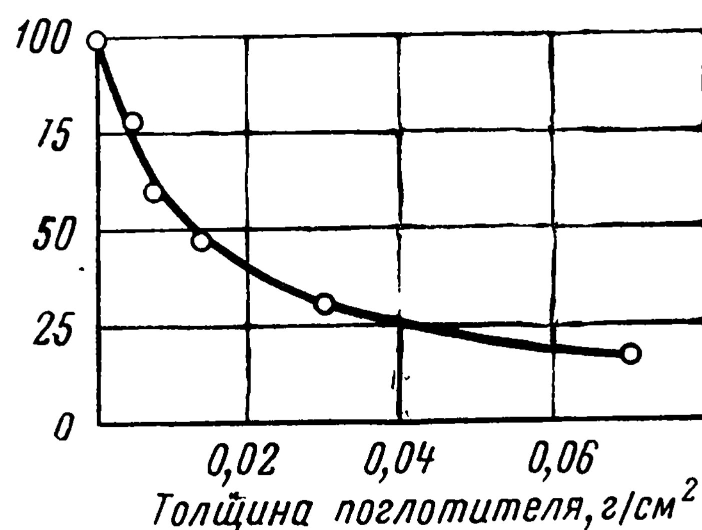


Рис. 2

Эти опыты по измерению поглощения не относятся к гомогенным нейтронам. В самом деле, кривые поглощения никоим образом не являются экспоненциальными; с ростом толщины коэффициент поглощения убывает так, как это показано, например, на рис. 2 (кривая поглощения для кадмия). Следует отметить, кроме того, что толщина слоя половинного поглощения до некоторой степени зависит от расположения парафина, поскольку оно влияет на среднюю скорость нейтронов. Так, поглощение нейтронов оказывается бóльшим внутри парафинового блока, чем снаружи.

---

[3] Как впоследствии выяснилось, сильное поглощение медленных нейтронов иттрием не подтвердилось. Ошибочный результат был обусловлен загрязнениями образца иттрия.— *Прим. ред.*

[4] Dunning. Phys. Rev., 1934, 45, 586.

§ 4. Испускание γ-лучей при захвате нейтрона

Аномальное поглощение медленных нейтронов заставляет более подробно исследовать сам процесс поглощения. Примем простейшее допущение, по которому нейтрон захватывается ядром и образует изотоп, тяжелее исходного на одну единицу массы. Если этот более тяжелый изотоп нестабилен, то для сильно поглощающих элементов можно ожидать появления высокой наведенной радиоактивности. Это справедливо, например, для индия и иридия, которые, как известно, переходят в радиоактивные изотопы. Грубая оценка интенсивности активации поглощающего вещества и числа поглощенных нейтронов показывает, что почти каждый акт поглощения приводит к образованию активного атома. В других же случаях (B, Y, Cd) обнаружено, что аномально сильное поглощение не сопровождается какой бы то ни было или, во всяком случае, значительной активацией [3]. По-видимому, можно полагать, что здесь захват нейтрона приводит к образованию стабильного ядра. Ясно, что этому благоприятствует наличие у элемента большого числа стабильных изотопов с атомными весами, различающимися на одну единицу (Cd, Hg).

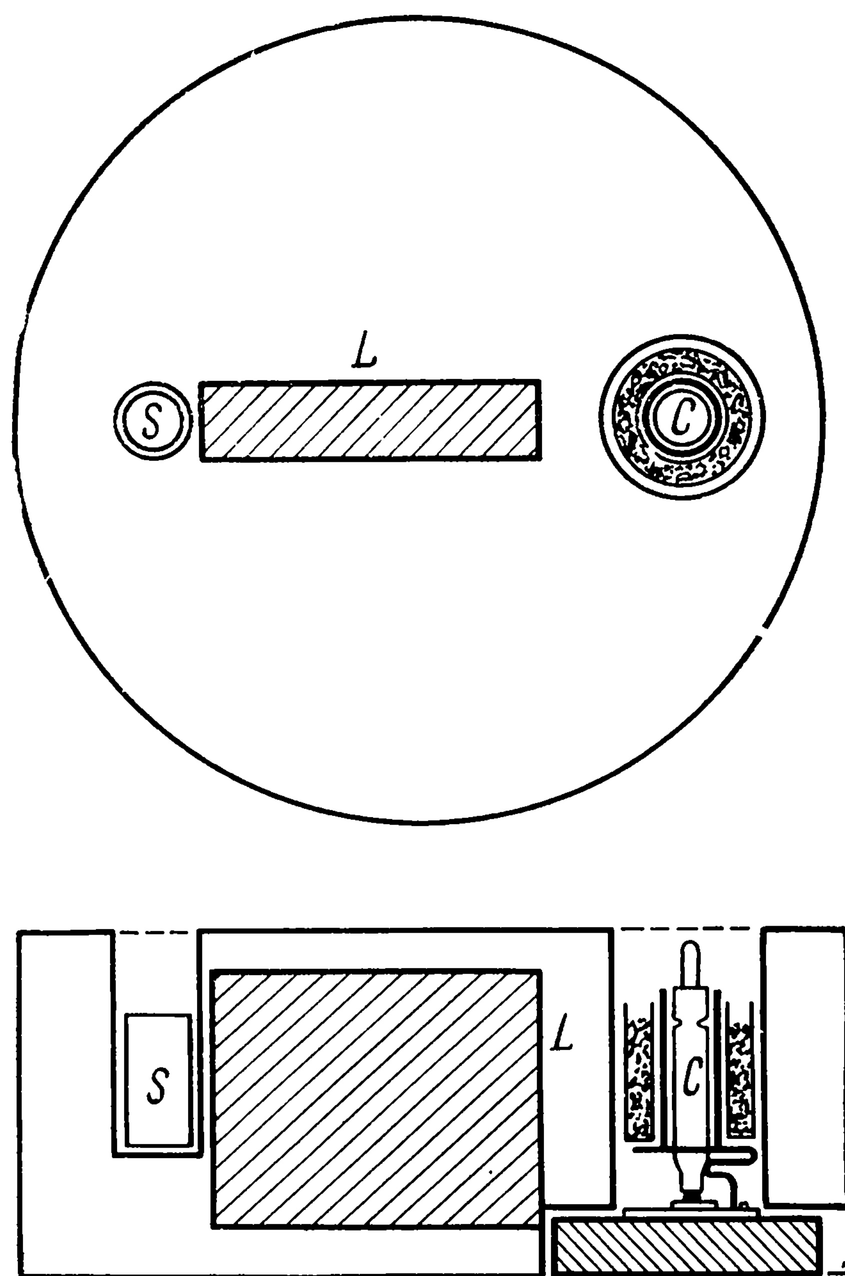


Рис. 3

Если медленный нейтрон просто захватывается, то в обоих рассмотренных случаях можно ожидать, что процесс поглощения будет сопровождаться испусканием γ-излучения с энергией, соответствующей энергии связи нейтрона. Для быстрых нейтронов Ли [5] уже сообщал о γ-излучении подобного рода.

В следующем эксперименте нам удалось показать для нескольких элементов, что при поглощении медленных нейтронов происходит испускание относительно интенсивного γ-излучения такого типа.

Полоний-бериллиевый источник нейтронов S (рис. 3) (около 60 *мкюри*) вводился в парафиновый блок вместе с одним из наших стандартных счетчиков Гейгера — Мюллера C. Свинцовый поглотитель L толщиной 10 *см* защищал счетчик от прямых γ-лучей источника. Сам счетчик окружался двухмиллиметровой свинцовой фольгой. В этих условиях он регистриро-

[5] D. E. Lea. Nature, 1934, 133, 24.

вал около 30 отсчетов в минуту. Снаружи свинцовой фольги вокруг счетчика помещались маленькие цилиндрические слои различных веществ. Для сильно поглощающих веществ обычно наблюдалось весьма заметное возрастание числа отсчетов. Это было замечено, например, для Co, Cd, Y, Cl, Ir, Au, Hg, когда число отсчетов увеличивалось иногда более чем вдвое. Бор и литий ведут себя совсем по-другому: сильно поглощая медленные нейтроны, они не испускают γ-лучей. Вместо этого поглощение медленных нейтронов в этих элементах оказалось связанным с испусканием тяжелых частиц (см. § 11). С теоретической точки зрения такая возможная альтернатива испусканию γ-лучей возникает, вероятно, лишь для очень легких элементов вследствие низкого потенциального барьера.

После удаления парафина излучение отсутствовало, а это означало, что упомянутое выше испускание γ-лучей некоторыми веществами действительно обусловлено медленными нейтронами. Более того, этот эффект очень сильно подавлялся, когда излучаемые вещества и счетчики окружались борным экраном.

§ 5. Энергия медленных нейтронов

Было бы весьма важно как-то оценить среднюю энергию медленных активирующих нейтронов; в этом разделе будут описаны некоторые попытки проделать это.

Как уже говорилось, средняя энергия нейтронов уменьшается в *e* раз при каждом упругом соударении с протонами, если только значения энергии велики по сравнению с тепловой. Если же энергия медленных нейтронов действительно уменьшится до этого предела, то следует ожидать, что процесс диффузии будет, видимо, зависеть от температуры. Мы предприняли попытку обнаружить такой эффект с помощью следующего опыта.

Родиевый или серебряный детектор облучался Rn + Be нейтронным источником в одинаковых геометрических условиях сначала в горячем парафине при 200° С, а затем в смеси бензола и пентана при 20° С, имеющей ту же плотность и элементный состав при этой температуре, что и парафин при 200° С. В пределах точности 2% эти два измерения не обнаружили различия в активации. Смесью наполнялся цилиндр диаметром 26 *см* и высотой 15 *см*, детектор располагался на его оси в 1 *см* от поверхности жидкости, а источник — также на оси — на 2 *см* ниже. Следует сделать вывод, что температура, по крайней мере, в этих условиях, не воздействует на активацию; это можно было бы объяснить тем, что энергия активирующих нейтронов выше тепловой. Однако такой вывод не вполне убедителен: для очень медленных нейтронов не известны зависимости сечения активации и средней длины свободного пробега от скорости.

Непосредственным методом измерения энергии медленных нейтронов или, по меньшей мере, оценки ее верхнего предела могло бы послужить определение средней ионизации, создаваемой в каждом столкновении медленного нейтрона с ядром водорода. Это можно было бы сделать либо

путем измерения полной ионизации в наполненной водородом камере, либо путем непосредственного определения ионизации в отдельном акте с помощью линейного усилителя. В обоих методах действие медленных и быстрых нейтронов может быть разделено экранированием камеры тонким слоем бора. В настоящее время подобного рода эксперименты проводятся, но пока не привели к определенным результатам.

Кроме того, мы исследовали, будет ли вызываемое парафином возрастание активации наблюдаться и с другими источниками нейтронов. Мы воспользовались нейтронами, испускаемыми бериллием при облучении его γ-лучами радия [6]; было найдено, что такой источник дает большой эффект. Это значит, что нейтроны, замедленные в парафине, являются более медленными, чем испускаемые в этой ядерной реакции.

§ 6. Рассеяние и диффузия медленных нейтронов

В связи с измерениями поглощения, описанными в § 3, мы обследовали в общих чертах рассеивающие свойства различных веществ. На рис. 4 показана экспериментальная установка. Источник S помещается в цилиндрический парафиновый блок P, как было описано в § 3. Для активации

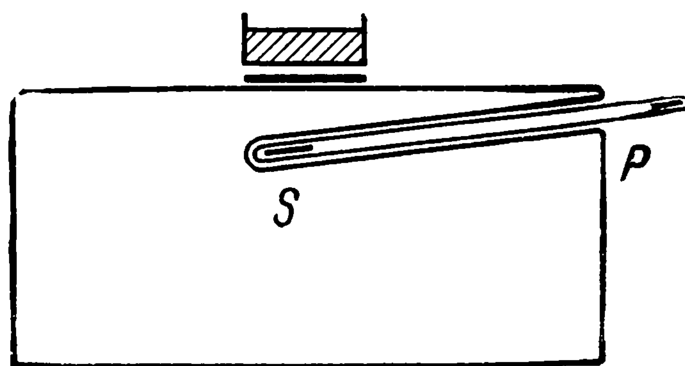


Рис. 4

использовавшейся в качестве детектора родиевой пластинки она помещалась сверху парафинового блока. Активация измерялась один раз с исследуемым веществом, помещенным в виде слоя над родиевой пластинкой, а другой — без него. В ряде случае активация усиливалась, когда вещество накладывалось на родий, что указывало на действие медленных нейтронов, рассеянных этим веществом назад. Например, слой углерода толщиной в несколько сантиметров увеличивал активацию примерно в пять раз. Аналогичные результаты получены для нескольких легких элементов (Be, C, Si). Тяжелые элементы создают обычно гораздо меньший эффект. Бор, обладающий большим коэффициентом поглощения, не производит никакого заметного усиления активности. Это говорит о том, что аномально большое поглощение этого элемента обусловлено, главным образом,реальным поглощением, а не рассеянием.

[6] Szilard, Chalmers. Nature, 1934, **134**, 494.

Повторение такого же эксперимента с водой дало приведенную на рис. 5 кривую интенсивности активации как функции толщины рассеивающего слоя. Подобный же результат получается при использовании парафина вместо воды.

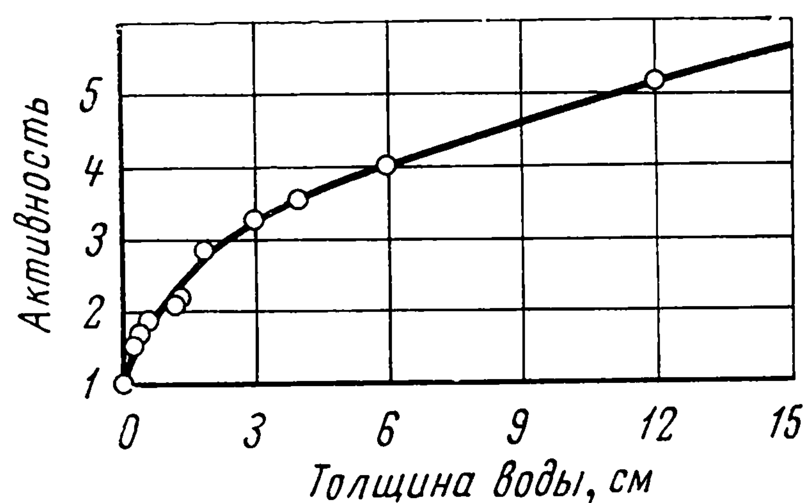


Рис. 5

Другие опыты по рассеянию проводились на установке, показанной на рис. 6. В центре парафинового цилиндра диаметром 13 *см* и высотой 11 *см* находится нейтронный источник S. Детектор, серебряный или родиевый цилиндр R, устанавливается на расстоянии 30 *см* от источника. Между ними вводится экран D, изготовленный из рассеивающего вещества; размеры его таковы, что он стоит на пути всех без исключения нейтронов, которые могут попасть на детектор из парафинового блока. Разность активностей детектора, измеренных при облучении с экраном D и без него, является мерой суммарного эффекта рассеяния и поглощения. На этой установке было найдено, что слой парафина толщиной 0,5 *г/см*^{2} снижает интенсивность активации серебра примерно вдвое; кроме того, и в этом случае было обнаружено, что поглощение не является экспоненциальным. Подобный же результат получается при использовании воды в качестве рассеивателя. Из этих опытов можно найти порядок величины средней длины пробега медленных нейтронов в воде или парафине, так как она сравнима с наблюдаемой толщиной слоя половинного поглощения.

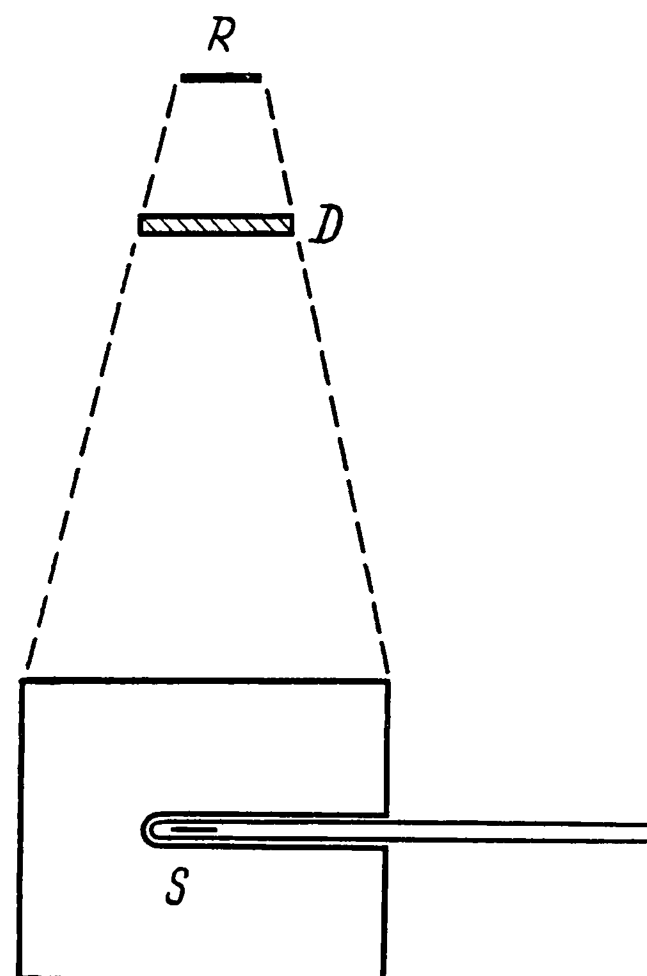


Рис. 6

Для углерода слой половинного поглощения составляет около 5 *г/см*^{2}. Свинец толщиной примерно 4 *г/см*^{2} давал небольшое понижение интенсивности, обусловленное в основном рассеянием.

Другая серия опытов была выполнена для определения того, как убывает с расстоянием от источника интенсивность активации родия в воде. Источник погружался в бак с водой (размерами 40 ×

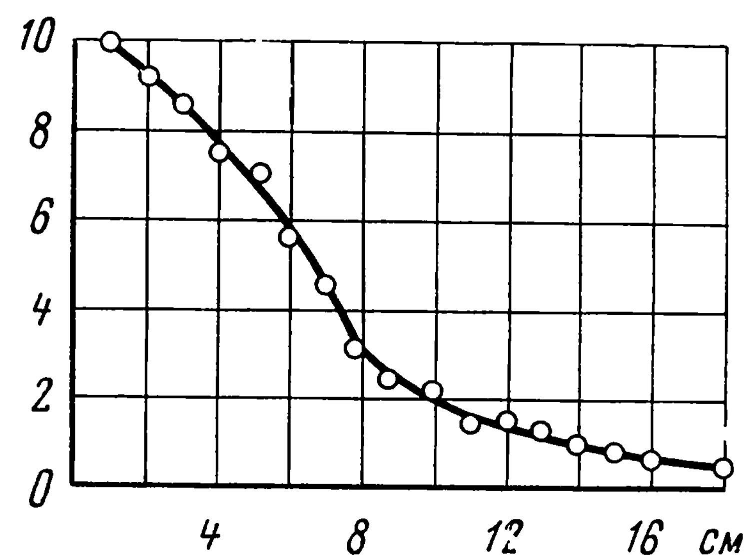


Рис. 7

$\times 40 \times 100$ *см*^{3}), и наведенная на различных расстояниях активность родия измерялась ионизационной камерой. Результат представлен на рис. 7, где активность дана как функция расстояния. Аналогичный эксперимент был проведен с 2%-ным раствором борной кислоты в воде; полученная кривая подобна предыдущей, но интенсивность намного меньше вследствие поглощения нейтронов бором.

Общая картина процесса замедления, которая следует из этих опытов, состоит в следующем. Основная доля процесса диффузии происходит, когда первичный нейтрон, испытав лишь несколько столкновений с ядрами водорода, все еще сохраняет бо́льшую часть своей начальной энергии. Когда скорость убывает до величины, при которой становится заметным поглощение бора, средняя длина свободного пробега в водороде оказывается, видимо, довольно малой, и поэтому после этой стадии процесс диффузии ограничивается малым объемом. Это объясняет также и тот факт, что в воде коэффициент поглощения нейтронов бором почти не зависит от расстояния до источника.

§ 7. Влияние веществ, не содержащих водород, на активацию

Мы попытались выяснить, нельзя ли наблюдать эффекты, аналогичные действию воды или парафина, также и с веществами, не содержащими водород. Ввиду того, что для этих опытов необходимы большие количества материалов, было изучено лишь несколько веществ: Pb, SiO_2, C, Fe. Во всех этих веществах, исключая Fe, наблюдалось определенное возрастание активации родия. При геометрии опыта, которая будет описана ниже, этот эффект возрастал в 2—5 раз, в то время как для воды соответствующий множитель составил бы несколько сотен. То, что такое возрастание активности обусловлено не только рассеянием, но, главным образом, потерей скорости нейтронов, подтверждается тем, что при тех же самых условиях активация кремния не увеличивается. Более того, очень тонкие кадмиевые поглотители заметно снижают активацию родия. Эти факты представляются довольно странными, особенно для свинца, так как для него было бы трудно объяснить замедление нейтронов упругими соударениями.

Детали этих опытов таковы: из свинцовых блоков был сложен куб с ребром около 50 *см*. В центре помещался нейтронный источник, а в 10 *см* от него — родиевый детектор. При одинаковых геометрических условиях активность в присутствии свинца оказалась примерно втрое выше, чем без него. Аналогичный результат получается, когда вместо родиевого используется серебряный детектор, в то время как кремниевый детектор не обнаруживает какого-либо возрастания активности. Этот факт должен служить указанием на то, что скорость нейтронов уменьшается при столкновениях с ядрами свинца. Такая точка зрения подтверждается уменьшением активации родия в свинце вдвое при введении кадмиевого поглоти-

теля толщиной 1 *г/см*^{2}. Сравнение такого поглощения кадмия с тем, что имеет место для него в случае медленных нейтронов в воде (слой половинного поглощения составляет 0,014 *г/см*^{2}), заставляет предположить, что средняя скорость нейтронов в свинце не столь мала, как в воде.

Такой же эксперимент был поставлен с графитовым цилиндром объемом в 3 *л*. Источник помещался в центре, а родиевый детектор — в 5 *см* от него. Возрастание активности было примерно таким же, как и в предыдущем опыте со свинцом, а поглощение нейтронов кадмием было заведомо не меньше. Сходные результаты были получены и для кремнезема, взятого в виде кизельгура. На железе подобный эффект нельзя было наблюдать, вероятно, вследствие его сравнительно сильного поглощения.

Эти эксперименты приводят к выводу, что большинство материалов обнаруживает свойство усиливать активацию. Поэтому при выполнении количественных опытов по активации веществ всегда нужно учитывать возможное влияние окружающих предметов, может быть, даже и воздуха. По этой причине приведенные выше данные о влиянии ряда материалов следует понимать лишь как ориентировочные.

§ 8. Теоретические соображения о свойствах медленных нейтронов

В нашей первой статье остался нерешенным вопрос: что происходит, когда бомбардировка нейтронами приводит к возникновению радиоэлемента, являющегося изотопом исходного,— захватывается ли нейтрон или же он выбивает другой нейтрон из бомбардируемого ядра, т. е. равен ли атомный вес радиоактивного продукта $A + 1$ или $A - 1$? Мы считаем, что накопленные с тех пор данные говорят в пользу первого предположения. Вот основные из этих данных.

а) Были замечены две новые слабые активности: одна с периодом 15 *час* — в натрии, а другая с периодом 2,3 *мин* — в алюминии. Совпадение этих периодов с уже известными (речь идет об алюминии и магнии в первом случае и о кремнии и фосфоре—во втором), а также результаты химического анализа в случае натрия (см. § 11) показывают, что эти радиоэлементы представляют собой соответственно изотопы Na и Al. Поскольку оба эти элемента обладают лишь одним стабильным изотопом, Na^{23} и Al^{27}, то для радионатрия выбор ограничен Na^{24} и Na^{22}, а для радиоалюминия — Al^{28} и Al^{26}. Далее, как известно из других ядерных реакций, оба более легких изотопа, Na^{22} и Al^{26}, обладают другими периодами и излучают не электроны, а позитроны, так что предположение о нейтронном захвате, по крайней мере, в этих случаях, представляется вполне обоснованным.

б) В то время как нет никаких теоретических трудностей в понимании того, каким образом нейтрон с ничтожно малой кинетической энергией может захватываться ядром, кажется сомнительным, чтобы он мог выбить

из ядра прочно связанный нейтрон. Еще труднее понять, откуда во втором случае может взяться энергия, необходимая для испускания γ-лучей.

Анализируя в дальнейшем экспериментальные факты, мы будем исходить из того, что нейтроны, особенно медленные, легко захватываются многими ядрами.

Однако в понимании самого процесса захвата или, во всяком случае, в объяснении больших сечений, которые наблюдались экспериментально для ряда элементов, существуют некоторые теоретические трудности. Тем не менее стоит сформулировать несколько общих следствий теории, о которых всегда нужно помнить при рассмотрении этой задачи.

Допустим, как это обычно делается, что действующие между нейтроном и ядром силы проявляются вплоть до расстояний, примерно равных радиусу ядра. Если это так, то де-бройлевская длина волны быстрых нейтронов будет порядка радиуса действия, а медленных, следовательно, — много больше. Известная теория столкновений, трактующая ядро как потенциальную яму, принимает в этом случае особенно простую форму. Пусть ψ представляет собой собственную s-функцию, соответствующую

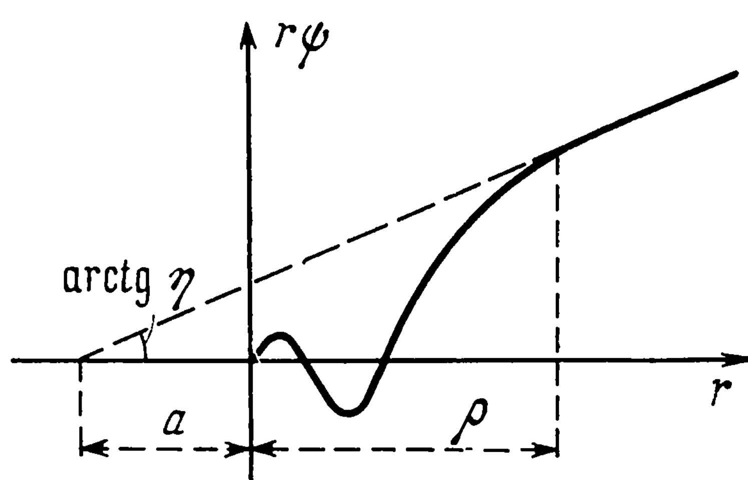


Рис. 8

нулевой энергии. На рис. 8 отложено произведение $r\psi$ как функция радиуса-вектора r, а ρ представляет радиус действия сил. Форма кривой нерегулярна при $r < \rho$, но при $r > \rho$ она переходит в прямую. Введем нормировку ψ, приняв $\psi(0) = 1$. Пусть, далее, уравнение прямой, в которую переходит $r\psi$ при больших значениях r, имеет вид

$$r\psi \to \eta\,(a + r);$$

при этом геометрический смысл η и a следует из рис. 8. Обе эти величины можно легко вычислить, если известна форма описывающей ядро потенциальной ямы. Сечение упругого столкновения в пределе малых скоростей оказывается равным

$$\sigma_{\text{упр}} = 4\pi a^2, \tag{1}$$

тогда как плотность вероятности обнаружить нейтрон в центре ядра есть

$$P = n/\eta^2, \tag{2}$$

где n — плотность нейтронов вне ядра.

Каков бы ни был механизм захвата, естественно предположить, по крайней мере, в некотором приближении, что вероятность захвата нейтрона ядром в единицу времени пропорциональна P, т. е. она будет определяться величиной kn/η^2, причем k — постоянная для каждого ядра.

Эту вероятность можно выразить через сечение $\sigma_{\text{захв}}$ для процесса захвата с помощью соотношения

$$\sigma_{\text{захв}} = k/\eta^2 v, \qquad (3)$$

где v — скорость нейтрона. Справедливость соотношения (3) ограничена вследствие того, что $\sigma_{\text{захв}}$ может, очевидно, достигать величины, самое большее, порядка квадрата де-бройлевской длины волны. Это позволяет установить верхний предел энергии медленных нейтронов исходя из наибольших экспериментально найденных сечений (Cd, $\sigma_{\text{захв}} = 10^{-20}$ *см*^{2}). Этот предел оказывается равным нескольким сотням *эв*. Однако нужно иметь в виду, что этот вывод справедлив лишь при тех предположениях, которые были сформулированы выше.

Из формулы (3), справедливой только при малых скоростях, видно, что сечение захвата для данного ядра обратно пропорционально скорости нейтрона. Это объясняет, почему сечение захвата обычно больше для медленных нейтронов, чем для быстрых. Такой результат можно также выразить другими словами: среднее время жизни медленного нейтрона в веществе не зависит от его скорости. В то время как сечение захвата обратно пропорционально скорости, сечение упругого столкновения, определяемое формулой (1), не зависит от нее, что означает независимость от скорости также и среднего свободного пробега для этого типа соударений.

Еще одна особенность формулы (3) состоит в том, что $\sigma_{\text{захв}}$ обратно пропорционально η^2. Иногда прямая на рис. 8 может проходить почти параллельно оси абсцисс. В таком случае η очень мало и сечение захвата, следовательно, становится очень большим. Подобное поведение собственной функции и является, вероятно, причиной аномально больших сечений, наблюдавшихся для нескольких ядер.

Чтобы получить из формулы (3) абсолютные значения сечений, необходимо, кроме всего, знать величины k, которые зависят от физического механизма захвата. Из опыта известно, что существуют два разных процесса. В некоторых легких элементах (Li, B) захват нейтрона сопровождается испусканием тяжелых частиц, тогда как для более тяжелых элементов обычным процессом представляется захват с испусканием γ-лучей. Связывание добавочного нейтрона с ядром приводит к высвобождению некоторого количества энергии, составляющего в среднем около 7 млн. *эв*. Эта избыточная энергия может в отдельных случаях приводить к испусканию α-частицы, если только окружающий ядро потенциальный барьер достаточно низок, чтобы позволить частице быстро покинуть ядро. Поэтому ожидается, что этот процесс должен иметь место только для легчайших элементов, в то время как при активации быстрыми нейтронами испускание заряженных частиц становится возможным также и для эле-

ментов большего атомного веса [7] благодаря сложению кинетической энергии налетающего нейтрона с энергией связи.

В случае захвата с испусканием γ-лучей, наблюдаемого для элементов любого атомного веса — вплоть до самых тяжелых,—обычно принимаемый механизм излучения дает, по-видимому, слишком малое значение k. Величина k зависит от двух факторов, которые довольно трудно оценить: от матричных элементов и энергии испущенных γ-квантов. Поскольку вероятность излучения γ-кванта, *ceteris paribus* *, пропорциональна ν^3, следует предположить, что процессы, соответствующие очень большому значению энергии связи нейтрона, должны быть более предпочтительными; эта энергия связи в некоторых случаях может значительно превосходить 10 млн. *эв*. Тем не менее представляется, что для матричных элементов следует, вероятно, принять слишком большое значение, чтобы получить правдоподобное объяснение сравнительно частого появления аномально больших сечений. Кроме того, на основании теории можно было бы ожидать, что аномальные сечения процесса захвата вообще должны быть связаны с аномальными сечениями упругого рассеяния. Пока не было найдено никакого экспериментального подтверждения этому.

В этом разделе мы кратко обсудим еще и закон распределения скоростей для медленных нейтронов в водороде. Приведенные выше теоретические соображения [формулы (1) и (3)], по-видимому, позволяют предположить, что нейтроны, обладающие скоростями, меньшими некоторого предела, имеют постоянный средний свободный пробег λ относительно упругих столкновений и постоянное среднее время жизни τ до их захвата присутствующими в среде ядрами. Тогда легко показать, что в водородсодержащем веществе число нейтронов, обладающих скоростями между v и $v + dv$, пропорционально (для значений v, меньших упомянутого выше предела)

$$\frac{v\,dv}{(v + \lambda/\tau)^3}\,. \tag{4}$$

Этот закон распределения можно было бы использовать для объяснения того факта, что кривые поглощения медленных нейтронов не являются экспоненциальными.

§ 9. Разделение радиоактивных изотопов

Сцилард и Чалмерс [8] первыми сумели отделить химическими методами радиоактивный иод от обычного. Их методику мы перенесли на несколько других случаев, воспользовавшись, кроме того, неорганическими соединениями вместо органических. Основа метода состоит в следующем:

---

[7] Meitner. Naturwiss., 1934, 45, 789.

* При прочих равных условиях (лат.). —*Прим. ред.*

[8] Szilard, Chalmers. Nature, 1934 134, 462.

положим, что перед облучением элемент связан в молекуле или радикале, вероятность рекомбинации которых после диссоциации практически ничтожна. После того как нейтрон сталкивается с атомом, последний обычно оказывается выбитым из молекулы и имеет тенденцию оставаться в атомарном или ионном состоянии. Из этого следует, что после облучения претерпевшие изменение атомы оказываются в ином химическом состоянии, нежели основная масса исходных атомов, и, таким образом, с помощью соответствующих реакций их можно разделить. Энергия химической связи составляет несколько электронвольт, и, даже предположив, что налетающий нейтрон обладает ничтожно малой энергией, отдачи испущенного при его захвате γ-кванта должно быть достаточно для преодоления сил химической связи.

Сцилард и Чалмерс выделяли радиоактивный иод из облученного иодистого этила, добавляя в качестве носителя свободный иод и пользуясь $AgNO_3$ для восстановления и осаждения I^-. Тот же самый метод был применен нами в опытах с бромоформом, хлороформом, четыреххлористым углеродом и некоторыми другими галоидными органическими соединениями. Нам всегда удавалось почти полное отделение радиоактивного галогена от основной массы неактивного вещества.

Мы выделили также радиоактивный хлор (35 *мин*), взяв за исходное вещество хлорат натрия. При столкновении с нейтроном атом хлора выбивается из иона ClO_3^-; добавляя ничтожное количество Cl^- в качестве носителя радиоактивного изотопа и тщательно проводя осаждение в присутствии $AgNO_3$ (с примесью HNO_3 для предупреждения выпадения в осадок $AgClO_3$), можно найти активность, сосредоточенную в осадке $AgCl$. Подобные же результаты получаются с броматами и иодатами, причем в последнем случае азотная кислота заменялась нашатырным спиртом. В осадке концентрируется от 70 до 90% полной активности.

Хорошим исходным веществом для концентрирования радиоактивного мышьяка является какодиловая кислота $(CH_3)_2AsOOH$. Активность можно сконцентрировать, высаживая из облученной какодиловой кислоты сульфид мышьяка.

При облучении перманганата калия и последующей фильтрации его через обычный бумажный фильтр большая часть активности остается на фильтре вместе с образовавшейся двуокисью марганца. Ничтожная добавка марганцевой соли и осаждение карбоната марганца позволили выделить около 80% полной активности. Нейтронная бомбардировка приводит к диссоциации иона MnO_4^-, и атом марганца оказывается в более низких окислительных состояниях; он улавливается фильтром вместе с двуокисью марганца или осаждается карбонатами. Такое разделение мы пытались проводить с исходными веществами в виде твердых солей либо растворов; между этими двумя случаями нет очень большой разницы. Не было также замечено никакого явного влияния кислотных или щелочных свойств облучаемого раствора.

Физический метод разделения радиоактивных изотопов, аналогичный известному методу собирания радиоактивного осадка эманации, опробовался нами на газообразном соединении иода. Стеклянный цилиндр объемом около 1 *л* с большим цилиндрическим алюминиевым электродом вблизи стенки и никелевым электродом вдоль его оси наполнялся насыщенными парами иодистого метила или этила. Температура цилиндра поддерживалась такой, чтобы давление паров составляло около 1 *атм*. Весь прибор целиком погружался в горячую воду, а на электроды подавалась разность потенциалов 3000 *в*. С внешней стороны стенки располагался (Rn + Be)-источник. После облучения никелевый электрод удалялся и на нем была обнаружена активность, распадающаяся с периодом иода. В качестве подложки никель использовался потому, что при бомбардировке нейтронами он не становится радиоактивным. Выход был довольно малым. Изменение полярности электродов не дало каких-либо согласующихся между собой результатов.

§ 10. Методика измерений

Установление факта сильного активирующего действия медленных нейтронов открыло возможность получения искусственных радиоэлементов в виде более сильных источников, чем в прошлом году. Это позволило точнее измерить константы, характерные для этих веществ, пользуясь ионизационной камерой вместо счетчиков Гейгера — Мюллера.

Ионизационная камера была изготовлена из стали; внутренними электродами были проволочная сетка и латунный стержень. β-лучи попадали в камеру сверху через круглое окошко диаметром 6 *см*, закрытое алюминиевой фольгой толщиной 0,01 *см*. Камера наполнялась CO_2 при давлении 3 *атм* и подключалась к электрометру Перукка, причем полная емкость системы составляла около 20 *см*, а чувствительность электрометра — 0,02 *в* на одно деление шкалы. Эта система оказалась вполне стабильной как по фоновому эффекту, так и по своей чувствительности (это контролировалось специально приготовленным урановым стандартом). На рис. 9 и 10 приведены некоторые кривые распада, полученные с помощью этого прибора.

Тот же прибор использовался для измерений поглощения β-лучей. Окошко закрывалось алюминиевыми фольгами; данные об активности наносились на график как функция толщины алюминия. Кривая поглощения оказалась приблизительно экспоненциальной. Помимо β-активности, вещества иногда обнаруживают сильное γ-излучение. Остаточная ионизация, когда камера была экранирована двумя миллиметрами свинца, условно была приписана нами действию γ-лучей. При вычислении коэффициентов поглощения β-лучей было учтено и γ-излучение. Для контроля этих измерений были определены коэффициенты поглощения β-лучей RaE и UX_2 и получены результаты, согласующиеся с общепринятыми.

§ 11. Систематическое изучение элементов

В этом разделе мы представим все новые данные, полученные нами для каждого элемента, касающиеся как наведенных активностей, так и их свойств в отношении медленных нейтронов. Некоторые данные слегка отличаются от наших прежних вследствие возросшей точности измерений.

1 *Водород*. Ни в воде, ни в парафине, облучавшихся в большом водяном баке источником Rn + Be (500 *мкюри*) в течение нескольких дней, никакой активности зарегистрировать не удалось.

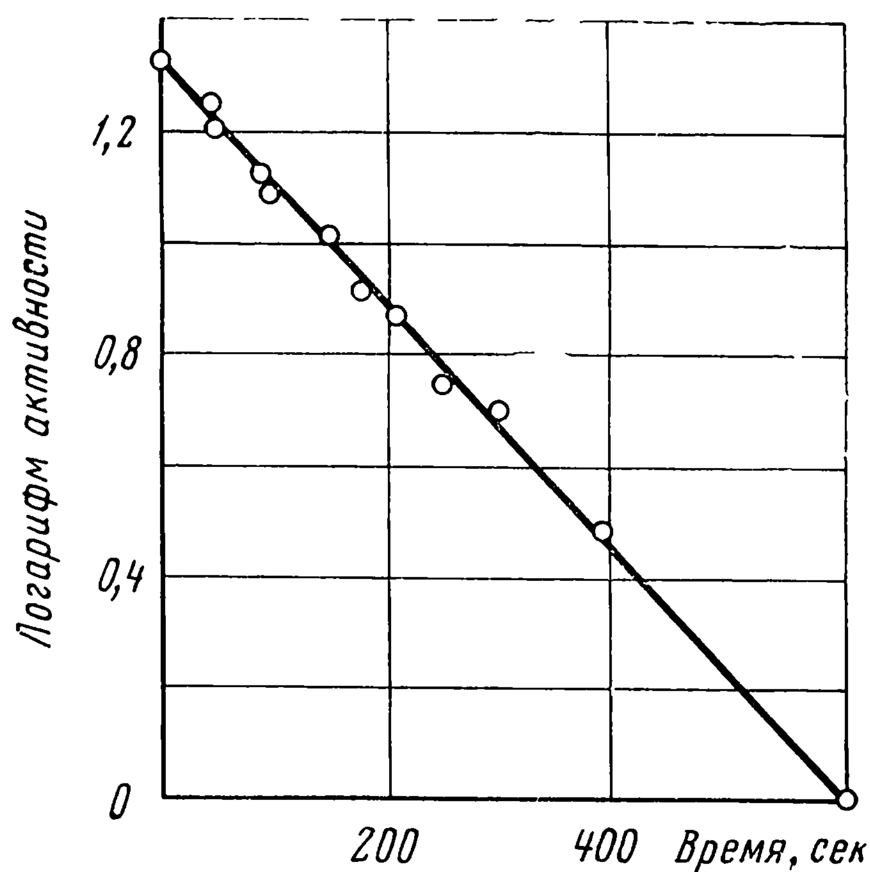


Рис. 9

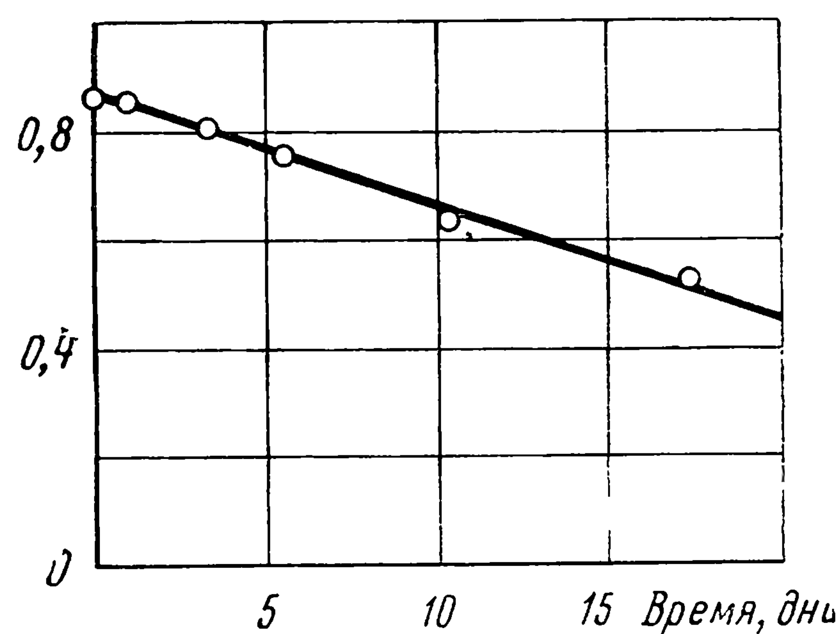


Рис. 10

3 *Литий*. Было установлено, что гидроокись лития после облучения медленными нейтронами (14 *час*, 400 *мкюри*) остается неактивной. Хотя литий и неактивен, он сильно поглощает медленные нейтроны; слой половинного поглощения составляет $\delta = 0{,}05$ *г/см*^{2}. Это поглощение не сопровождается γ-излучением. Чэдвиком и Голдхабером [9] и нами независимо было показано, что при поглощении медленных нейтронов испускаются тяжелые заряженные частицы. По Чэдвику и Голдхаберу этот ядерный процесс представляет собой следующую реакцию:



$$\mathrm{Li}_3^6 + n_0^1 = \mathrm{He}_2^4 + \mathrm{H}_1^3.$$

4 *Бериллий*. Металлический бериллий (чистота 99%) после интенсивного облучения медленными нейтронами обнаружил лишь крайне слабую активность, обусловленную, возможно, примесями. Вследствие очень сильной активации некоторых элементов при облучении в воде, примеси могут легко ввести в заблуждение.

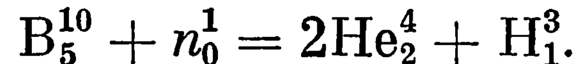
[9] Chadwick, Goldhaber. Nature, 1935, **135**, 65.

5 *Бор.* Металлический бор, облучавшийся 14 *час* в воде источником 500 *мкюри*, оказался неактивным. Бор обладает наибольшим из найденных до сих пор коэффициентом поглощения медленных нейтронов — $\delta = 0{,}004$ *г/см*^{2},— что соответствует сечению около $3 \cdot 10^{-21}$ *см*^{2}. Никаких γ-лучей, сопровождающих это поглощение, замечено не было: в этом случае, как и в случае лития, вместо γ-излучения испускаются α-частицы, что было показано Чэдвиком и Голдхабером[9] и нами. Этот эффект можно легко регистрировать по сильному разряду в ионизационной камере, наполненной трифторидом бора, окруженной парафином и облучаемой нейтронным источником Po + Be. Экранирование камеры тонкой кадмиевой фольгой для поглощения медленных нейтронов значительно снижает ионизационный ток. Подобный же эффект наблюдался с ионизационной камерой, наполненной воздухом, и с некоторым количеством бора на дне. Испускание α-частиц регистрировалось также связанной с линейным усилителем ионизационной камерой с небольшим количеством бора, нанесенного на ее стенки, либо наполненной трифторидом бора. Для объяснения этих явлений мы предложили ядерную реакцию



$$B_5^{10} + n_0^1 = Li_3^7 + He_2^4.$$

Вместо нее Чэдвик и Голдхабер предложили реакцию



$$B_5^{10} + n_0^1 = 2He_2^4 + H_1^3.$$

В настоящее время, нам думается, данных недостаточно для того, чтобы можно было выбрать между этими двумя возможностями; сейчас мы экспериментируем, пытаясь добиться более точного измерения числа ионов, образующихся в каждом процессе внутри ионизационной камеры, содержащей бор — газообразный (полный процесс) или нанесенный на ее стенки (эффект только от одной или двух частиц). Кроме того, мы пробуем наблюдать расщепление в камере Вильсона, которая содержит газообразное соединение бора[10].

6 *Углерод.* Никакой активности не обнаружено; см. водород. Относительно рассеивающих свойств см. § 6.

7 *Азот.* Нитрат аммония, облучавшийся 12 *час* источником 600 *мкюри* в воде, не обнаружил никакой активности.

8 *Кислород.* Никакой активности не обнаружено; см. водород.

9 *Фтор.* Обе активности этого элемента (периоды 9 и 40 *сек*) не чувствительны к водородсодержащим веществам.

11 *Натрий.* У этого элемента две активности: одна из них (период 40 *сек*) не чувствительна к водородсодержащим веществам. Об очень слабой активности с большим периодом полураспада сообщали Бьердж и

---

[10] Тейлор и Голдхабер (Taylor, Goldhaber. Nature, 1935, 135, 341) показали, что реакция идет по первой схеме.—*Прим. авт. при корр.*

Уэсткот [11]. Поскольку она резко усиливается в присутствии воды, нам удалось с достаточной точностью измерить ее период, который оказался равным 15 *час*. Важность этой активности для теории (см. § 8) побудила нас очень тщательно сравнить кривую ее распада с подобной кривой распада долгопериодного алюминия, чтобы проверить их идентичность. Для химического изучения активного вещества облучался чистый карбонат натрия (Kahlbaum). Облученное вещество растворялось в соляной кислоте, и к раствору добавлялись хлориды алюминия и магния. Было установлено, что получившийся при добавлении аммиака осадок гидроокисей Al и Mg является неактивным. Затем к раствору было добавлено некоторое количество фтористого натрия, и фтор был осажден в виде фторида бария; этот осадок также оказался неактивным. После этого содержащий исходный натрий раствор выпаривался и осторожно прокаливался для удаления неона, активный изотоп которого мог образоваться. Активность была найдена в высушенной натриевой соли. Мы пришли к выводу, что активный продукт представляет собой изотоп натрия — Na^{24}. Этот же изотоп был получен нами в прошлом году при бомбардировке магния и алюминия нейтронами. Недавно также Лоуренс [12] получил Na^{24} (в значительных количествах), бомбардируя некоторые элементы искусственно ускоренными частицами, и вполне исчерпывающим образом изучил его.

12 *Магний*. Чистая окись магния (Kahlbaum), специально проверенная нами, чтобы удостовериться в отсутствии алюминия в ней, облучалась в воде. Вещество располагалось на некотором расстоянии от источника, чтобы нечувствительные к влиянию воды периоды не активировались. Была обнаружена новая очень слабая активность с периодом около 10 *мин*. Поскольку этот период совпадает с 10-минутным периодом алюминия, обусловленным, как известно, Mg^{27} (см. алюминий), весьма вероятно, что изучаемая активность также обусловлена этим же самым изотопом, образующимся при захвате нейтрона ядром Mg^{26} (в обычном магнии количество Mg^{26} составляет 11%).

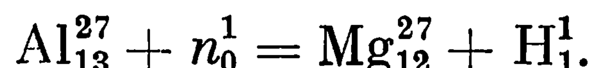
Наличие воды на 40-секундном периоде не сказывается.

13 *Алюминий*. Облученный в воде алюминий проявляет довольно сильную новую активность, распадающуюся с периодом 2,3 *мин* (измерен ионизационной камерой). При облучении в отсутствие воды эта активность становится крайне слабой. Так как период новой активности совпадает с периодом (2,3 *мин*) кремния, связанным с Al^{28}, предполагается, что эта активность также обусловлена этим же изотопом, образующимся из Al^{27} при захвате нейтрона.

Второй период алюминия был измерен ионизационной камерой и оказался равным 10 *мин*, а не 12 *мин*. Эта активность нечувствительна к влиянию воды. Было проведено химическое выделение носителя этой активности. В растворе каустической соды растворялся облученный металли-

[11] B j e r g e, W e s t c o t t. Nature, 1934, 134, 286.
[12] L a w r e n c e. Phys. Rev., 1935, 47, 17.

ческий алюминий и затем добавлялся хлористый магний. Осадок гидроокиси магния оказался носителем 10-минутной активности. Мы считаем, что активным изотопом является Mg^{27}, образовавшийся по реакции



$$Al_{13}^{27} + n_0^1 = Mg_{12}^{27} + H_1^1.$$

14 *Кремний*. С помощью ионизационной камеры был измерен короткий период полураспада этого элемента, оказавшийся равным 2,3 *мин*. Эта активность нечувствительна к влиянию воды.

Кроме нее, в плавленом кварце, облучавшемся в воде, был обнаружен новый, более продолжительный период полураспада порядка нескольких часов. Эта активность очень слаба и весьма чувствительна к влиянию воды. Нам представляется, что ее носителем является Si^{31}, получающийся при облучении фосфора и имеющий период 2,4 *час*. Si^{31} может образовываться при захвате нейтрона изотопом Si^{30}, присутствующим в количестве 3%.

15 *Фосфор*. Короткопериодная активность этого элемента (2,3 *мин*) не усиливается водой. Кюри, Жолио и Прайсверк [13] приписывают эту активность Al^{28}. Химическое подтверждение этой гипотезы таково: мы облучили фосфорную кислоту, нейтрализовали раствор углекислым натрием и добавили хлористый алюминий; активность оказалась сосредоточенной в осажденном алюминии.

С помощью ионизационной камеры наблюдалась кривая распада для фосфора с более продолжительным периодом. Этот период равен 2,4 *час*, а не 3 *час*, как сообщалось прежде. Кроме того, ионизационной камерой измерялась толщина слоя половинного поглощения соответствующих β-лучей; он составляет 0,15 *г/см*^{2} Al.

16 *Сера*. Нами был определен в ионизационной камере период полураспада фосфора, извлеченного из облученной серы; установлено, что период равен 14 дням; слой половинного поглощения β-лучей — 0,10 *г/см*^{2} Al.

17 *Хлор*. Облученный в воде хлор обнаружил новый, 35-минутный период, измеренный электрометром. Относительно химических опытов с носителем этой активности см. § 9.

Хлор достаточно сильно поглощает медленные нейтроны (слой половинного поглощения $\delta = 0{,}3$ *г/см*^{2}). Процесс поглощения сопровождается испусканием γ-лучей.

19 *Калий*. В облученном калии была найдена наведенная активность, очень чувствительная к влиянию воды и распадающаяся с периодом 16 *час*. Химическое изучение носителя активности, выполненное тем же методом, что и в случае натрия, исключало Cl, Ar, Ca. Отсюда следует, что эта активность принадлежит изотопу калия. Согласно фон Хевеши [14], этот изотоп следует отождествить с K^{42} (он получил его при бомбардировке скандия нейтронами), имеющим такой же период полураспада.

....

[13] Curie, Joliot, Preiswerk. C. R. Acad. Sci. Paris, 1934, 198, 2089.
[14] von Hevesy. Nature, 1935, 135, 96.

20 *Кальций*. Во фтористом кальции, облучавшемся 14 *час* в воде источником 600 *мкюри*, не было найдено никакой активности.

23 *Ванадий*. Распад наведенной в ванадии активности был измерен в ионизационной камере. Результаты: период полураспада — 3,75 *мин*, толщина слоя половинного поглощения β-лучей — 0,17 *г/см*^{2} Al. β-лучи сопровождаются γ-излучением. Активация ванадия очень чувствительна к водородсодержащим веществам; по определению § 1 $\alpha = 40$.

24 *Хром*. Активность хрома нечувствительна к влиянию воды.

25 *Марганец*. Активность с коротким периодом нечувствительна к влиянию воды ($\alpha = 1$). В то же время активность с более продолжительным периодом (2,5 *час* согласно измерениям в ионизационной камере) резко усиливается в присутствии воды ($\alpha = 23$). Измеренная с помощью электрометра толщина слоя половинного поглощения β-лучей составляет 0,14 *г/см*^{2} Al; распад сопровождается γ-лучами. Продукт с периодом 2,5 *час* является, как известно, изотопом марганца; в § 9 был описан метод концентрирования этой активности. Для получения новых данных, подтверждающих, что этот активный продукт — действительно изотоп марганца, возникавшая в облученном перманганате активность выделялась путем осаждения карбоната марганца. Содержащий эту активность карбонат растворялся затем в соляной кислоте и к раствору добавлялись в значительном количестве соли хрома, ванадия и железа. После этого с помощью азотной кислоты и хлората натрия марганец отделялся еще раз, уже в виде двуокиси. Осажденный марганец содержал изучаемую активность, тогда как фракции, включающие хром, ванадий и железо, оказались неактивными.

26 *Железо*. Активность этого элемента (период 2,5 *час*) нечувствительна к влиянию воды. Толщина слоя половинного поглощения медленных нейтронов — 8 *г/см*^{2}.

27 *Кобальт*. Этот элемент поглощает медленные нейтроны достаточно сильно; слой половинного поглощения составляет 0,7 *г/см*^{2}. Поглощение нейтронов сопровождается испусканием γ-излучения.

28 *Никель*. Сильно облученный никель обнаружил не более чем сомнительные следы активности.

29 *Медь*. Обе наведенные в этом элементе активности полураспада (периоды: 5 *мин*, измерен электрометром, и 10 *час*) резко усиливаются в присутствии воды. Для первой из них $\alpha = 15$. Медь поглощает медленные нейтроны, причем толщина слоя половинного поглощения составляет около 3 *г/см*^{2}; это поглощение сопровождается слабым γ-излучением.

Облученная металлическая медь растворялась в соляной кислоте, и в раствор добавлялись затем небольшие количества солей кобальта, никеля и цинка. Из этого кислого раствора высаживалась сернистая медь, оказавшаяся активной. Выпавшие в осадок сульфиды цинка, кобальта и никеля, получившиеся при нейтрализации раствора и добавлении сульфида аммония, были неактивны. Поскольку затраченное на выполнение этого опыта время довольно велико, он характеризует больший период

И тогда можно принять, что носителем этой активности является изотоп меди, как это предположили Бьердж и Уэсткот [11].

30 *Цинк.* Короткопериодная активность цинка не возрастает в присутствии воды. Более продолжительный период измерялся электрометром и оказался равным 10 *час*. Носитель этой активности исследовался в следующем опыте: облученный металлический цинк растворялся в соляной кислоте, куда вводилось и небольшое количество солей меди, никеля и кобальта. Медь частично осаждалась при восстановлении на остатках нерастворившегося металлического цинка; другая часть высаживалась в виде сульфида из кислого раствора. Собранная медь оказалась очень активной. Другие элементы, осажденные при нейтрализации этого раствора и добавлении сернистого аммония, были неактивны. Этим подтверждается результат Бьерджа и Уэсткота: долгий период в цинке обусловлен медью,— вероятно, тем же изотопом меди, которым обусловлена ее долгопериодная активность. Некоторое различие между данными этих авторов и нашими касается только величины этого периода (согласно Бьерджу и Уэсткоту — 6 *час*).

31 *Галлий.* 20-минутный период (измеренный электрометром) не очень чувствителен к влиянию воды ($\alpha = 3$). Толщина слоя половинного поглощения соответствующих β-лучей равна 0,17 *г/см*² Al. Носителем этой активности является, по-видимому, изотоп галлия. Для проверки такой точки зрения мы облучили нитрат галлия и затем добавили в раствор ничтожные количества меди и цинка. Медь была выделена в виде металлического слоя на цинковом порошке, а цинк (после добавления роданистой ртути) — в виде роданомеркурата цинка. Оба элемента оказались неактивными.

Кроме 20-минутной активности, при облучении галлия в воде была обнаружена также новая активность, которая сопровождается довольно сильным γ-излучением; она распадается с периодом 23 *час* (измерено электрометром).

33 *Мышьяк.* Активность этого элемента весьма чувствительна к влиянию воды ($\alpha = 6$). С помощью электрометра был измерен ее период (26 *час*) и толщина слоя половинного поглощения β-лучей (0,16 *г/см*² Al). Относительно концентрирования этой активности см. § 9.

34 *Селен.* Активность этого элемента (период полураспада 35 *мин*) чувствительна к влиянию воды ($\alpha = 4$). Облученный селенистый ангидрид растворялся в 30%-ной соляной кислоте и в этот раствор добавлялось некоторое количество мышьяковистого ангидрида. Восстановление газообразным сернистым ангидридом позволило высадить металлический селен, оказавшийся очень активным. Было установлено также, что высаженный из раствора сернистый мышьяк неактивен. Этот опыт исключает, по-видимому, и германий; мы приходим к выводу, что изучаемая активность обусловлена изотопом селена.

35 *Бром.* Обе активности этого элемента чувствительны к влиянию воды. Для короткопериодной активности $\alpha = 10$. Периоды были изме-

рены с помощью электрометра и равны 18 *мин* и 4,2 *час*. Слой половинного поглощения β-лучей составляет для обеих активностей 0,12 *г/см*^{2} Al, причем обе они сопровождаются γ-излучением. Относительно концентрирования активности см. § 9.

38 *Стронций*. После длительного и сильного облучения в воде не было замечено никакой активности.

39 *Иттрий*. Интенсивно облученная окись иттрия обнаружила лишь очень слабую активность, связанную, возможно, с примесями. Иттрий весьма сильно поглощает медленные нейтроны (толщина слоя половинного поглощения $\delta = 0{,}015$ *г/см*^{2}). Этот процесс сопровождается γ-излучением [3].

40 *Цирконий*. Сильно облученный нитрат циркония обнаружил лишь очень слабую активность, обусловленную, вероятно, примесями.

41 *Ниобий*. То же, что и в случае циркония.

43 *Родий*. Короткопериодная активность чувствительна к влиянию воды ($\alpha = 15$). Период и слой половинного поглощения β-лучей были определены электрометрически (44 *сек*; 0,15 *г/см*^{2} Al). Кроме того, с помощью ионизационной камеры более точно измерялся больший период, равный 3,9 *мин*. Эта активность сопровождается слабым γ-излучением. Родий довольно сильно поглощает медленные нейтроны (слой половинного поглощения составляет 0,3 *г/см*^{2}); это поглощение соответствует, по-видимому, образованию активных изотопов.

46 *Палладий*. Активности этого элемента также чувствительны к влиянию воды. Мы обнаружили, по крайней мере, два периода: один около четверти часа, а второй — примерно 12 *час*. Макленнан, Гриммет и Рид сообщают о периоде 14 *час*, что в пределах ошибок согласуется с нашим результатом.

47 *Серебро*. Ионизационной камерой заново были определены оба периода, оказавшиеся равными 22 *сек* и 2,3 *мин*. Оба они очень чувствительны к влиянию воды — для них $\alpha = 30$ и 15 соответственно. Сильной активации этого элемента соответствует значительное поглощение медленных нейтронов (толщина слоя половинного поглощения $\delta = 1{,}2$ *г/см*^{2}).

В раствор облученного азотнокислого серебра вводились нитрат палладия и хлористый родий. При добавлении соляной кислоты серебро выпадало в осадок, оказавшийся активным. Из отфильтрованного раствора были осаждены палладий (с помощью диметилглиоксима) и родий (восстановлением), и оба были неактивны. Этот опыт имеет отношение лишь к большему периоду — вследствие большого затраченного времени — и показывает, что носителем активности является, по всей вероятности, изотоп серебра.

48 *Кадмий*. Облучение кадмия в различных условиях обнаружило несколько еще не идентифицированных слабых активностей с разными периодами. Кадмий очень сильно поглощает медленные нейтроны (толщина слоя половинного поглощения — 0,013 *г/см*^{2}). Соответствующее сечение является наибольшим из найденных до сих пор для нейтронов ($\sigma = 10^{-20}$ *см*^{2}). Поглощение нейтронов сопровождается интенсивным

γ-излучением и связано, вероятно, с превращением стабильного изотопа кадмия в другой его устойчивый же изотоп.

49 *Индий.* Наведенная в индии активность обнаруживает три периода: самый короткий из них (13 *сек*) соответствует активности, чувствительной к влиянию воды ($\alpha = 12$); второй период (54 *мин*), измеренный с помощью электрометра, также очень чувствителен к влиянию воды. Опыты по магнитному отклонению показывают, что соответствующие им β-частицы отрицательны, а толщина слоя половинного поглощения составляет для них 0,045 *г/см*^{2} Al. Об еще большем периоде — порядка нескольких часов — сообщают Сцилард и Чалмерс [15]; эта активность либо нечувствительна к влиянию воды, либо чувствительна, но умеренно.

Для идентификации носителей последних двух активностей были выполнены химические опыты. К раствору облученного азотнокислого индия добавлялось серебро, которое высаживалось затем в виде хлористого серебра; этот осадок был неактивным. После этого в раствор вводились олово, сурьма и кадмий, которые осаждались с помощью сероводорода в форме сульфидов. Кислотность раствора регулировалась таким образом, чтобы индий оставался в растворе, в то время как другие металлы выпадали в осадок. Этот осадок также оказался неактивным; при нейтрализации раствора был осажден хлористый индий, который и содержал исследуемую активность.

Установлено, что соответственно сильной активации индия у него значительна и поглощающая способность по отношению к медленным нейтронам: слой половинного поглощения $\delta = 0{,}3$ *г/см*^{2}.

50 *Олово.* Сильно облученное в воде олово не обнаруживает никакой активности.

51 *Сурьма.* У этого элемента мы нашли наведенную активность, распадающуюся с периодом 2,5 дня; активация чувствительна к водородсодержащим веществам. Толщина слоя половинного поглощения испускаемых β-лучей составляет 0,09 *г/см*^{2} Al. Следующий химический опыт показывает, что носителем этой активности является, по-видимому, изотоп сурьмы. Облученная металлическая сурьма растворялась в царской водке, и в раствор вводилось некоторое количество олова; после отделения сульфида олова (по Кларку) активность была найдена в осадке сернистой сурьмы. Этот осадок затем вновь растворялся, в раствор добавлялся индий, а сурьма (в виде сульфида) выделялась из этого раствора при умеренной его кислотности. Этот раствор нейтрализовался и выпавший в осадок индий оказался неактивным. К новому раствору сурьмы были добавлены теллур и иод; затем первый был выделен восстановлением, а второй осажден в виде иодистого серебра. Оба элемента были неактивны.

52 *Теллур.* Обнаруживает слабую активность, чувствительную к влиянию воды; период оказался равным 45 *мин*, а не 30 *мин*, как сообщалось в нашей более ранней работе.

....

[15] Szilard, Chalmers. Nature, 1935, 135, 493.

53 *Иод.* Период и толщина слоя половинного поглощения β-лучей измерялись с помощью электрометра (25 *мин*; 0,11 *г/см*^{2} Al). Активация умеренно чувствительна к влиянию воды (α = 5). Относительно концентрирования активности см. § 9.

56 *Барий.* Обнаружена новая активность, чувствительная к влиянию воды (α = 8), с периодом полураспада 80 *мин.* Следующий химический опыт свидетельствует в пользу предположения, согласно которому носителем этой активности является изотоп бария. Облученная гидроокись бария растворялась в соляной кислоте, куда добавлялось небольшое количество хлористого натрия; барий осаждался затем в виде сернокислой соли, которая унесла с собой в осадок исследуемую активность. После выпаривания раствора было установлено, что оставшийся натрий неактивен.

57 *Лантан.* После сильного облучения в воде не было обнаружено никакой активности.

58 *Церий.* То же, что и в случае лантана.

59 *Празеодим.* Короткопериодная активность (5 *мин*) нечувствительна к влиянию воды. При облучении в воде была найдена новая, чувствительная к влиянию воды активность, распадающаяся с периодом 19 *час*; слой половинного поглощения испускаемых при этом β-лучей равен 0,12 *г/см*^{2} Al (обе величины измерялись с помощью электрометра).

64 *Гадолиний.* Очень чистый образец окиси гадолиния облучался в воде. Профессор Л. Ролла любезно предоставил его нам наряду с другими редкими землями. Была обнаружена активность, распадающаяся с периодом 8 *час.*

73 *Тантал.* После 12-часового облучения в воде источником 500 *мкюри* наблюдалась лишь «сомнительная» активность

74 *Вольфрам.* Металлический вольфрам облучался в воде и показал активность (α = 15), распадающуюся с периодом около одного дня [16].

Мы облучали вольфрамовый ангидрид, растворяли его в каустической соде, а затем добавили и выделили пятиокись тантала, которая оказалась неактивной. К раствору вольфрама добавлялся раствор азотистого рения, после чего вольфрамовый ангидрид выпадал в осадок при добавлении соляной кислоты. Этот осадок содержал активность, тогда как осажденный из фильтрата рений (в виде сернистой соли) был неактивным. Так как у нас не было гафния, был выполнен следующий опыт, который исключает связь какого-либо изотопа этого элемента с активностью: из раствора облученного вольфрамового ангидрида в нашатырном спирте высаживалась гидроокись циркония. Осадок был неактивным. Это приводит к выводу, что активность вольфрама обусловлена, по-видимому, каким-то его изотопом.

75 *Рений.* Чистый металлический рений облучался в воде; его активность возрастает в присутствии воды и распадается с периодом около 20 *час.* Слой половинного поглощения электронов — 0,12 *г/см*^{2} Al. Эту ак-

---

[16] Ср. McLennan, Grimmet, Read. Nature, 1935, 135, 147.

тивность несет, возможно, изотоп рения. Облученный рений растворялся в азотной кислоте; добавлялись тантал и вольфрам, которые были затем отделены в виде пятиокиси тантала и вольфрамового ангидрида. Оба вещества были неактивны, тогда как рений сохранил активность.

77 *Иридий*. Наведенная в этом элементе активность очень чувствительна к влиянию воды. Период и толщина слоя половинного поглощения β-лучей измерялась в ионизационной камере (19 *час*; 0,12 *г/см*^{2} Al). Сильной активации иридия соответствует интенсивное поглощение медленных нейтронов (слой половинного поглощения 0,3 *г/см*^{2}), которое сопровождается испусканием γ-лучей.

78 *Платина*. Облученная в воде очень чистая металлическая платина (Heraeus, 4-й стандарт чистоты) обнаружила активность, распадающуюся с периодом около 50 *мин*. Макленнан, Гриммет и Рид[16] сообщают о периоде 36 *мин*.

79 *Золото*. Активность этого элемента чувствительна к влиянию воды; ее период полураспада измерен с помощью электрометра и равен 2,7 дня. По отклонению в магнитном поле было установлено, что β-лучи отрицательны. Их проникающая способность очень мала: слой половинного поглощения составляет 0,04 *г/см*^{2} Al [17].

80 *Ртуть*. После сильного облучения не было найдено никакой активности. Этот элемент интенсивно поглощает медленные нейтроны: толщина слоя половинного поглощения 0,2 *г/см*^{2}. При поглощении испускаются γ-лучи.

81 *Таллий*. После сильного облучения не было найдено никакой активности.

82 *Свинец*. То же, что и в случае таллия.

83 *Висмут*. То же, что и в случае таллия.

90 *Торий*. Одноминутный и 24-минутный периоды (измеренные с помощью электрометра) почти нечувствительны к влиянию воды.

92 *Уран*. Было исследовано также и влияние водородсодержащих веществ на активности, наведенные в этом элементе (периоды полураспада: 15 и 40 *сек*, 13 и 100 *мин*). Для активности, соответствующей 40-секундному периоду, не было замечено какого-либо возрастания в присутствии воды, тогда как при этом три другие несколько усиливались. Мы измерили такое возрастание активности для 15-секундного, 13- и 100-минутного периодов. Оказалось, что для них всех α составляет около 1,6. Выполненные с помощью счетчиков измерения 15-секундной активности, ввиду малости периода, не очень точны. Значения α для двух других активностей измерялись в ионизационной камере, причем были приняты особые меры для того, чтобы убедиться в равенстве этих значений для обоих периодов. С этой целью сопоставлялись три кривые распада активности, полученной при 14-часовом облучении одного и того же количества окиси урана: один раз в воздухе, когда уран располагался в пробирке рядом с источ-

[17] Облученное медленными нейтронами золото испускает сильное γ-излучение.

ником; еще раз при такой же геометрии опыта, но с пробиркой, окруженной парафином; наконец, внутри большой массы парафина с источником в 5 *см* от пробирки, содержащей уран. Во всех этих опытах найдено, что кривые распада оказались пропорциональными, т. е. обнаружено одинаковое отношение этих двух активностей. Поэтому можно считать, что опыт, устанавливающий для этих двух периодов равенство их чувствительностей к влиянию воды, является гораздо более точным, чем измерение абсолютной величины коэффициента чувствительности; кроме того, он более точен, чем в случае, когда делается вывод о совпадении коэффициентов чувствительности для всех трех активностей, включая 15-секундную. Очевидно, что у всех возникающих в одном и том же первичном процессе продуктов должен быть одинаковый коэффициент чувствительности. Таким образом, отсюда следует, что 40-секундная активность связана с каким-то одним первичным процессом, а остальные три обусловлены другим, вероятно, общим для них процессом; справедливость этого вывода ограничивается тем, что коэффициенты чувствительности могут случайным образом совпадать в силу сравнительно невысокой точности наших опытов. В этом предположении все три активности могут оказаться либо продуктами одной цепочки распада (причем короткопериодные активности являются материнскими для долгопериодных), либо их взаимосвязь может осложняться процессами разветвления. Некоторые данные в пользу первого допущения—по крайней мере это касается 13- и 100-минутного периодов—получены в следующем опыте. С помощью электрометра были измерены кривые распада для толстого слоя облученного урана. Эти кривые, выраженные через экспоненты с периодами 13 и 100 *мин*, показали, что начальные активности находятся в отношении примерно 100 : 45. Слой половинного поглощения β-лучей 13-минутной активности равен 0,14 $г/см^2$ Al; его нельзя было измерить с достаточной точностью в случае большего периода; однако он определенно меньше приведенного значения, вероятно, вдвое. Эти результаты согласуются с предположением равенства чисел распадов для 13- и 100-минутного периодов.

В нашей первой работе приводились некоторые химические данные, которые как будто бы указывали на то, что носителями 13- и 100-минутной активностей не являются изотопы известных наиболее тяжелых элементов и что они, по-видимому, связаны с трансурановыми элементами. В то время нашу точку зрения критиковали фон Гроссе и Агрусс[18], которые хотя никогда и не проводили эксперименты с активированным ураном, на основании наших химических опытов пришли к противоположному заключению: эти активности обусловлены изотопами протактиния. Поэтому мы поставили ряд новых химических опытов по изучению поведения этих активностей.

Снова было проведено осаждение активности с сернистыми солями некоторых металлов (серебро, медь, свинец, ртуть). Кислотность раствора

[18] von Grosse, Agruss. Phys. Rev., 1934, 46, 241.

(соляная кислота) составляла около 20%; она иногда слегка изменялась для облегчения высаживания сульфида использовавшегося металла. Выход активности в осадок был обычно хорошим — примерно 50% — и менялся соответственно условиям осаждения. Азотная кислота очень понижает выход реакции. Обычно высокий выход реакции сульфирования получается также в присутствии тантала, растворенного в плавиковой кислоте. Кроме того, был выполнен опыт для того, чтобы выяснить, действительно ли эти наведенные активности участвуют в реакции, которую фон Гроссе приводит как наиболее характерную для протактиния.

Очищенная и облученная окись урана растворялась в 25%-ной соляной кислоте; к этому раствору добавлялись азотнокислый цирконий и фосфорная кислота. Осадок фосфата циркония был неактивным. Отделив цирконий, мы высадили из отфильтрованного раствора сульфид, а с ним собрали и активность с обычным выходом. Согласно фон Гроссе и Агруссу, эту реакцию нужно считать доказательством того, что носитель активности не является тождественным изотопу протактиния.

Путем различных химических экспериментов Ган и Мейтнер [19] также пришли к выводу, что 13- и 100-минутная активности обусловлены, по всей вероятности, трансурановыми элементами. Мы повторили некоторые из их опытов и получили те же самые результаты.

Несомненно, обе активности в химическом отношении ведут себя аналогично. Некоторое указание на возможность их разделения было получено лишь в следующем опыте. Тщательно очищенная окись урана облучалась и растворялась затем в соляной кислоте. Этот раствор вливался в раствор углекислого аммония до тех пор, пока осадок урана снова полностью не растворялся. После добавления свинца или азотнокислого марганца был собран осадок карбонатов, который содержал часть 13- и 100-минутной активностей. Из фильтрата была высажена сернистая медь, которая также оказалась носителем части этих активностей. Отношение этих активностей несколько различалось, по-видимому, в этих двух осадках, причем 13-минутная активность была выше в сульфидном осадке.

В свете этих экспериментов наша гипотеза о связи 13-минутной и 100-минутной наведенных активностей урана с трансурановыми элементами получает как будто дальнейшее подтверждение. Простейшее объяснение, которое согласуется с известными фактами, состоит в том, что 15-секундная, 13-минутная и 100-минутная активности представляют собой продукты цепочки распада; вероятно, они имеют атомные номера 92, 93 и 94 соответственно и атомный вес 239.

Мы глубоко признательны профессору Дж. К. Трабакки, обеспечившему нас радоновыми источниками. Мы благодарны также профессору Л. Ролла, предоставившему в наше распоряжение некоторые редкоземельные элементы, доктору Л. Феа за помощь в экспериментах и Национальному совету по исследованиям за субсидирование работы.

---

[19] Hahn, Meitner. Naturwiss., 1935, **23**, 37.

§ 12. Содержание таблицы

В таблице (стр. 672—674) собраны результаты изучения радиоактивности, наведенной при бомбардировке нейтронами. Столбец 1 включает атомные номера и символы исследовавшихся элементов. В столбце 2 дается изотопный состав; цифры, напечатанные жирным шрифтом, относятся к изотопам, которые составляют более 20% данного элемента. Столбец 3 содержит измеренные значения периодов полураспада (в порядке возрастания их величин). Толщина слоя половинного поглощения β-лучей (в *г/см*^{2} алюминия) приводится в столбце 4; среднюю энергию β-лучей в миллионах *эв* можно весьма грубо оценить, умножая на 8 приведенные в этом столбце цифры. В столбце 5 указывается, сопровождается ли β-распад наблюдавшимся на опыте γ-излучением. В столбце 6 указывается носитель активности. В столбце 7 дается чувствительность активации к водородсодержащим веществам; она задается либо численным значением коэффициента чувствительности (определение см. в § 1; коэффициент чувствительности 1 означает, что водородсодержащие вещества не усиливают активацию), либо буквой *a*. Она означает, что активация возрастает в присутствии водородсодержащих веществ, но коэффициент чувствительности не был измерен. В столбце 8 дается толщина слоя половинного поглощения медленных нейтронов.

В нескольких случаях периоды полураспада продуктов, по данным химического анализа тождественных друг другу, но полученных при бомбардировке разных атомов, указываются равными даже тогда, когда проводилось очень точное измерение лишь одного из них. То же самое относится и к толщинам слоя половинного поглощения β-лучей.

Поступила 15 февраля 1935 г.

* См. стр. 672—674. *Прим. ред.*

Таблица

Элемент	Изотопы	Периоды полураспада	Толщина слоя половинного поглощения, *г/см²* Al	γ-лучи	Чувствительность к водороду	Носитель активности	δ, *г/см²*
1 H	1, 2, 3	—					
2 He	3, 4						
3 Li	6, 7	—					0,05
4 Be	9	—					>3
5 B	10, 11	—					0,004
6 C	12, 13	—					>3
7 N	14, 15	—					>0,5
8 O	16, 17, 18	—					
9 F	19	9 *сек*; 40 *сек*	0,24; —	да	1; 1	N^{16} (?)	>3
10 Ne	20, 21, 22						
11 Na	23	40 *сек*; 15 *ч*	—; 0,12	да	1; a	Ne^{23} (?); Na^{24}	>4
12 Mg	24, 25, 26	40 *сек*; 10 *мин*; 15 *ч*	—; 0,07; 0,12	да	1; a	Ne^{23} (?); Mg^{27}; Na^{24}	>0,5
13 Al	27	2,3 *мин*; 10 *мин*; 15 *ч*	0,16; 0,07; 0,12	да	a; 1	Al^{28}; Mg^{27}; Na^{24}	>7
14 Si	28, 29, 30	2,3 *мин*; 2,4 *ч*	0,16; —	да	1; a	Al^{28}; Si^{31}	>5
15 P	31	2,3 *мин*; 2,4 *ч*	0,16; 0,15		1; —	Al^{28}; Si^{31}	>3
16 S	32, 33, 34	14 д.	0,10			P^{32}	>2
17 Cl	35, 37	35 *мин*; 14 д.	—; 0,10		a; —	Cl; P^{32}	0,3
18 Ar	36, 38, 40						
19 K	39, 41	16 *ч*			a	K^{42}	>1
20 Ca	40, 42, 43, 44	—					>3
21 Sc	45	16 *ч*				K^{42}	
22 Ti	46, 47, 48, 49, 50	3 *мин*					>2
23 V	51	3,75 *мин*	0,17	да	40	V^{52}	>1
24 Cr	50, 52, 53, 54	3,75 *мин*	0,17	да	1	V^{52}	>2
25 Mn	55	3,75 *мин*; 2,5 *ч*	0,17; 0,14	да	1; 23	V^{52}; Mn^{56}	>3
26 Fe	54, 56	2,5 *ч*	0,14	да	1	Mn^{56}	8
27 Co	59	2,5 *ч*	0,14	да	—	Mn^{56}	0,7
28 Ni	56, 58, 60, 61, 62, 64	—					>3
29 Cu	63, 65	5 *мин*; 10 *ч*		да	15; a	Cu; Cu	3
30 Zn	64, 66, 67, 68, 70	5 *мин*; 10 *ч*		да	1; —	Cu; Cu	>10
31 Ga	69, 71	20 *мин*; 23 *ч*	0,17; —	да	3; a	Ga; —	>5
32 Ge	70, 72, 73, 74, 76	30 *мин* (?)					
33 As	75	26 *ч*	0,16	да	6	As^{76}	>3
34 Se	74, 76, 77, 78, 80, 82	35 *мин*			4	Se	4
35 Br	79, 81	18 *мин*; 4,2 *ч*	0,12; 0,12		10; a	Br; Br	3

Таблица (продолжение)

Элемент	Изотопы	Периоды полураспада	Толщина слоя половинного поглощения, *г/см²* Al	γ-лучи	Чувствительность к водороду	Носитель активности	δ, *г/см²*
36 Kr	78, 80, 82, 83, 84, 86						
37 Rb	**85**, **87**	? ?					>2
38 Sr	86, 87, 88	—					>2
39 Y	89	—					0,015[3]
40 Zr	**90**, 91, 92, **94** (96)	—					>3
41 Nb	93	—					
42 Mo	92, 94, 95, 96, 97, 98, 100	30 *мин*; 36 *ч*					>3
43 Tc							
44 Ru	96, 98, 99, 100, **101**, **102**, 104	—					>3
45 Rh		44 *сек*; 3,9 *мин*	0,15; —		15; a		0,3
46 Pd		15 *мин*; 12 *ч*			—; a		<2
47 Ag	**107**, **109**	22 *сек*; 2,3 *мин*	—; 0,08	да	30; 15	—; Ag	1,2
48 Cd	106, 108, 110, 111, **112**, 113, **114**, 115, 116	? ?					0,013
49 In	113, **115**	13 *сек*; 54 *мин*; 3 *ч* (?)	—; 0,045; —	да	12; a; —	—; In; In	0,3
50 Sn	112, 114, 115, 116, 117, **118**, 119, **120**, 121, 122, 124	—					>10
51 Sb	**121**, **123**	2,5 д.	0,09	да	a	Sb	>10
52 Te	122, 123, 124, 125, **126**, (127), 128, 130	45 *мин*			a		
53 I	**127**	25 *мин*	0,11	да	5	I^{128}	4
54 Xe	124, 126, 128, **129**, 130, **131**, **132**, 134, 136						
55 Cs	**133**	1,5 *ч* (?); (?)					
56 Ba	135, 136, 137, **138**	3 *мин*; 80 *мин*			1; 8	—; Ba	>3
57 La	**139**	—					
58 Ce	**140**, 142	—					
59 Pr	**141**	5 *мин*; 19 *ч*	—; 0,12		1; a		1,5
60 Nd	**142**, 143, **144**, 145, 146	1 *ч*					
61							
62 Sm	144, 147, 148, 149, 150, **152**, **154**	40 *мин*					

Таблица (окончание)

Элемент	Изотопы	Периоды полураспада	Толщина слоя половинного поглощения, *г/см²* Al	γ-лучи	Чувствительность к водороду	Носитель активности	δ, *г/см²*
63 Eu	**151**, **153**						
64 Gd	155, 156, 157, 158, 160	8 *ч*			а		
65 Tb	**159**						
66 Dy	161, 162, 163, 164						
67 Ho	**165**						
68 Er	166, 167, 168, 170						
69 Tu	**169**						
70 Yb	171, **172**, 173, 174, 176						
71 Lu	**175**						
72 Hf	176, 177, 178, 179, 180						
73 Ta	**181**	?					
74 W	182, 183, 184, 186	1 д.			15	W	
75 Re	185, **187**	20 *ч*	0,12		а	Re	
76 Os	186, 187, 188, 189, **190**, **192**	—					
77 Ir		19 *ч*	0,12		а	Ir	0,3
78 Pt		50 *мин*			а		
79 Au		2,7 д.	0,04	да	а	Au	2
80 Hg	196, 197, 198, 199, **200**, 201, **202**, 203, 204	—					0,2
81 Tl	203, **205**	—					
82 Pb	203, 204, 205, **206**, 207, **208**, 209, 210	—					>6
83 Bi	**209**	—					>10
90 Th	**232**	1 *мин*; 24 *мин*			~1; ~1		
92 U	**238**	15 *сек*; 40 *сек*; 13 *мин*	—; —; 0,14	да	1,6; ~1; 1,6	См. § 11	
		100 *мин*	0,070		1,6		

См. вводные замечания к статье 61

70

О ЗАКОНЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МЕДЛЕННЫХ НЕЙТРОНОВ ПО СКОРОСТЯМ *

В этой статье мы обратимся к задаче отыскания закона распределения по скоростям ансамбля нейтронов, проходящих сквозь водородсодержащее вещество. Эта задача приобрела определенный интерес, поскольку было показано [1], что некоторые элементы, при столкновении с нейтронами могущие превращаться в неустойчивые изотопы и демонстрирующие тем самым явление искусственной радиоактивности, гораздо сильнее активируются, если облучение нейтронами происходит внутри водородсодержащей среды, как, например, воды или парафина. Интерпретация этого явления, которая как будто бы довольно хорошо согласуется с известными фактами, опирается на гипотезу о быстром замедлении нейтронов внутри такой среды за счет соударений с ядрами водорода. Существует ряд теоретических соображений в пользу того, что медленные нейтроны, по крайней мере, в некоторых случаях, захватываются ядрами легче, чем быстрые нейтроны. Поэтому высокий уровень активации, достигаемый при облучении нейтронами внутри большого количества воды или парафина, можно считать обусловленным воздействием медленных нейтронов.

Для вычисления распределения нейтронов по скоростям примем следующие допущения:

а) замедление нейтронов обусловлено только их упругими столкновениями с ядрами водорода; пусть для нейтрона со скоростью v средняя длина свободного пробега относительно упругого соударения с водородом равна $\lambda(v)$;

б) в системе отсчета, где центр тяжести нейтрона и протона покоится, вероятность рассеяния нейтрона при его столкновении с протоном одинакова для всех направлений рассеяния;

в) обусловленная тепловым движением скорость протонов ничтожно мала;

г) нейтронный источник испускает в окружающую среду Q нейтронов в секунду, причем все они имеют одинаковую скорость v_0;

---

* *On the Velocity Distribution Law for the Slow Neutrons.* Zeeman Verhandelingen, Martinus Nijhoff, Hague, 1935, p. 128—130.

[1] E. Fermi, E. Amaldi, B. Pontecorvo, F. Rasetti, E. Segrè. Ric. Scient., 1934, 5(2), 282. (Статья 67.)

д) ядра могут захватывать нейтроны; пусть $\tau(v)$ — среднее время жизни нейтрона со скоростью v до его захвата ядром.

Число нейтронов, обладающих скоростью v_0, обозначим через n_0. В единицу времени это число увеличивается на Q благодаря действию источника и уменьшается на $n_0(v_0/\lambda_0 + 1/\tau_0)$ вследствие соударений с водородом и процессов захвата. При статистическом равновесии

$$Q = n_0\left(\frac{v_0}{\lambda_0} + \frac{1}{\tau_0}\right). \tag{1}$$

Пусть $n(v)\,dv$ — число нейтронов со скоростями между v и $v + dv$. В единицу времени соударения с протонами и процессы захвата уменьшают $n(v)$ на величину

$$n(v)\left[\frac{v}{\lambda(v)} + \frac{1}{\tau(v)}\right].$$

Это уменьшение компенсируется за счет нейтронов, скорость которых до столкновения составляет $v' > v$, а после столкновения попадает в интервал между v и $v + dv$. Легко показать, что вероятность столкновения нейтрона, в результате которого его скорость v' уменьшается до значения $v < v'$, дается (см. пункт «б») отношением v^2/v'^2; отсюда следует, что вероятность уменьшения скорости до значения в интервале между v и $v + dv$ равна $2v\,dv/v'^2$. После этого мы приходим к выводу, что возрастание $n(v)$ в единицу времени, обусловленное столкновениями $n(v')\,dv'$ нейтронов со скоростями в пределах от v' до $v' + dv'$, равно

$$n(v')\,dv'\,\frac{v'}{\lambda(v')}\,\frac{2v}{v'^2}.$$

Это выражение нужно проинтегрировать по v' в пределах от v до v_0. К этому приращению следует добавить вклад соударений нейтронов, скорость которых равна v_0; этот вклад определяется аналогичным образом:

$$n_0\,\frac{v_0}{\lambda_0}\,\frac{2v}{v_0^2}.$$

Итак, условие статистического равновесия имеет следующий вид:

$$n(v)\left[\frac{v}{\lambda(v)} + \frac{1}{\tau(v)}\right] = 2v\int\limits_v^{v_0}\frac{n(v')\,dv'}{v'\lambda(v')} + \frac{2vn_0}{v_0\lambda_0}. \tag{2}$$

Для определения $n(v)$ разделим это соотношение на $2v$ и продифференцируем по v, после чего найдем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d}{dv}\left\{\frac{n(v)}{2}\left[\frac{1}{\lambda(v)} + \frac{1}{v\tau(v)}\right]\right\} + \frac{n(v)}{v\lambda(v)} = 0.$$

Его интегрирование дает:

$$n(v) = c\,\frac{v\lambda(v)}{v + \lambda(v)/\tau(v)}\exp\left[2\int\limits_v^{v_0}\frac{dv}{v + \lambda(v)/\tau(v)}\right], \tag{3}$$

где c — постоянная интегрирования. При необходимости ее величину можно найти из равенств (1) и (2)

$$c = \frac{2n_0}{\lambda_0 v_0} = \frac{2Q}{v_0(v_0 + \lambda_0/\tau_0)}. \tag{4}$$

Равенства (3) и (4) полностью решают поставленную задачу.

Этот результат принимает особенно простой вид, если предположить, что λ и τ не зависят от v, по крайней мере, в некотором интервале скоростей. Подобное допущение находит поддержку в квантовомеханическом описании процесса столкновения и является, по-видимому, справедливым, когда де-бройлевская длина волны велика по сравнению с размерами ядра. В этих предположениях выражение (3) принимает простой вид:

$$n(v) = \text{const}\,\frac{v}{(v + \lambda/\tau)^3}. \tag{5}$$

При таком распределении наиболее вероятная скорость медленных нейтронов равна

$$v_p = \frac{\lambda}{2\tau}. \tag{6}$$

Для такой скорости средняя длина свободного пробега относительно упругих соударений того же порядка величины (точнее, она вдвое больше), что и длина свободного пробега $v_p\tau$ для процесса захвата.

15 февраля 1935 г.

К статьям 71 и 72

Статья 71 представляет собой последнее, десятое, письмо в редакцию «Ricerca Scientifica» из серии, посвященной искусственной радиоактивности при облучении нейтронами (замечу, что в библиографии трудов Ферми отсутствует письмо VI из этой серии, так как Ферми не вошел в число его авторов). Статья 71, как и работа [Б107], была написана после того, как мы направили в печать статью 69, подробно излагавшую итоги исследований, проведенных после открытия замедления нейтронов. Но в эту статью вошли результаты работы [Б107] (и поэтому она не включена в настоящее издание), а результаты статьи 71 — нет.

Каждый из параграфов приводимой ниже статьи посвящен совершенно различным вопросам, и каждый из них очень богат по содержанию. В самом существенном § 3 описан в телеграфном стиле очень важный опыт: первый эксперимент, в котором было возможно прямым образом (хотя и грубо) измерить скорость медленных нейтронов, сравнивая ее со скоростью движущегося тела (вращающегося диска). Важность этого опыта состоит также и в том, что из него определялось время жизни нейтронов в парафине.

Эту величину Ферми в статье 72 использовал при создании теории процесса рекомбинации нейтрона с протоном (и обратного процесса фоторасщепления дейтрона). Ферми показал, что из теории получается правильное значение τ, если учесть процессы, обусловленные осцилляциями магнитного дипольного момента системы из нейтрона и протона. В ранней теории Бете и Пайерлса эти процессы не были учтены.

В связи со статьей 71 мне вспоминается такой случай. Исследуя процесс испускания нейтронов легкими элементами под действием α-частиц, мы пользовались источниками, в которых радон перемешивался не с бериллием, а с исследуемым элементом. Конечно, удобнее и экономичнее было бы пользоваться источником Rn с такими тонкими стенками, чтобы α-частицы могли проходить через них. Попытка осуществить эту программу была сделана, но в статье об этом не говорится ни слова.

Эти опыты были выполнены в отсутствие Ферми. По его возвращении мы рассказали ему о результатах и о том, что между двумя сотрудниками группы возникли расхождения. Один думал, что материал может быть опубликован. Другой чувствовал, что опубликование неоправданно, потому что результаты были недостаточно чистыми и, кроме того, воспроизводимость результатов не была проверена. Ферми энергично поддержал второе мнение, что было довольно типично для него. Для Ферми ответственность ученого за опубликование работы была очень высока и он очень нетерпимо относился к скороспелым заявлениям и субъективизму в науке.

Б. Понтекорво

См. также вводные замечания к статье 61

71

РАДИОАКТИВНОСТЬ, НАВЕДЕННАЯ НЕЙТРОННОЙ БОМБАРДИРОВКОЙ. X *[1]

(Совместно с Э. Амальди, О. Д'Агостино, Б. Понтекорво, Э. Сегре)

1. **Активность, наведенная в броме.** Мы также констатировали существование третьего радиоактивного изотопа Br с периодом около 36 *час*, обнаруженного Курчатовым и др.[2], и подтвердили их опыты по β-лучам. Мы установили, что эта активность брома, как и две другие, чувствительна к действию водородсодержащих веществ. Подобный факт делает весьма маловероятным объяснение упомянутых выше авторов, согласно которому эта активность получается при испускании одного нейтрона стабильным изотопом брома, поскольку медленный нейтрон не обладает достаточной энергией для того, чтобы вызвать такой процесс.

Поскольку существование третьего стабильного изотопа, по-видимому, исключено — согласно данным, которые нам любезно предоставил Астон,— исследование природы этой третьей активности представляет интересную задачу, аналогичную, возможно, задаче в случае индия [3].

2. **Влияние температуры.** Недавно Мун и Тилман [4] заметили, что активация серебра, родия и иода различна в зависимости от того, замедляются ли нейтроны парафином при комнатной температуре или парафином при температуре жидкого воздуха. Насколько месяцев назад [5] мы безуспешно пытались обнаружить подобный температурный эффект. Повторив опыты в тех условиях, которые нам любезно описали Мун и Тилман, мы тоже смогли констатировать возрастание интенсивности активации различных элементов с понижением температуры парафина. Наблюдаемый рост составил от 10 до 20% при активации Ag (2,3 *мин*), V, Al (2,3 *мин*), тогда как для родия не было найдено сколь-нибудь заметного увеличения активности.

Если эти различия в поведении разных элементов, наблюдавшиеся также Муном и Тилманом, будут подтверждены, то процесс захвата мед-

---

* *Radioattività provocata da bombardamento di neutroni.* X. (Con E. Amaldi, O. D ' Agostino, B. Pontecorvo, E. Segrè). Ric. Scient., 1935, 6 (1), 581—584.

[1] Ср. Ric. Scient., 1934, 5 (1), 283, 330 (Статьи 61 и 62.), 452, 652; 5 (2), 21, 381, 467; 1935, 6 (1), 123, 435.

[2] Kourtchatow, Myssowsky, Roussinow. C. R., 1935, **200**, 1201.

[3] Szilard, Chalmers. Nature, 1935, **135**, 98; Proc. Roy. Soc., 1935, **149**, 592.

[4] Moon, Tillman. Nature, 1935, **135**, 904.

[5] Proc. Roy. Soc., 1935, **149**, 522 (статья 69); Ric. Scientifica, 1934, 5(2), 467.

ленных нейтронов придется считать более сложным, чем сейчас, когда исходят из общепринятого закона сил, действующих между нейтронами и ядрами (потенциальная яма ядерных размеров).

Такое различное поведение можно было бы, вероятно, объяснить, предположив, что между нейтроном и ядром действует очень слабая сила с относительно большим радиусом действия.

3. Механический перенос медленных нейтронов. Чтобы подтвердить независимым методом результаты опытов Муна и Тилмана, мы попытались посредством механического эксперимента установить, как долго нейтроны удерживаются в парафине.

На краю стального колеса диаметром 80 *см* находился источник Rn + + Be, а рядом с ним — примерно в 5 *см* вправо и влево соответственно — помещались два одинаковых детектора медленных нейтронов. В одних опытах такими детекторами служил марганец, в других — ванадий.

Колесо вращалось между двумя большими парафиновыми кольцами прямоугольного сечения (примерно 10×20 *см*^{2}), оси которых совпадали с осью самого колеса. Одно из этих колец находилось спереди, а другое — позади плоскости колеса на расстоянии 6 *см* от нее; вес колец составлял около 100 *кг*.

На некоторое время — в зависимости от использовавшегося детектора — колесо приводилось во вращение с угловой скоростью примерно 1600 оборотов в минуту, после чего измерялось отношение активностей, приобретаемых обоими детекторами. Для измерения активности детекторы снимались с колеса; после первого измерения они снова размещались в тех же условиях, что и прежде, но колесо вращалось в противоположном направлении, и снова измерялось отношение активностей обоих детекторов.

В результате оказалось, что детектор, который при движении следует за источником, приобретает примерно на 10 % большую активность, чем детектор, движущийся впереди источника.

Этот результат показывает прежде всего, что нейтроны действительно достигают скорости, отвечающей тепловому движению. Смысл этого опыта можно уточнить с помощью следующих рассуждений.

Та же самая разница в 10 % между активностями двух детекторов получается, если источник сдвинуть примерно на 0,5 *см* от средней точки между детекторами, оставляя колесо неподвижным (такая калибровка проводилась с родиевым детектором). Точки на краю колеса проходят это расстояние за время $7 \cdot 10^{-5}$ *сек*, т. е. приблизительно в течение этого времени медленные нейтроны удерживаются в парафине. Полагая, что они обладают скоростью теплового движения (2500 *м/сек*) и средним свободным пробегом около 0,5 *см* [6], как это следует из опытов по рассеянию, можно заключить, что нейтроны испытывают в среднем до 30 столкновений после

Proc. Roy. Soc., 1935, **149**, 522 (статья 69); W e s t c o t t, B j e r g e. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1935, **31**, 145.

того, как они достигнут тепловой скорости и до того, как они благодаря диффузии покинут парафин или будут захвачены окружающими ядрами.

4. Испускание нейтронов различными веществами. Поскольку родий в водородсодержащей среде является особенно чувствительным нейтронным детектором, мы исследовали с его помощью ряд элементов на испускание нейтронов под действием α-частиц.

Как кремний, так и фосфор в смеси с 200 *мкюри* радона активировали родиевый цилиндрик с такой интенсивностью, что вначале наши счетчики регистрировали до 100 импульсов в минуту. Во всех наблюдавшихся до сих пор случаях испускание нейтронов кремнием и фосфором гораздо слабее, чем в случае бора, лития, алюминия и т. д. В случае фосфора испускание нейтронов, вероятно, связано с образованием позитронно-активного хлора[7]. Небольшое испускание нейтронов наблюдалось для многих веществ, что обусловлено, по-видимому, поверхностными примесями; наименьший эффект среди изученных веществ дает никель.

Кроме того, мы попытались установить некоторые свойства нейтронов, испускаемых литием, бором, алюминием, фтором и магнием. Для этого были сделаны источники, аналогичные обычным, но в которых бериллий заменялся исследуемым элементом.

Бор. С источником Rn + B мы измерили коэффициент чувствительности α перечисленных ниже элементов к водородсодержащим веществам. Для сравнения приводится также значение α, соответствующее источнику Rn + Be.

	Si(135 *сек*)	V(225 *сек*)	Rh (44 *сек*)	Ag(140 *сек*)	I (25 *мин*)
α_B	1	120	50	20	10
α_{Be}	1	40	15	15	5

Как видно из этих данных, которые, однако, являются лишь оценочными, коэффициенты α_B оказываются больше α_{Be}, причем соответствующий множитель меняется, грубо говоря, от 3 до 1.

Интересно также сравнить активности, созданные без замедления нейтронов двумя источниками — Rn + B и Rn + Be — одинаковой геометрической формы и содержащими равное количество эманации. Было обнаружено, что при облучении ванадия в воздухе отношение активностей, полученных с источниками Rn + Be и Rn + B, составляет около 12. Аналогичное отношение, полученное при облучении Si (135 *сек*), составило более 15. Эти факты можно было бы объяснить следующей гипотезой: в спектре нейтронов, испускаемых источником Rn + Be, имеется полоса

[7] Frisch. Nature, 1936, **133**, 721.

очень медленных нейтронов, существованию которых обязаны сравнительно малые значения коэффициентов α, и полоса очень быстрых, уже известных по другим опытам; они ответственны за довольно сильную активацию Si. Напротив, в спектре источника Rn + B нет очень медленных и очень быстрых нейтронов. Соображения подобного рода поддерживаются также и результатами следующих экспериментов. Мы измерили активацию как функцию расстояния до источника Rn + B; детектором служил родий; облучение проводилось в баке с водой (размерами $40 \times 30 \times 80$ *см*^{3}), а измерения были выполнены с помощью ионизационной камеры. Полученная кривая незначительно отличается от кривой, измеренной с источником Rn + Be[8]; точнее, на малых расстояниях активация источником Rn + B спадает медленнее, чем в случае источника Rn + Be, а для расстояний более 10 *см* обе кривые имеют одинаковую форму.

И, наконец, с помощью установки, описанной в одном из предыдущих писем, мы измерили коэффициент поглощения медленных нейтронов в хлоре, пользуясь источником Rn + B; было получено то же значение, что и для источника Rn + Be (первое уменьшение в два раза на 0,3 *г/см*^{2}).

Фтор. Источник около 300 *мкюри* CaF_2 + Rn не активирует ощутимым образом Si; при облучении в воде удалось наблюдать заметную активацию V и Rh.

Магний. Нейтроны источника Mg + Rn около 600 *мкюри* активируют P (2,4 *час*), Si (135 *сек*), Al (10 *мин*), Rh (44 *сек*) и V (225 *сек*). Коэффициенты чувствительности α_{Mg} заметно больше, чем α_{Be} для Rh (44 *сек*) и V (225 *сек*).

Алюминий. Нейтроны источника Al + Rn (около 600 *мкюри*) не активируют заметным образом Si, но активируют Rh (44 *сек*). Коэффициент α_{Al} для Rh (44 *сек*) превышает соответствующий коэффициент α_{Be}.

Более точные и детальные данные, аналогичные собранным в этом параграфе, должны дать ценную информацию о спектре скоростей нейтронов, испускаемых разными веществами при бомбардировке α-частицами, и, с другой стороны, об энергии, необходимой для активации различных элементов нейтронами.

5. Опыты по образованию нейтронов γ-лучами. Мы сравнивали активности, наведенные двумя источниками MsTh + Be и MsTh + D_2O (этот источник содержит около 35 *мкюри* RdTh) в окруженном парафином родии. Опыты были проведены с 25 *г* бериллия и 25 *г* D_2O (98%), которые располагались в одинаковых геометрических условиях. При этом было найдено, что число нейтронов, испущенных под действием γ-лучей MsTh из D_2O, в 3,5 раза больше, чем из Be. Те же самые измерения были проведены с заменой MsTh источником, содержащим 100 *мг* Ra. В условиях геометрии наших опытов, пользуясь родиевым детектором, мы получили в случае Be около 200 импульсов в минуту, тогда как для D_2O нам не удалось по-

[8] Proc. Roy. Soc., 1935, 149, 522. (Статья 69.)

лучить сколько-нибудь заметной активности. Эти факты можно легко объяснить, если допустить, что в бериллии нейтрон связан слабее, чем в дейтерии. Наконец, было замечено, что число нейтронов, испущенных Be, было примерно тем же самым, как и при использовании эквивалентных мезоториевого и радиевого источников.

С источниками MsTh + D_2O и MsTh + Be мы измерили кривую активации как функцию расстояния до источника. Облучение проводилось в баке с водой (размерами $40 \times 30 \times 80$ *см*^{3}), детектором был родиевый цилиндрик (измерения проводились на счетчиках).

Обе кривые, измеренные с Be и D_2O, обладают, в сущности, одинаковой формой. В следующей таблице приводится активность (число импульсов), соответствующая различным расстояниям, когда источником был MsTh + $+D_2O$.

Расстояние, *см*	4	6	9	12	14
Активация	1100±50	962±40	388±20	188±14	107±7

Расстояния в *см* указаны от детектора до оси трубки, содержащей MsTh.

Институт физики Римского университета
Рим, 14 июня 1935.

См. вводные замечания к статье 71

72

О РЕКОМБИНАЦИИ НЕЙТРОНОВ И ПРОТОНОВ *

Фотоэлектрическое расщепление дейтронов, а также и обратный ему процесс (рекомбинация нейтрона и протона с образованием дейтрона и испусканием γ-кванта) теоретически рассматривались Бете и Пайерлсом [1]. Эти авторы рассматривают испускание или поглощение γ-лучей в рамках обычного механизма электрического дипольного излучения. Для сечения рекомбинации они получают выражение, которое в пределе малых относительных скоростей нейтрона и протона обращается в нуль. Последний результат, по-видимому, противоречит известным экспериментальным фактам поглощения медленных нейтронов в таких водородсодержащих материалах, как парафин или вода. Время жизни медленного нейтрона в парафине недавно оценивалось в прямом опыте [2] и по порядку величины оказалось равным 10^{-4} *сек.*

Мне хотелось бы указать, что удовлетворительное согласие вероятности захвата с приведенной выше величиной можно получить, если учесть радиационные процессы, связанные с осцилляциями магнитного диполя системы протон — нейтрон. Такая теория опирается на принятое предположение, согласно которому основным состоянием дейтрона является ^3S (спины нейтрона и протона параллельны).

Обычная теория столкновений показывает, что в случае медленных нейтронов существенным оказывается лишь захват из S-состояний непрерывного спектра. Для таких S — S-переходов обыкновенные электрические дипольные и квадрупольные радиационные процессы оказываются запрещенными. Напротив, механизм магнитного дипольного излучения допускает переходы из ^1S-состояния непрерывного спектра в основное состояние ^3S.

Обычная электромагнитная теория дает следующую формулу для обратной величины среднего времени жизни $1/\tau$ нейтрона, движущегося со скоростью v в среде, которая содержит n протонов в единице объема:

$$\frac{1}{\tau} = n \frac{64\pi^4 h v^3}{c^3 m^2 v^2} \mu_0 (g_p - g_n)^2 \left| \int f \varphi r^2 \, dr \right|^2;$$

---

* *On the Recombination of Neutrons and Protons.* Phys. Rev., 1935, 48, 570.

[1] H. Bethe, R. Peierls. Proc. Roy. Soc., 1935, A148, 146.

[2] E. Amaldi, O. D'Agostino, E. Fermi, B. Pontecorvo, E. Segrè. Ric. Scient., 1935, 6 (1), 581. (Статья 71.)

здесь m — масса нейтрона, ν — частота испущенного фотона, μ_0 — ядерный магнетон, g_p и g_n — ядерные g-факторы протона и нейтрона. В интеграл в последнем соотношении входят нормированные собственные функции $f(r)$ основного состояния и состояния непрерывного спектра $\varphi(r)$. Последняя нормирована таким образом, что при больших r она переходит в $(1/r) \sin(2\pi pr/h + \text{const})$.

Численное значение этого интеграла можно получить методами, аналогичными применявшимся Бете и Пайерлсом. Необходимый для описания собственной функции ^1S параметр можно найти, предполагая, что большое сечение упругого рассеяния медленных нейтронов в водороде связано главным образом именно с этой собственной функцией (уровень ^1S — реальный или виртуальный — по энергии близок к нулю). Для медленных нейтронов получаем

$$\frac{1}{\tau} = \frac{16\pi^3 W^{5/2}}{h^3 c^3 m^{1/2}} \frac{\mu_0^2 (g_p - g_n)^2}{l},$$

где l — средний свободный пробег медленных нейтронов относительно упругого рассеяния (в парафине он составляет около 0,5 *см*)[3], а $W = 2{,}1 \cdot 10^6$ *эв* — энергия связи дейтрона. Принимая для магнитных моментов протона и дейтрона[4] значения 3 и 1 (в ядерных магнетонах), получаем $g_p = 6$ и $g_n = -4$. Это дает $1/\tau = 5{,}2 \cdot 10^3$ — в согласии с экспериментальным результатом.

Магнитное дипольное излучение существенно также для процесса фотоэлектрического расщепления дейтрона. Сечение фотоэлектрического поглощения γ-лучей дейтроном, в тех же предположениях, получается в виде

$$\sigma_\gamma = \frac{4\pi^2 a^2 \alpha^2 \mu_0^2 (g_p - g_n)^2}{3hc} \frac{(\gamma - 1)^{1/2}}{\gamma \{1 + a^2\alpha^2(\gamma - 1)\}},$$

где

$$a^2 = \frac{1}{\pi n l}, \qquad \alpha^2 = \frac{4\pi^2 m W}{h^2}, \qquad \gamma = \frac{h\nu}{W}.$$

Это сечение нужно прибавить к уже вычисленному Бете и Пайерлсом, чтобы получить полное сечение.

Подробности этой теории будут опубликованы в другом месте.

Мичиганский университет.
27 августа 1935 г.

---

[3] E. Amaldi, O. D'Agostino, E. Fermi, B. Pontecorvo, F. Rasetti, E. Segrè. Proc. Roy. Soc., 1935, A149, 522. (Статья 69.)

[4] O. Frisch, O. Stern. Z. Physik, 1933, 85; 4; I. Estermann, O. Stern. Z. Physik. 1933, 85, 17; Phys. Rev., 1934, 45, 761; I. I. Rabi, J. M. B. Kellogg, J. R. Zacharias. Phys. Rev., 1934, 45, 761, 769.

1936

К статьям 73 и 74

Эти статьи описывают результаты работы Ферми с октября 1935 по май 1936 г.

В теоретической работе 74 помимо многих новых результатов содержится ряд более ранних, прежде не публиковавшихся или же опубликованных, но лишь в предварительном виде. Все работы чисто экспериментального характера были выполнены при моем участии. Подлинники блокнотов с записями данных хранятся в архивах Domus Galilaeana в Пизе.

После отпуска летом 1935 г. мы с Ферми оказались в Риме одни. К этому времени большинство участников нашей группы разъехалось, и виной тому была главным образом общая обстановка в Италии, ибо страна готовилась к Абиссинской войне. Разетти уехал в США и собирался остаться в Колумбийском университете, по меньшей мере, на год. Сегре также перебрался на лето в Соединенные Штаты и тогда же был назначен профессором в университет Палермо. По возвращении в Италию он покинул Рим, уехав на Сицилию. Д'Агостино больше с нами не работал — он занял какой-то пост в Химическом институте Национального совета по научным исследованиям. Понтекорво вернулся в Рим вскоре вслед за нами и несколько месяцев работал с Виком; позднее он получил стипендию Министерства национального образования для обучения за границей и весной 1936 г. уехал из Рима в Париж работать с Жолио в лаборатории Кюри. С этого времени его визиты в Рим стали очень короткими и редкими.

Возобновив работу, мы с Ферми обратили внимание на некоторые результаты Бьерджа и Уэсткота, а также Муна и Тилмана. По их наблюдениям, поглощение медленных нейтронов различными элементами несколько зависело от элемента, используемого в качестве детектора. Принятая в то время теория поглощения нейтронов ядрами не объясняла этого факта. Для всех ядер она предсказывала обратно пропорциональную зависимость сечения захвата от скорости нейтронов. Предполагалось, что эта энергетическая зависимость справедлива для очень широкого интервала энергий, заведомо включающего область медленных нейтронов.

За работу мы принялись с еще большей энергией, чем прежде, — как будто хотели увеличением своих собственных усилий компенсировать понесенные нашей группой потери. Был разработан систематический план штурма, цель которого шутливо формулировалась так: измерим коэффициенты поглощения для всех 92 элементов, комбинируя их всеми возможными способами с 92 элементами-детекторами. И в шутку же прибавляли, что вслед за комбинациями всех элементов из двух по два будут испробованы также и сочетания из трех по три. Под этим разумелось наше намерение изучить также и характеристики поглощения нейтронного излучения, прошедшего через различные фильтры.

Но, уже измерив коэффициенты поглощения для одиннадцати различных элементов (во всех возможных комбинациях с семью детекторами), мы убедились в правильности наблюдений обеих групп английских ученых и, более того, в справедливости правила, согласно которому коэффициент поглощения для какого-либо элемента больше в том случае, когда детектором является тот же самый элемент. Мы начали с самого детального исследования серебра, родия и кадмия, причем поглощающие свойства кадмия были изучены более тщательно. На нейтронах, прошедших через слой кадмия, различными детекторами было измерено поглощение различных элементов — так же,

как это уже было сделано нами при изучении неотфильтрованного нейтронного излучения. Таким образом, к началу ноября 1935 г. нам стало ясно, что упомянутый выше эффект самопоглощения оказывается значительно бо́льшим (см. [Б112]), если нейтроны были предварительно пропущены через кадмий. В действительности эта мысль присутствовала уже в статьях обеих английских групп; однако наши измерения — более обширные и полные — сделали этот вывод неизбежным.

Любопытно заметить, что в этом случае я, подобно многим другим, стремился нарисовать простую картину явления, пытаясь объяснить различные группы нейтронов их принадлежностью разным интервалам энергии. Однако Ферми не хотелось принимать такое описание, хотя и он тоже был убежден в том, что эта гипотеза была простейшей. Но она не была совершенно необходимой, по крайней мере, в данный момент, и поэтому, утверждал Ферми, было бы вредно вводить ее в нашу мысленную картину. Он утверждал далее, что действовать нужно на основе рассуждений, опирающихся только на установленные экспериментальные факты, и тогда правильное толкование природы нейтронных групп в конце концов возникнет как необходимое следствие этих данных. Ферми опасался, что «досрочное» объяснение — как бы правдоподобно оно ни звучало — может отвлечь нас от объективной оценки явления.

Поэтому мы приступили к систематическому изучению поглощения и диффузии различных групп нейтронов, обозначая эти группы буквами — как для краткости, так и во избежание любых следов какой-либо интерпретации. Для нейтронов, сильно поглощаемых кадмием, употреблялось выражение «группа *C*»; «группой *D*» были названы нейтроны, которые сильно поглощаются родием, но не кадмием. Название «группа *A* и *B*» использовалось для двух компонент, которые, как мы считали, были найдены в излучении, сильно поглощаемом серебром, но не поглощаемом кадмием.

Во втором письме в «Ricerca Scientifica» от 12 декабря 1935 г. [Б113] было дано четкое определение групп медленных нейтронов и обсуждалось их поглощение и другие свойства. В этой статье сообщалось об экспериментах, поставленных для того, чтобы установить, какая доля нейтронов из тех, что появляются на поверхности замедлителя (парафина или воды), принадлежит каждой группе (численность), а также определить коэффициенты отражения различных групп (альбедо) [1] и их длины диффузии.

Мы показали, что группа *C* — нейтроны, сильно поглощаемые кадмием,— обладает свойствами, весьма отличающимися от характерных для нейтронов, которые проходят сквозь кадмий. Альбедо нейтронов этой группы оказалось очень большим (0,83), тогда как для групп *D*, *A* и т. д. оно ничтожно мало. Длина диффузии в парафине составила около 3 *см* для группы *C*, а для других групп — примерно вшестеро меньше.

Последние результаты стали совершенно понятными в результате более точных опытов, поставленных в январе 1936 г. и опубликованных в работе [Б114]; в этих опытах длина диффузии определялась по вероятности утечки нейтрона, который первоначально находится на глубине x в пределах среды, заполняющей полубесконечное простран-

....

[1] Астрономы пользуются выражением «альбедо» для обозначения доли падающего света, диффузно отраженного поверхностью планеты или спутника; чаще всего оно относится к Луне. Однако понятием альбедо пользуются и для других поверхностей, например для снега.

ство. Выражение для такой вероятности выводится из уравнения диффузии, принятого для описания свойств группы C. В этой же статье обсуждается — как наиболее вероятная — интерпретация нейтронных групп на основе различия их энергий, но при этом не отвергаются и другие возможные объяснения. Работа заканчивается ссылкой на выполнявшийся в то время, но еще не завершенный эксперимент, цель которого состояла в проверке справедливости следующего вывода: если разные группы отличаются лишь своей энергией, то нейтроны, относящиеся в некоторый момент времени к одной группе, вследствие их последующего замедления должны трансформироваться в нейтроны другой группы.

К тому времени нам уже было известно (по нескольким работам других исследователей, цитированным в работе [Б114]), что группа C включает тепловые нейтроны. Поэтому если объяснение групп различными энергетическими интервалами верно, то все остальные группы должны при замедлении переходить в группу C. Окончательные результаты этих опытов сообщены в работе [Б117]. Халбан и Прайсверк уже опубликовали тогда отчет об эксперименте такого же типа.

Для исчерпывающего выяснения диффузионных свойств нейтронов группы C упомянутые выше измерения длины диффузии необходимо было дополнить измерениями средней длины свободного пробега. Результат первого определения этой величины сообщается в письме в «Ricerca Scientifica» от 20 марта 1936 г. [Б115], где четко показана разница между значениями средней длины свободного пробега нейтронов группы C и всех других нейтронных групп.

Объяснение групп нейтронов различием в их энергии получило между тем поддержку как со стороны экспериментов упомянутого выше типа — трансформируемость разных групп в группу C,—так и благодаря работе Бора [Nature (London), 1936, 137, 344], представленной Датской академии 27 января 1936 г. В ней был предложен механизм ядерных процессов, объяснявший наличие многих узких уровней у ядер среднего и большого атомного номера.

Однако различие средних свободных пробегов, о котором сообщалось в работе [Б115], Ферми считал обусловленным химической связью, поскольку он не мог представить себе какой-либо ядерный процесс, способный вызвать подобный эффект. Теория этого явления дана в статье 74.

Здесь, возможно, полезно вспомнить, что по мере развития этой работы методика измерений становилась все более совершенной. На протяжении первого этапа исследований, проводившихся нашей группой в Римском университете, измерения активности выполнялись исключительно гейгеровскими счетчиками с тонкими алюминиевыми стенками (один из них хранится в Domus Galilaeana). Но после открытия влияния водородсодержащих веществ активности стали получаться столь высокими, что часто оказывалось возможным пользоваться ионизационной камерой с электрометром. Этот метод был затем развит и усовершенствован созданием новых типов ионизационных камер и новых способов применения электрометров. Они калибровались с величайшей тщательностью, чтобы хорошо определить их характеристики и максимально использовать их возможности. Специально подготовленные многочисленные номограммы и графики позволяли быстро вычислять по показаниям шкалы электрометра активности исследуемых радиоактивных объектов.

Как только была принята интерпретация наблюдаемых фактов в рамках гипотезы Бора — на основе резонансных уровней составного ядра,— естественным образом

встала задача определения ширины и энергии таких резонансных линий. Об этом говорится в работе [Б116] (датированной 13 апреля 1936 г.), в которой нашли применение различные формулы, вывод которых приводится в статье 74. В этой работе показано, как среднее квадратичное расстояние, проходимое нейтроном до того, как он достигнет резонансной энергии детектора, возрастает с уменьшением последней. Таким путем была количественно установлена связь пространственного распределения резонансных нейтронов с их энергиями.

В работе [Б117] сообщается об измерении (по длине экстраполяции) средней длины свободного пробега для группы C (тепловые нейтроны) и пересматриваются все диффузионные свойства медленных нейтронов в парафине.

Все эти, а также и многие другие измерения, включая определение полного числа испускаемых источником нейтронов (методом пространственного интегрирования медленных нейтронов в водородсодержащей среде больших размеров), сведены вместе и обсуждаются в статье 73 от 29 мая 1936 г.

В это время подходил к концу академический год, пролетевший в обстановке изоляции и неистовой работы. Время от времени Разетти писал нам о происходящем в Колумбийском университете, оттиски статей Халбана и Прайсверка держали нас в курсе работ, проводившихся в Париже, а переписка с Плачеком обеспечивала контакт с Копенгагеном. Из писем Плачека мы узнали о работе Бора (а также о работе Фриша и Плачека), касающейся закона $1/v$ для поглощения нейтронов бором. Благодаря этой же переписке из Рима распространилась шутка: энергию нейтронной группы можно определить по расстоянию, которое нейтроны проходят при своем замедлении, точно так же как возраст капитана можно узнать по длине корабельной мачты. К этому времени, по-видимому, восходит выражение «возраст», которым Ферми в дальнейшем называл величину $\overline{r^2}/6$. Сперва выражение «возраст капитана» относилось к опытам по изучению трансформации некоторой группы нейтронов в группу с меньшей энергией[1].

Статья 74 является теоретической и включает, помимо вычисления $\overline{r^2}$ как функции энергии, еще и расчеты альбедо, экстраполированной длины, углового распределения нейтронов, уходящих с поверхности замедлителя. Она содержит также ряд других задач, рассматриваемых в «одномерной модели среды», которая, по словам Ферми, даже много лет спустя оказалась достаточной для решения большинства диффузионных проблем. По его мнению, наиболее изощренные математические методы были сущей иллюзией, ибо свойственные физическим гипотезам неопределенности (а такие гипотезы лежат в основе любого подхода к задаче) намного больше присущих данной модели математических неточностей.

Вторая часть статьи 74 включает теорию влияния химической связи на нейтрон-протонные соударения и теорию радиационного захвата нейтронов в водороде, по поводу которой Ферми уже опубликовал короткую заметку (статья 72).

[1] Упоминаемый Амальди широкоизвестный анекдот не первый раз использовался учеными. Так, возражая Больцману, Бертран писал, что при помощи теории вероятностей из механики нельзя получить ничего нового, как нельзя узнать, сколько лет капитану, зная тоннаж и число труб его судна. Анекдотический по происхождению термин «возраст нейтронов» приобрел затем очень ясный физический смысл.— *Прим. ред.*

Эта теоретическая деятельность протекала рано по утрам, до прихода Ферми в институт. В то время он всегда появлялся там не позже девяти, а часто и в восемь часов. В этой статье можно найти истоки почти всех значительных идей, развитых затем Ферми в последующие годы.

Кроме нас с Ферми, в институте работали также Вик и Понтекорво. Несколько месяцев они занимались измерением обратного рассеяния нейтронов различных групп на разных веществах. Потом Понтекорво уехал в Париж, а Вик вновь обратился к теоретической физике. Иногда появлялся Этторе Майорана, да изредка Сегре приезжал из Палермо проведать нас.

Работали мы с невероятным упорством: начинать приходилось в восемь утра и почти без перерыва проводить измерения до шести или семи вечера, а зачастую и еще позже. Эти измерения велись по определенному графику, так как мы уже знали минимальное время, необходимое для каждой операции. Они повторялись каждые три-четыре минуты на протяжении многих часов, а то и дней, если это требовалось для решения поставленной задачи.

Покончив с одной задачей, мы сразу же приступали к другой — без перерыва, без тени сомнения. «Физика — наша сома» [2] — вот фраза, которой мы характеризовали нашу работу, выполнявшуюся в то время, когда общая обстановка в Италии омрачалась все более: сначала в результате Абиссинской кампании, а затем из-за участия Италии в гражданской войне в Испании [3].

В июне Ферми уехал в Соединенные Штаты, где ему предстояло прочесть курс термодинамики в Колумбийском университете. Вскоре после этого я последовал за ним, получив от Фонда Вольта итальянской Академии субсидию, с помощью которой намеревался изучить конструкцию протонного ускорителя на 1 *Мэв*.

По пути в Вашингтон я остановился примерно на месяц в Нью-Йорке, где переводил на английский язык статью 73 для публикации в «Physical Review». В этой работе мне помогал Г. Г. Голдсмит, слушавший курс Ферми в Колумбийском университете. Кроме того, я пытался убедить Ферми перевести его теоретическую работу 74, но он отвечал, что не желает терять время; а если кто-то заинтересуется изучением медленных нейтронов, то должен будет прочесть эту статью, даже если она будет опубликована только на итальянском.

Э. Амальди

---

[2] Выражение «сома» взято из фантастического романа О. Хаксли «Превосходный новый мир», где оно обозначает некий гормональный препарат, заменитель алкоголя, но без его последействия. Он принимается людьми 2000 года для временного отвлечения от действительности.— *Прим. ред.*

[3] Профессор Амальди имеет в виду агрессию фашистской Италии против Эфиопии и военную интервенцию Италии совместно с нацистской Германией против республиканской Испании.— *Прим. ред.*

73

О ПОГЛОЩЕНИИ И ДИФФУЗИИ МЕДЛЕННЫХ НЕЙТРОНОВ *

(Совместно с Э. Амальди)

Изучение характеристик поглощения медленных нейтронов позволило обнаружить полосы поглощения, отвечающие некоторым энергетическим интервалам; эти интервалы достаточно узки, что позволяет выделить сравнительно гомогенные группы нейтронов. В этой работе описываются и обсуждаются некоторые эксперименты, поставленные для выяснения характеристик поглощения и рассеяния нейтронов различных групп.

Содержание: 1. Введение. 2. Измерения и их обработка. 3. Селективное поглощение. 4. Группы медленных нейтронов. 5. Систематическое изучение поглощения. 6. Альбедо. 7. Рассеяние нейтронов отдельной группы. 8. Средняя длина свободного пробега тепловых нейтронов. 9. Поведение групп в зависимости от расстояния до источника; отношение энергий. 10. Переход нейтронов из одной группы в другую. 11. Поведение групп вблизи поверхности парафина. 12. Ширина энергетических полос, соответствующих группам. Полное число нейтронов. 13. Краткие выводы и обсуждение.

1. Введение

Цель настоящей работы состоит в систематическом описании проведенных нами исследований поглощения и рассеяния медленных нейтронов [1]. Как известно, простейшая теория [2] захвата нейтрона ядром предсказывает, что при малых скоростях нейтрона сечение захвата обратно пропорционально скорости. Однако константа пропорциональности может изменяться в широких пределах при переходе от элемента к элементу.

Если бы это было так, то слои двух различных элементов, толщины которых обратно пропорциональны указанным выше константам, были бы совершенно эквивалентны как поглотители медленных нейтронов неза-

---

* *On the Absorption and the Diffusion of Slow Neutrons.* (With E. Amaldi). Phys. Rev., 1936, **50**, 899—928.

[1] E. Amaldi, E. Fermi. Ric. Scient., 1935, 6 (2), 334, 443; 1936, 7 (1), 56, 223, 310, 393, 454; см. также: E. Fermi, E. Amaldi, O. D'Agostino, F. Rasetti, E. Segrè. Proc. Roy. Soc., 1934, **A146**, 483 (статья 65); E. Amaldi, O. D'Agostino, E. Fermi, B. Pontecorvo, F. Rasetti, E. Segrè. Proc. Roy. Soc., 1935, **A149**, 522. (Статья 69.)

[2] E. Amaldi, O. D'Agostino, E. Fermi, B. Pontecorvo, F. Rasetti, E. Segrè. Proc. Roy. Soc., 1935, **A149**, 522 (статья 69); H. A. Bethe. Phys. Rev., 1935, **47**, 747; F. Perrin, W. M. Elsasser. C. R., 1935, **200**, 450.

висимо от скорости последних и вещества, используемого в качестве детектора. Однако многие авторы [3] еще раньше заметили, что дело обстоит не так просто; они показали, что обычно медленные нейтроны поглощаются каким-либо элементом сильнее в том случае, когда они регистрируются по активности, наведенной в том же элементе.

К подобному же выводу приводят и опыты Муна и Тилмана, а также других авторов [4], в которых было показано, что различные детекторы проявляют разную чувствительность к изменению температуры парафина. Наконец, совсем недавно Сегре, Финк, Даннинг и Пеграм [5] с помощью механического устройства измерили зависимость коэффициента поглощения тепловых нейтронов от их скорости и обнаружили, что, по крайней мере, для Cd закон $1/v$ не выполняется. При систематическом исследовании этого явления нами установлено, что селективность в поглощении медленных нейтронов усиливается, если их пропустить через кадмиевый фильтр достаточной толщины [6]. Этот факт, независимо установленный Сцилардом [7], указывает на возможное существование сравнительно узких полос поглощения, характерных для каждого элемента.

Эти явления можно систематически описать, если всю совокупность медленных нейтронов разделить на группы, приблизительно однородные по свойствам поглощения [8]. Подобный анализ можно провести, разлагая кривые поглощения на экспоненты. Кроме того, мы изучали различные группы нейтронов по их рассеянию в водородсодержащих веществах.

В § 2 описываются методы, которые использовались при выполнении наших опытов и при обработке результатов. В § 3—5 проведена некоторая систематизация данных по характеристикам поглощения и интенсивности активации, создаваемой различными группами нейтронов в разных детекторах. В § 6 описываются опыты по измерению коэффициента отражения (альбедо) нейтронов различных групп; средняя длина свободного пробега и среднее число соударений, испытываемых в парафине нейтроном данной группы, исследуются в § 7 и 8. В § 9 показано, каким образом изменяется интенсивность активации, наведенной различными группами, в зависимости от расстояния до источника, окруженного большим количеством воды. Подобная взаимосвязь позволяет установить последовательность различ-

---

[3] P. B. Moon, J. R. Tillman. Nature (London), 1935, **135**, 904; **136**, 136; T. Bjerge, C. H. Westcot. Proc. Roy. Soc., 1935, **A150**, 709; L. Artimovitch, I. Kourtschatow, L. Myssowski, P. Palibin. C. R., 1935, **200**, 2159; B. Pontecorvo. Ric. Scient., 1935, **6** (2), 145; L. N. Ridenour, Don M. Yost. Phys. Rev., 1935, 48, 383.

[4] P. B. Moon, J. R. Tillman. Nature (London), 1935, **135**, 904; J. R. Dunning, G. B. Pegram, G. A. Fink, D. P. Mitchell. Phys. Rev., 1935, 48, 265; P. B. Moon, J. R. Tillman. Proc. Roy. Soc., 1936, **A153**, 476.

[5] F. Rasetti, E. Segrè, G. A. Fink, J. R. Dunning, G. B. Pegram. Phys. Rev., 1936, **49**, 104; Rend. Lincei, 1936, **23**, 343.

[6] E. Amaldi, E. Fermi. Ric. Scient., 1935, 6 (2), 344.

[7] L. Szilard. Nature (London), 1935, **136**, 950.

[8] E. Fermi, E. Amaldi. Ric. Scient., 1935, 6 (2), 443.

ных групп нейтронов на шкале энергий и, кроме того, дает возможность оценить отношения энергий этих групп. Некоторые опыты по диффузии нейтронов описываются в § 10 и 11, а в § 13 обсуждаются все полученные результаты.

В этой работе мы часто пользуемся некоторыми теоретическими соотношениями, выведенными одним из нас [9]. Ссылаясь на эту работу, мы будем обозначать ее F.

2. Измерения и их обработка

В качестве нейтронного источника всегда использовались стеклянные трубочки диаметром около 4 и длиной 15 *мм*, содержащие Rn (до 800 *мкюри*) и порошкообразный бериллий. Поскольку наши опыты проводились на протяжении нескольких месяцев, очевидна была необходимость выработать какой-то стандартный метод сопоставления результатов, полученных на различных источниках и в разное время.

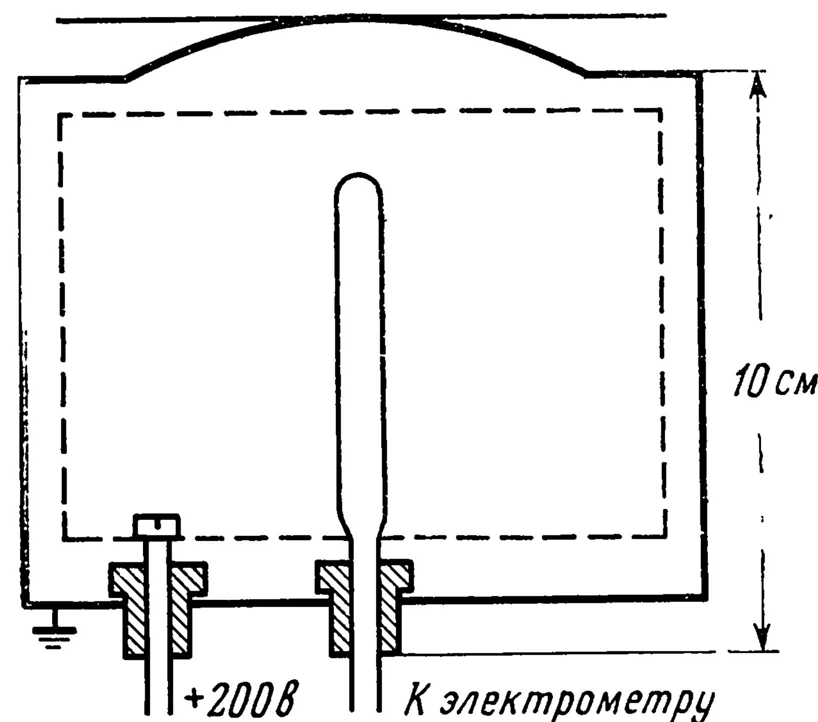


Рис. 1. Ионизационная камера

Перейдем к описанию тех критериев, которые применялись для этой цели. Измерения активности проводились с помощью ионизационной камеры, схематически изображенной на рис. 1 (там же указан и масштаб). Камера наполнялась углекислым газом до давления три атмосферы, и ее окошко (диаметр 7 *см*) было закрыто алюминием толщиной 0,1 *мм*. Под действием этого давления алюминиевое окошко сильно выгибалось наружу, и поэтому поверх него устанавливалась целлофановая фольга. Она имела двойное назначение, защищая камеру от возможного загрязнения и обеспечивая плоскую поверхность для размещения детекторов. Ионизация измерялась электрометром Эдельмана, нить которого проектировалась на шкалу; при этом чувствительность электрометра и увеличение изображения нити можно было менять, так что мы получали от 5 до 250 делений на вольт. Для контроля показаний прибора использовался препарат окиси урана, помещенный в алюминиевый пакет 5×5 *см*^{2}. Этот препарат и его активность будем обозначать через U.

Ионизация, создаваемая в нашей камере препаратом U, эквивалентна той, которая создается раствором 0,96 *г* уранил нитрата $[UO_2(NO_3)_2 + 6H_2O]$ в 25 *см*^{3} воды, помещенным в алюминиевую чашечку с толщиной

[9] E. Fermi. Sul moto dei neutroni nelle sostanze idrogenate. Ric. Scient., 1936, 7 (2), 13 (Статья 74.)

стенок 0,1 *мм* и площадью основания 5 × 5 *см*². Исправив активность этого раствора на поглощение в самом растворе и в алюминии, мы нашли, что она соответствует 0,066 *г* урана, т. е. 840 распадам в секунду.

Чтобы снимать показания быстрее и иметь возможность пользоваться различными чувствительностями электрометра и разными интервалами шкалы, была построена номограмма, позволявшая нам по заданной чувствительности и измеренному числу делений определять время, за которое U создаст точно такую же ионизацию. Поправки на нелинейность прибора и на зависимость емкости электрометра от чувствительности вводятся, таким образом, автоматически. Показания прибора исправлялись, разумеется, на фоновый эффект, составлявший около 15% U. Очевидно, что активность детектора, расположенного определенным образом относительно источника и окружающих предметов, пропорциональна числу нейтронов, испускаемых источником. Поэтому для сравнения результатов измерений всегда необходимо делить активность на интенсивность источника, выраженную числом нейтронов (нейтронная интенсивность). Для определения такой интенсивности недостаточно считать ее пропорциональной количеству радона в источнике, которое можно измерить, например, по γ-активности. В действительности оказывается, что небольшие различия в размерах гранул бериллия или в способе приготовления источника приводят к достаточно заметным вариациям числа испускаемых нейтронов. По этой причине интенсивность нейтронов удобно измерять при помощи радиоактивности, наведенной в подходящем детекторе. Обычно процедура состояла в следующем: мы активировали родиевую пластинку 5 × 5,6 *см*² и весом 10,15 *г*, помещая ее в центре верхнего торца парафинового цилиндра

$$\text{диаметром 25 см, высотой 15 см;} \tag{1}$$

сверху на эту пластинку ставился другой парафиновый цилиндр 13 *см* в диаметре и высотой 10 *см*. Источник располагался на оси нижнего цилиндра в 3 *см* от его верхнего торца.

Обозначим через S начальную активность (период 44 *сек*) родия, которая получается в этих условиях при бесконечном облучении. Нейтронной интенсивностью I будем называть отношение этой активности S к U:

$$I = S/U. \tag{2}$$

Следует заметить, что на подобное определение влияет, хотя и не очень заметно, используемая ионизационная камера. Нейтронная интенсивность самого сильного из применявшихся нами источников составляла 144,9. Нейтронная интенсивность, равная 1, соответствует источнику, содержащему от 5 до 6 *мкюри* радона. Теперь можно дать определение того, что мы будем называть *активируемостью* A данного детектора (указывая при необходимости один из его периодов), расположенного в фиксированном положении относительно источника и окружающих предметов.

Пусть a — начальная активность детектора, облучавшегося бесконечное время. Активируемость A такого детектора для данного его положения

определяется выражением

$$A = 1000a/S = 1000a/I \cdot U. \quad (3)$$

Естественно, что мы вычисляли активируемость именно с помощью последней формулы. Нейтронная интенсивность измерялась очень точно для каждого источника один раз. Зная эту величину и период полураспада радона, мы рассчитывали значение интенсивности для любого последующего момента времени.

Начальная интенсивность a определялась при конечном времени облучения и приводилась к бесконечной экспозиции с помощью известных формул.

В случае короткопериодных элементов удобно выработать стандартную процедуру измерения начальной активности, чтобы по возможности не зависеть, по крайней мере при относительных измерениях, от возможных ошибок в значениях периодов. Поэтому облучение родия (44 *сек*) и серебра (22 *сек*), которые служили детекторами в очень большом числе опытов, проводилось в течение 1 *мин*. В случае серебра показания снимались с 20-й по 80-ю секунду после конца облучения, затем измеренная активность умножалась на соответствующий множитель, и мы получали начальную активность. Фактически в таком опыте измеряется не только 22-секундная активность, поскольку имеется некоторое возмущение, вносимое периодом 2,3 *мин*; однако оно не слишком велико и поправка на него, как правило, не вводилась (см. также § 5).

Родий также облучался всегда 1 *мин*, а отсчеты делались примерно с 30-й по 60-ю секунду после конца облучения; начальная активность быстро вычислялась с помощью номограммы. В этом случае также не учитывалось малое возмущение, обусловленное активностью с периодом 4,2 *мин*.

В ходе этой работы было выполнено большое число измерений поглощения медленных нейтронов различными веществами, причем обеспечивались следующие условия. Измерения проводились вне парафина, так как в противном случае большая доля нейтронов проходит через поглотитель много раз (см. § 6). Источник Rn + Be обычно помещался внутри парафинового цилиндра (1) в 3 *см* от центра верхнего торца, куда ставились различные детекторы. Большинство этих детекторов представляло собой квадраты со стороной 5 *см*.

Активируемость детектора в этих условиях мы будем называть нормальной (A_n). Она служит неким показателем эффективности разных детекторов. В качестве примера в табл. I приводятся нормальные активируемости ряда детекторов, которые использовались в опытах.

При измерении поглощения между парафином и детекторами вставлялись как можно более тонкие слои поглотителя. Для устранения ошибки, обусловленной наличием зазора высотой h между детектором и верхним торцом парафина, было измерено изменение активности родиевого детектора в зависимости от h. Найденное нами эмпирическое правило приведения активируемости к $h = 0$ сводится к делению результатов измерений на

Таблица I

Активируемость A_n различных детекторов

Вещество	Период	Вес, *г*	Площадь, *см²*	A_n	Вещество	Период	Вес, *г*	Площадь, *см²*	A_n
MnO_2	2,5 *час*	30	26	30	Ag	22 *сек*	8	27	135
Cu	5 *мин*	13	38	2	In	54 *мин*	0,76	9	21,2
Ga	20 *мин*	2,6	7	1,3	In	16 *сек*	0,76	9	14,2
As	26 *час*	7	20	24	I	25 *мин*	25	25	16,9
NaBr	18 *мин*	26	25	9,2	Ir	19 *час*	14,5	25	78
Rh	44 *сек*	10,15	28	282	Au	27 *дн*	6,6	25	26

1 — (h/7), где h дается в сантиметрах; это правило оказалось достаточно точным для значений h вплоть до 1 *см* и несколько бóльших.

Строго говоря, эта поправка на высоту должна зависеть от того, какой поглотитель используется и какая группа нейтронов изучается; однако сейчас мы не учитываем подобные тонкости. Даже если бы вылетающие из парафина нейтроны были гомогенны, кривые поглощения, полученные при указанных выше условиях, не будут экспоненциальными. Это связано с тем, что выходящие под разными углами θ нейтроны проходят различные толщины поглотителя. При вычислении коэффициентов поглощения по экспериментальным данным это обстоятельство необходимо принимать во внимание. Долгое время мы вычисляли эту поправку, предполагая, что покидающие парафин нейтроны распределены по закону косинуса.

В этом предположении полученная с помощью тонкого детектора кривая поглощения в зависимости от $K\delta$ (K — коэффициент поглощения нейтронов, δ — толщина поглотителя) оказалась не экспонентой $e^{-K\delta}$ (кривая a на рис. 2), а функцией

$$b(K\delta) = \int_0^1 e^{-K\delta/x}\,dx, \qquad (4)$$

которая представлена на рис. 2 кривой b. Теперь мы считаем, что для

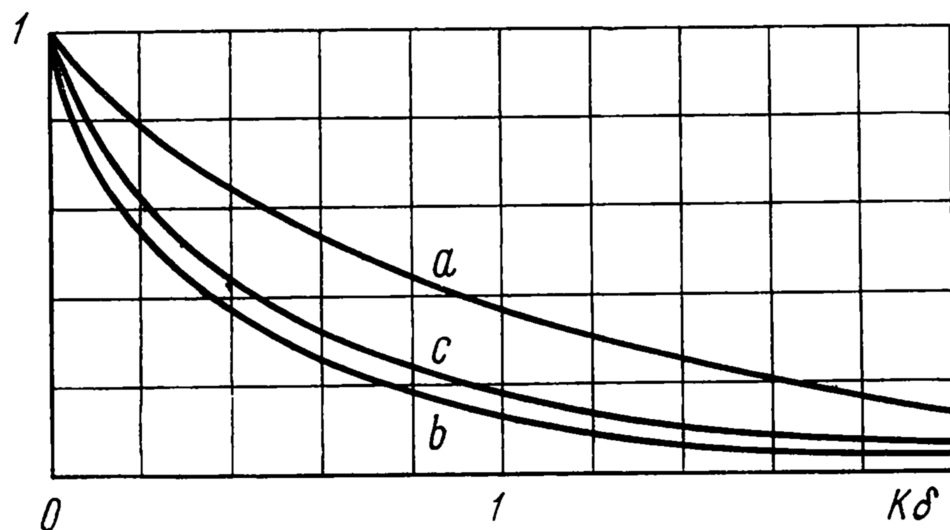


Рис. 2. Кривые поглощения, отвечающие разным законам:

a — $a(K\delta) = e^{-K\delta}$;

b — $b(K\delta) = \int_0^1 e^{-K\delta/x}\,dx$;

c — $c(K\delta) = \frac{2}{2+\sqrt{3}} \int_0^1 e^{-K\delta/x}(1+\sqrt{3}\,x)\,dx$

группы C (см. F, § 6), по-видимому, было бы лучше принять количество нейтронов, испускаемых в единицу телесного угла, пропорциональным не $\cos\theta$, а приблизительно

$$\cos\theta + \sqrt{3}\cos^2\theta. \tag{5}$$

Если взять для нейтронов это угловое распределение, то кривая поглощения как функция $K\delta$ дается выражением

$$c(K\delta) = \frac{2}{2+\sqrt{3}}\int\limits_0^1 e^{-K\delta/x}(1+\sqrt{3}x)\,dx, \tag{6}$$

которое на рис. 2 представлено кривой c. Эта кривая, по-видимому, достаточно хорошо описывает ход поглощения C-нейтронов. Для нейтронов других групп кривая поглощения, вероятно, будет расположена между b и c; однако вся обработка результатов проводилась с помощью кривой c. В случае толстых детекторов — иными словами, когда становится существенным поглощение нейтронов на эффективной толщине,—в данные, полученные с помощью кривой c, вносилась дополнительная поправка.

Отличие коэффициентов поглощения, полученных в этой работе, от указанных в предварительных сообщениях обусловлено главным образом тем обстоятельством, что при обработке результатов вместо кривой b (рис. 2) использовалась кривая c.

3. Селективное поглощение

Выше уже говорилось о том, что по наблюдениям различных авторов поглощение медленных нейтронов в каком-либо элементе обычно оказывается сильнее в том случае, когда используется детектор из того же элемента. Так, например, в табл. II указана доля активности (в процентах), пропускаемой родиевым (0,36 *г/см*^{2}) и серебряным (0,96 *г/см*^{2}) поглотителями, когда детектором служит родиевая (0,36 *г/см*^{2}) либо серебряная (0,30 *г/см*^{2}) пластинка. Подобного рода данные, охватывающие большое число элементов, публиковались многими авторами [10].

Эти факты позволяют предположить существование селективного поглощения медленных нейтронов. Очевидный метод изучения этого явления состоит в измерении и анализе соответствующих кривых поглощения. На рис. 3 показаны подобные кривые для кадмия с родиевым (0,36 *г/см*^{2}) и серебряным (0,057 *г/см*^{2}) детекторами. Как видно из этих кривых, активность обоих детекторов обусловлена излучением, которое не является гомогенным, но состоит из двух фракций, одна из которых очень сильно

[10] P. B. Moon, J. R. Tillman. Nature (London), 1935, **136**, 66; B. Pontecorvo. Ric. Scientifica, 1935, 6 (2), 145; E. Amaldi, E. Fermi. Ric. Scientifica, 1935, 6 (2), 344.

Таблица II

Пропускание медленных нейтронов, измеренное различными детекторами

Детектор	Поглотитель	
	Rh	Ag
Rh	54	67
Ag	68	45

Таблица III

Пропускание излучения, отфильтрованного слоем Cd толщиной 0,27 *г/см*²

Детектор	Поглотитель	
	Rh	Ag
Rh	33	84
Ag	88	29

поглощается кадмием, другая же — очень слабо. Учитывая, что при нашей геометрии нейтроны проходят через поглотитель наклонно (см. § 2), можно вычислить по каждой из этих кривых коэффициент поглощения той фракции, которая поглощается сильнее.

Таким путем было получено, что для кривой, измеренной с серебряным детектором, $K = 16$ *см*²/*г*, а в случае детектора из родия $K = 13{,}5$ *см*²/*г*. Коэффициент поглощения жесткой фракции наверняка меньше 1/100 от этих значений; так, например, для родиевого детектора было найдено, что $K = 0{,}05$ *см*²/*г*.

Из приведенных на рис. 3 кривых можно видеть, что активность нашего серебряного детектора наполовину обусловлена компонентой, сильно поглощаемой кадмием, и наполовину — жесткой фракцией. Для родиевого же детектора 72% полной активности вызвано мягкой компонентой, а остаток — жесткой. Таким образом, поглощение в кадмии дает возможность разделить медленные нейтроны, выходящие из парафинового блока, внутри которого находится нейтронный источник, на две фракции. Фракцию, сильно поглощаемую кадмием, впредь будем называть группой *C*. Более детально характеристики поглощения таких нейтронов будут обсуждаться в § 5.

Перейдем теперь к исследованиям свойств излучения, которое проходит сквозь слой кадмия, достаточный для полного поглощения группы *C*.

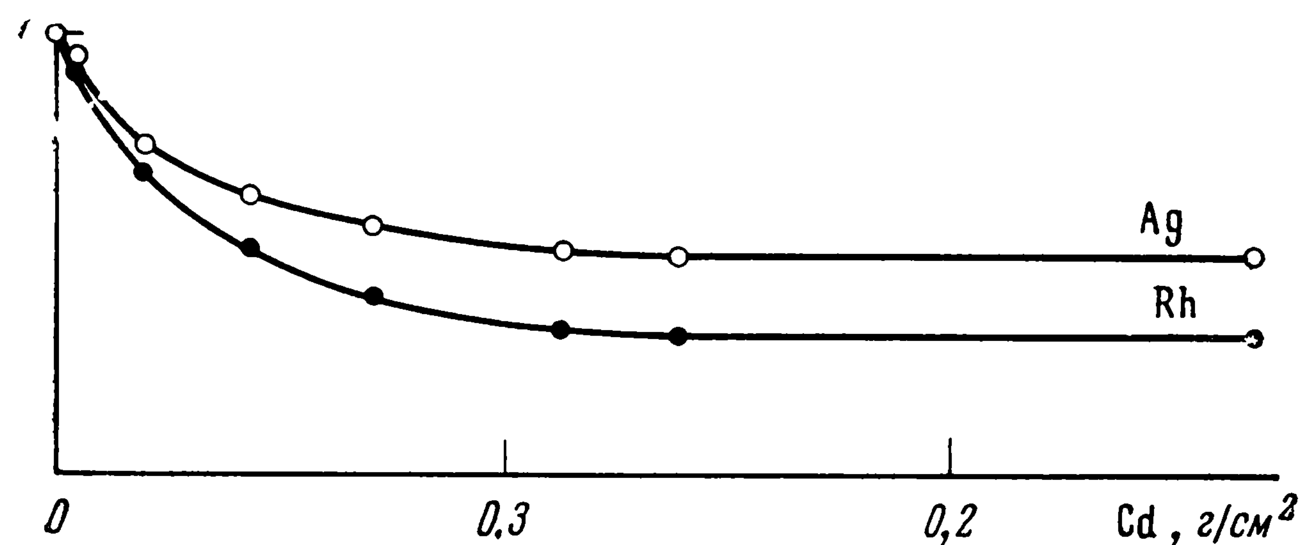


Рис. 3. Кривые поглощения для Cd, измеренные с помощью серебряного и родиевого детекторов

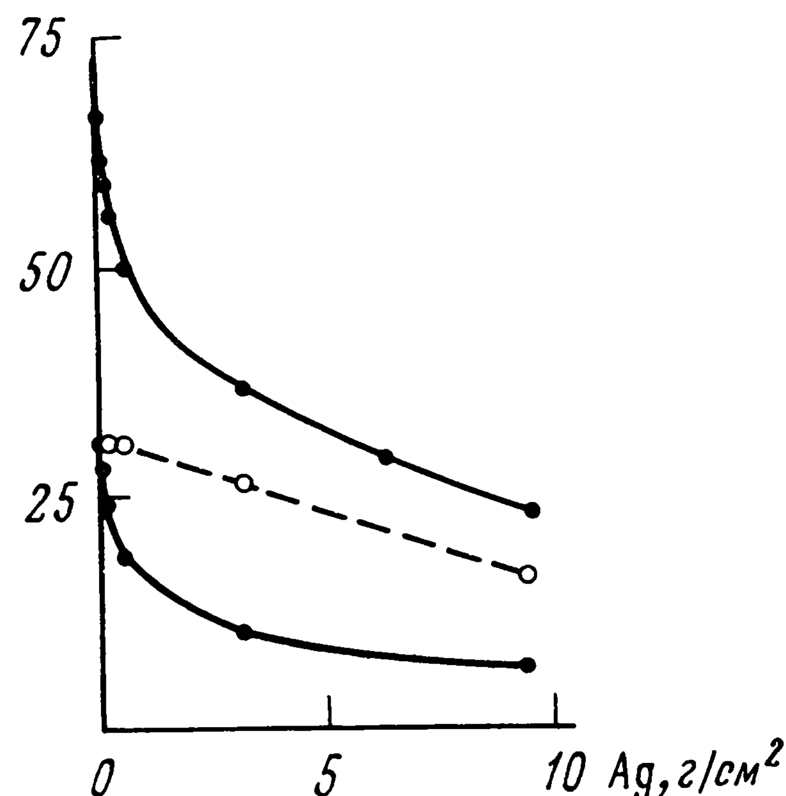


Рис. 4. Верхняя кривая: кривая поглощения для Ag, неотфильтрованное излучение; нижняя кривая: кривая поглощения для Ag, излучение отфильтровано слоем Cd 0,27 *г/см²*. По оси ординат отложена активируемость серебряного детектора; пунктиром указана разность верхней и нижней кривых

С этой целью мы повторили ряд опытов по поглощению нейтронов, прошедших сквозь кадмиевый фильтр 0,27 *г/см²*. В качестве поглотителей и детекторов использовались родий и серебро [11]. Примером экспериментальных результатов такого рода может служить табл. III, аналогичная табл. II; представленные в них данные были получены на одних и тех же детекторах и поглотителях.

Сравнение табл. II и III показывает усиление селективности в случае излучения, отфильтрованного кадмием; это говорит о негомогенности компоненты, слабо поглощаемой кадмием. Для дальнейшего излучения нейтронов, прошедших через кадмиевый фильтр, серебряным детектором (2,2 *г/28 см²*) была измерена кривая поглощения для серебра. Опыт проводился как с излучением, прошедшим сквозь 0,27 *г/см²* кадмия, так и с неотфильтрованными нейтронами. Соответствующие кривые даны на рис. 4, где по оси абсцисс отложена толщина серебряного поглотителя, а по оси ординат — активируемость детектора. Верхняя кривая относится к неотфильтрованному излучению, а нижняя — к нейтронам, прошедшим сквозь кадмиевый фильтр 0,27 *г/см²*.

Из этих двух кривых видно, что отвечающее за активность серебра излучение содержит компоненту, которая сильно поглощается в этом же веществе. Эта компонента с одинаковой интенсивностью представлена и в отфильтрованном, и в неотфильтрованном излучении, а это означает, что она не сильно поглощается кадмием. Мы будем называть ее группой *A*. Коэффициент поглощения нейтронов группы *A* в серебре составляет $K = 20$ *см²/г*.

Подобного характера кривые были, кроме того, обнаружены и с более толстым серебряным детектором. Однако в этом случае доля активности,

---

[11] E. Amaldi, E. Fermi. Ric. Scientifica, 1935, 6 (2), 344; L. Szilard. Nature, 1935, 136, 950.

обусловленной излучением, которое сильно поглощается в серебре, оказывается, естественно, меньшей, поскольку она достигает насыщения уже при толщине детектора менее 0,1 *мм*.

Пунктирная кривая на рис. 4 представляет собой разность двух других и описывает, следовательно, поведение той части активности серебра, которая поглощается 0,27 $г/см^2$ кадмия. Она является, таким образом, кривой поглощения серебра (с серебряным детектором), связанной только с нейтронами группы C. Отсюда для коэффициента поглощения нейтронов группы C в серебре получаем: $K = 0{,}3$ $см^2/г$.

4. Группы медленных нейтронов

На примерах предыдущего параграфа мы видели, что анализ кривых поглощения позволяет классифицировать медленные нейтроны по компонентам, которые в различных элементах поглощаются по-разному. Известно, что разложение кривых поглощения на экспоненты можно считать обоснованным лишь при очень высокой точности отдельных измерений; кроме того, расположение поглотителя и детектора относительно источника должно соответствовать условиям, которые допускают точный расчет. В нашем случае ни одно из этих условий строго не выполнялось, и поэтому мы стремились тщательно проверять гомогенность каждой компоненты. По этой причине мы ограничились описанием свойств, присущих приблизительно гомогенным группам нейтронов.

При переходе от группы к группе поведение нейтронов меняется столь заметно, что представляется возможным приписать каждой из них некоторую индивидуальность, несмотря на небольшую внутреннюю негомогенность. Подразделение на группы возможно благодаря следующим обстоятельствам:

а) для некоторых поглотителей наблюдаются очень большие различия в коэффициентах поглощения при переходе от одной группы к другой;

б) можно пользоваться разными поглотителями и детекторами, которые ведут себя совершенно по-разному;

в) имеется возможность фильтровать медленные нейтроны поглотителями для уменьшения их негомогенности.

Наиболее очевидное предположение о физической природе отличия одной группы от другой состоит в том, что оно обусловлено различием скоростей нейтронов. Внутри парафинового блока быстрые нейтроны, покинувшие источник, постепенно замедляются (благодаря последовательным столкновениям с атомами водорода) до тех пор, пока не достигнут энергии теплового движения. Поэтому в каждый момент времени в парафине имеются нейтроны всех скоростей — от энергии, соответствующей тепловому движению, до энергии, с которой они покидают источник. Подобным же образом нейтроны со всеми такими скоростями диффундируют из парафинового блока.

Все это позволяет думать, что различные группы соответствуют нейтронам разных энергетических интервалов. Селективность в поглощении следует объяснять нерегулярными изменениями коэффициента поглощения в зависимости от скорости нейтрона.

Возможность нерегулярной зависимости коэффициента поглощения от скорости нейтронов была обоснована в недавних исследованиях Бора, а также Брейта и Вигнера [12]. Мы вернемся к обсуждению физического происхождения нейтронных групп после того, как опишем опыты по поглощению, а также характеристики рассеяния нейтронов различных групп.

В предыдущем параграфе излучение, сильно поглощаемое кадмием ($K = 13{,}5$—16 *см²/г*), было названо группой C, а сильно поглощаемое в серебре ($K = 20$ *см²/г*) — группой A.

Кроме того, мы видели, что лишь 50% активности нашего серебряного детектора (0,057 *г/см²*) вызвано группой C; из оставшихся 50% около половины связано с группой A, тогда как остаток обусловлен излучением, которое слабо поглощается в кадмии и серебре (см. рис. 4). Это излучение было названо группой B; она, по всей вероятности, является сложной. До самого последнего времени нам не удалось разложить ее на приблизительно гомогенные компоненты, так как не были найдены вещества, способные поглощать группу B с высоким коэффициентом поглощения.

Как показано в предыдущем разделе, 72% активности нашего родиевого детектора (0,36 *г/см²*) вызвано группой C; остальные 28% образуют новую группу (названную нами группой D), которая очень слабо поглощается кадмием. При исследовании детектора из PbI_2 (19 *г/25 см²*, нормальная активируемость 11,4) мы обнаружили, что лишь около 25% его активности связано с группой C и менее 10% — с группой A. Остаток обусловлен компонентой, очень слабо поглощаемой во всех элементах, которые были изучены нами до сих пор, исключая иод. Это излучение, ответственное примерно за 70% активности нашего детектора, было названо группой I.

Фриш, Хевеши и Маккей [13] исследовали с помощью золотого детектора поглощение золота, используя отфильтрованные кадмием нейтроны; они получили кривую, аналогичную полученным нами кривым поглощения серебра с серебряным детектором (см. рис. 4). Мы попытались проанализировать активность золотого детектора (1,75 *г/25 см²*), прибегнув к уже упоминавшимся группам; было установлено, что активность золота отчасти связана с группами C, A и B. Однако большой коэффициент поглощения золота (с золотым детектором) обусловлен, видимо, излучением, отличным от всех предшествующих групп.

---

[12] N. Bohr. Nature (London), 1936, **137**, 344 (см. перевод: Н. Бор. Избранные научные труды, т. II. М., 1971— *Ред.*); G. Breit, E. Wigner. Phys Rev., 1936, **49**, 519.

[13] O. R. Frisch, G. Hevesy, H. A. C. McKay. Nature (London), 1936, **137**, 149.

5. Систематическое изучение поглощения

Группа C. Группа C известна лучше других благодаря тому, что вызывает бóльшую долю активности почти во всех детекторах. Существует много причин считать (см. § 13) эту группу состоящей в значительной степени из нейтронов, энергия которых соответствует энергии теплового движения. Поэтому ее будем часто называть тепловой группой. Исследование группы C особенно облегчается тем, что слой кадмия толщиной 0,3—0,4 *г/см*² практически полностью ее поглощает, не ослабляя заметно какую-либо другую группу. Чтобы узнать долю активности, обусловленную группой C, достаточно определить разность активностей, измеренных с кадмиевым фильтром указанной выше толщины и без него.

В табл. IV приводятся коэффициенты поглощения (в *см*²/*г*) C-нейтронов, измеренные различными детекторами (всегда определялась разность активностей, наблюдавшихся с кадмиевым фильтром и без него) и разными поглотителями. Следует отметить, что измеренные разными детекторами коэффициенты поглощения одного и того же элемента примерно одинаковы. Различия отчасти связаны с ошибками измерений, однако нам кажется, что они не объясняются одной только этой причиной.

Таблица IV

Коэффициенты поглощения в *см*²/*г* для нейтронов группы C (т. е. сильно поглощаемых в Cd)

Поглотитель	Rh	Ag	Cd	In	Ir	Au	Hg
Mn 2,5 *час*	0,9	0,3	—	—	—	—	—
Rh 44 *сек*	0,6	0,2	13,5	0,6	1,0	0,2	0,7
Ag 22 *сек*	0,7	0,3	16	—	0,9	0,25	0,9
In 54 *мин*	0,6	0,2	14	0,9	1,0	0,2	0,6
Ir 19 *час*	1,0	0,3	—	—	—	—	0,6

Тем не менее, если вспомнить большие различия коэффициентов поглощения нейтронов разных групп в каком-либо веществе, то можно сказать, что группе C действительно присуща значительная внутренняя гомогенность.

Группа D. Группу D легко наблюдать, пользуясь родиевым или индиевым детектором, причем оба эти элемента позволяют проводить точные измерения.

То обстоятельство, что D-группу можно выявить любым из этих двух детекторов, говорит о почти полном совпадении соответствующих полос поглощения; нет оснований, конечно, считать такое совпадение полным.

В § 9 можно будет увидеть, что среди всех изученных нами групп D-группа имеет наименьшую энергию, исключая группу C.

Как уже говорилось, группа D вызывает 28% активности наших родиевых детекторов. В индиевом детекторе 0,76 *г/9см*^{2} с D-группой связано 42% 54-минутной активности, а остальные 58% обусловлены группой C. Поэтому для изучения группы D достаточно воспользоваться одним из этих детекторов, отфильтровав нейтроны слоем кадмия 0,3—0,4 *г/см*^{2}, чтобы исключить C-группу. В табл. V даются некоторые коэффициенты поглощения D-нейтронов (в *см*^{2}*/г*).

Таблица V

Коэффициенты поглощения в *см*^{2}*/г* для нейтронов группы *D* (т. е. сильно поглощаемых в Rh)

Детектор	Поглотитель							
	B	Rh	Ag	Cd	In	Ir	Au	Hg
Rh 44 *сек*	4,7	2,0	0,06	0,05	3,0	1,0	0,03	0,07
In 54 *мин*	—	1,6	0,09	—	3,8	1,0	0,04	0,04

Группа A. Эта группа, характерная своим большим коэффициентом поглощения в серебре ($K = 20$ *см*^{2}*/г*), изучалась обычно с помощью тонкого серебряного детектора.

Как упоминалось выше, 25% нормальной активируемости серебряного детектора (0,057 *г/см*^{2}) обусловлено A-нейтронами. Для выделения этой группы нужно лишь определить разность активируемостей серебряного детектора, измеренных с серебряным фильтром и без него; этот фильтр должен быть достаточно толстым, чтобы полностью поглотить A-группу, но не слишком толстым во избежание заметного ослабления других групп. При измерениях C-группу удобно исключать посредством кадмиевого фильтра.

Группа A обнаруживается также и золотом; золотой детектор 1,535 *г/25 см*^{2} имеет нормальную активируемость 21, из которой 13% связано с группой A. Коэффициент поглощения этой группы в золоте составляет 4 *см*^{2}*/г*, а соответствующая величина для бора равна 3 *см*^{2}*/г*.

Относительно свойств других групп, упомянутых выше, известно немного. Мы выполнили ряд измерений коэффициентов поглощения, которые даются ниже:

группа B : бор	$K = 2,3$ *см*^{2}*/г*;	золото	$K = 1,7$ *см*^{2}*/г*
группа I : бор	$K = 1$ *см*^{2}*/г*;	иод	$K = 0,7$ *см*^{2}*/г*

Как мы уже видели, группа C почти всегда вызывает более 50% активности

различных детекторов, размещенных вне парафина, тогда как остальные группы обнаруживаются в меньшем числе детекторов и с ними связана меньшая доля активности.

Это вызвано не тем, что коэффициент поглощения разных элементов больше для нейтронов группы C, чем для нейтронов других групп; нам уже встречались многочисленные примеры обратного. Скорее этот факт связан с тем, что по выходе из парафина число нейтронов в группе C гораздо больше, чем в других группах.

По этой причине весьма важной величиной, характеризующей группу, является ее *численность* (numerosità). Для практических целей определим эту величину следующим образом: численность N_0 некоторой группы представляет собой число нейтронов, испускаемых в секунду через квадратный сантиметр, которое рассчитано на единицу нейтронной интенсивности источника; эта величина усредняется по площади 25 *см*^{2}, расположенной в центре верхнего торца парафинового блока (1), причем источник нейтронов (нейтронной интенсивности I) находится в парафине на расстоянии 3 *см* от центра верхнего торца.

Измерение численности группы основывалось на таком принципе: на центр блока (1) помещался тонкий детектор площадью s. Число бомбардирующих его нейтронов равно

$$N_0Is.$$

Обозначая через K коэффициент поглощения этого детектора и считая его толщину δ очень малой, можем получить число нейтронов, захваченных детектором:

$$\sqrt{3}N_0IsK\delta;$$

множитель $\sqrt{3}$ связан с наклонными прохождениями нейтронов, что учитывается согласно выражению (5).

Если обозначить через η эффективность ионизационной камеры, т. е. ионизационный ток, создаваемый одним распадом в секунду на поверхности камеры, то нормальная активируемость [см. равенство (3)] нашего детектора есть

$$A = 1000\sqrt{3}\,sN_0K\delta\,(K_1/K)\,(\eta/840\eta_U), \qquad (7)$$

где η_U — эффективность камеры к β-лучам уранового стандарта. Этот стандарт, о котором уже говорилось, соответствует 840 распадам в секунду на поверхности камеры.

Множитель K_1/K учитывает то обстоятельство, что некоторая часть захватов нейтронов данной группы в детекторе (с коэффициентом поглощения K) может приводить к образованию либо нерадиоактивных изотопов, либо радиоактивных, но с периодами полураспада, отличными от изучаемого. Через K_1 обозначен коэффициент поглощения, связанный только

с процессом, который приводит к изучаемой активности; ясно, что активность детектора определяет K_1, хотя поглощение нейтрона в нем определяется коэффициентом K.

Численность рассматриваемой группы находим из соотношения (7):

$$N_0 = 0{,}485\, \frac{\eta_U}{\eta} \frac{K}{K_1} \frac{A}{sK\delta}. \qquad (8)$$

Это выражение содержит величины A, s, K, δ, которые непосредственно измеряются на опыте. В большинстве случаев можно положить $K_1 = K$, а в тех случаях, когда изучаемый элемент обладает несколькими средними временами жизни, отношение их активируемостей с поправкой на поглощение β-лучей и на различные эффективности η позволяет оценить K/K_1.

Заметная ошибка в измерении N_0 обусловлена тем, что для камеры недостаточно хорошо известно отношение эффективностей регистрации β-лучей разной жесткости. Относительно малые изменения значений численности, рассчитанных для различных детекторов в предположении постоянства эффективности η, позволяют сделать вывод, что эта величина меняется в не очень широких пределах. В последующих расчетах всегда предполагалось $\eta = \eta_U$.

В табл. VI даны вычисленные для различных детекторов значения численности разных групп нейтронов; в качестве коэффициентов поглощения использовались усредненные данные из предыдущих таблиц. Приведенные в табл. VI значения вычислялись по формуле, аналогичной (8), в которой, однако, учитывалось поглощение нейтронов и электронов в детекторе. Была введена также малая поправка, учитывающая отражение электронов от верхних слоев детектора.

Таблица VI

Численность N_0 для различных групп нейтронов

Детектор	Группа				Детектор	Группа			
	C	*D*	*A*	*I*		*C*	*D*	*A*	*I*
Rh	43	9	—	—	I	—	—	—	5
Ag	51	—	0,6	—	Au	33	—	0,5	—
In	31	6	—	—					

Для индия данные были получены суммированием вкладов, создаваемых двумя периодами полураспада (16 *сек* и 54 *мин*), а слабая 4-часовая активность не учитывалась. Для родия и серебра вычисления были выполнены с учетом не только периодов 44 и 22 *сек*, но также и 4,2 и 2,3 *мин*.

Если попытаться рассчитать численность группы *C* по активности иридия (19 *час*), то получится значение, равное примерно 10; по нашему мнению, это значение было слишком малым, чтобы его можно было объяснить ошибками измерений. По этой причине мы попытались обнаружить другую достаточно сильную активность, чтобы объяснить найденное столь малое значение численности. И действительно, это подозрение оказалось вполне обоснованным, так как у иридия была обнаружена еще одна активность с периодом 68 дней. Ее активируемость (пока еще не измеренная) того же порядка величины, что и для 19-часового периода. Проникающая способность β-частиц этой новой активности очень мала.

Для элементов, у которых наблюдается два (и более) периода, связанные с медленными нейтронами, было бы весьма интересно выяснить, не обусловлены ли эти различные активности одними и теми же группами.

С этой целью исследовались следующие детекторы: родий (0,36 *г/см*^{2}; 44 *сек*, 4,2 *мин*), серебро (0,057 *г/см*^{2}; 22 *сек*, 2,3 *мин*), индий (0,065 *г/см*^{2}; 16 *сек*, 54 *мин*), бромистый натрий (1 *г/см*^{2}; 18 *мин*, 4,2 *час*). Для каждого из них проводилось сравнение активируемостей, измеренных для обоих периодов с соответствующими фильтрами и без них.

В случае родия это отношение активируемостей (периоды 44 *сек* и 4,2 *мин*) остается неизменным (около 10) вне зависимости от наличия или отсутствия кадмиевого фильтра, достаточного для поглощения *C*-группы [14]. Однако для серебра было обнаружено заметное различие в поведении двух периодов: для группы *C* активируемость большего периода составляет 24% от полной, для группы *B* — 19% и, наконец, для группы *A* — 3%, что в пределах экспериментальных ошибок может означать и нуль; можно утверждать, следовательно, что группа *A* характерна для 22-секундного периода серебра.

Процент активации обоих периодов индия под действием групп *C* и *D* приблизительно одинаков. Точно так же и для брома кадмиевый фильтр не изменяет заметным образом отношение активируемостей двух периодов.

Кроме того, заменив парафиновый цилиндр, на котором обычно проводились измерения, равным ему водяным и воспользовавшись детекторами из родия, серебра, иодистого свинца и надлежащими фильтрами, мы определили долю активации, вызываемую различными группами. Таким путем нам удалось показать, что отношения численностей различных групп одинаковы в воде и парафине. Абсолютные значения также не меняются заметно. Однако следует заметить, что отношения интенсивностей различных групп претерпевают изменение в зависимости от расстояния до источника; более детально это будет обсуждаться в § 9.

Наконец, мы попытались выяснить, воздействует ли на отношение интенсивностей различных групп применение разных источников быстрых нейтронов [15]. Для этого активируемость родиевого и серебряного детекто-

[14] E. Fermi, E. Amaldi. Ric. Scientifica, 1935, 6 (2), 443; E. Segrè. Ric. Scientifica, 1936, 7 (1), 389.

[15] E. Fermi, E. Amaldi. Ric. Scientifica, 1935, 6 (2), 443.

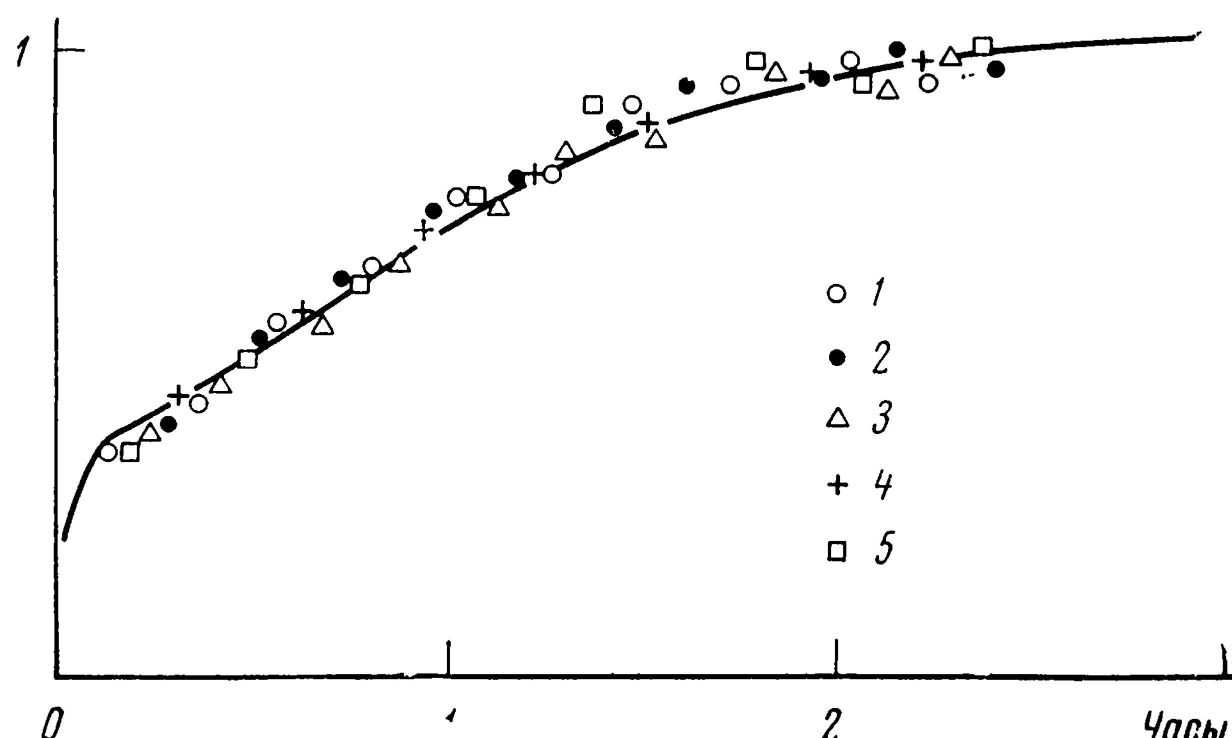


Рис. 5. Возрастание активности как функция времени

1 — Ag, поглотитель Ag 0,057 *г/см²*; 2 — Ag, поглотитель Cd 0,27 *г/см²*; 3 — Ag; 4 — Rh; 5— Rh, поглотитель Cd

ров определялась с кадмиевым и серебряным фильтрами и без них, причем использовался вновь приготовленный источник, в котором радий С еще не накопился. Возрастание активируемостей наблюдалось в ходе образования радия С. Ни для родия, ни для серебра не было замечено никакого изменения в соотношении групп при накоплении радия С, хотя активируемость возросла при этом от 40 (действие α-частиц Rn + RaA) до 100 (действие α-частиц Rn + RaA + RaC). На рис. 5 приведена кривая роста активности во времени. Следует отметить высокую эффективность образования нейтронов на бериллии под действием α-частиц радия С; она втрое больше, чем в случае Rn и RaA.

6. Альбедо

Измерения нормальной активируемости, а также и поглощения, о которых говорилось до сих пор, проводились снаружи парафинового блока. В этом разделе будут рассмотрены свойства нейтронов внутри парафина.

Детектор (родий 10 *г*/28 *см*^{2} или серебро 2,2 *г*/38,5 *см*^{2}) помещался в центре верхнего торца стандартного блока парафина (1), а сверху на него ставился такой же парафиновый цилиндр. Детектор можно было вставлять между надлежащими поглотителями.

Для того чтобы можно было быстро указывать относительное положение источника, парафина, детектора и поглотителей, удобно ввести следующие обозначения: S — источник, P — парафин, R — детектор, а символы Cd и Ag — кадмиевый (0,27 *г/см*^{2}) и серебряный (0,057 *г/см*^{2}) поглотители. Таким образом, S P Cd R Cd P означает такой опыт, когда над источником (S) имеется 3 *см* парафина (P), за ним — слой кадмия (Cd), детектор (R), второй слой кадмия (Cd) и, наконец, второй парафиновый цилиндр (P).

В табл. VII приведены активируемости обоих детекторов (серебра и родия), полученные в различных экспериментах. Сравнивая опыты S P R и S P R P, можно отметить сильное возрастание активности, вызываемое добавлением второго блока парафина. Столь значительное увеличе-

Таблица VII

Активируемость при различных расположениях
S — источник, P — парафин, Cd — кадмий, Ag — серебро, R — детектор

Расположение	Серебро	Родий	Расположение	Серебро	Родий
S P R	66,1	282	S P Cd R P	92,2	244
S P Cd R	32,2	80	S P R Cd P	113,1	371
S P Cd Ag R	17,5	78	S P Cd Ag R Ag Cd P	34,5	144
S P R P	417	1025	S P Cd Ag R Cd P	45,6	—
S P Cd R Cd P	66,5	140	S P Cd R Ag Cd P	54,8	—

ние связано с тем, что в отсутствие второго блока происходит утечка нейтронов — как быстрых, так и медленных,— тогда как в его присутствии нейтроны могут отражаться от этого блока обратно.

Помещая детектор между надлежащими поглотителями, можно разложить на группы излучение, вызывающее активацию. Так, например, сравнение опытов S P R P и S P Cd R Cd P показывает, что для серебряных детекторов доля активности (417—66,5)/417 = 0,84 обусловлена группой C, а в случае родия с этой группой связана доля (1025—140)/1025= = 0,86. Заметим, что внутри парафина отношение группы C к другим группам гораздо больше, чем снаружи; вскоре станет ясна причина такого поведения. Для того, чтобы проверить корректность разделения активности детектора по группам также и внутри парафина, толщина кадмиевых поглотителей в опыте S P Cd R Cd P была удвоена; активность при этом уменьшилась лишь очень незначительно. В опытах с серебряным детектором использование серебряных поглотителей наряду с кадмиевыми приводит к снижению активности наполовину (эксперименты S P Cd R Cd P и S P Cd Ag R Ag Cd P); этот факт показывает, что и внутри парафина можно говорить о группе A, интенсивно поглощаемой серебром. В соответствии с результатами, полученными вне парафина, добавление тонких серебряных поглотителей к кадмиевым не вызывает дальнейшего уменьшения активности родия.

Теперь займемся исследованием поведения группы C. Рассмотрим для этого результаты измерений S P R P, S P Cd R P, S P R Cd P, S P Cd R Cd P; последнее измерение показывает, какая часть активности не связана с группой C. Вычитая, следовательно, эту величину из результатов других трех измерений, получаем ту долю активности, которая обусловлена только группой C.

Разность между экспериментами S P Cd R P и S P R Cd P можно легко объяснить, если принять во внимание следующий факт: внутри парафина

плотность медленных нейтронов уменьшается с расстоянием от источника; таким образом, слой кадмия, экранирующий детектор со стороны источника, останавливает нейтронов больше, чем такой же слой, но расположенный с другой стороны. Среднее значение по этим двум опытам можно считать величиной, которая была бы получена при равномерном распределении плотности медленных нейтронов в парафине, когда детектор экранируется кадмием с одной стороны.

Таким образом, для серебряного детектора активируемость, связанная только с группой C, равна $A_c = 417 - 66{,}5 = 350{,}5$. Для случая, когда серебро экранируется слоем кадмия только с одной стороны, соответствующая величина составляет $B_c = (92{,}2 + 113{,}1)/2 - 66{,}5 = 36{,}1$.

Аналогичные значения для родия равны $A_c = 885$, $B_c = 167{,}5$. Отношение A_c/B_c составляет для серебра 9,7, а для родия 5,3.

Простое рассуждение позволяет понять смысл этого отношения. Обозначим через β вероятность того, что нейтрон, падающий на плоскую поверхность, которая ограничивает очень большой блок парафина, вновь выходит наружу, испытав несколько соударений в парафине.

Эту величину β, которая соответствует коэффициенту диффузного отражения медленных нейтронов от поверхности парафина, назовем *альбедо*. Фактически оно зависит от угла падения медленных нейтронов; причем, очевидно, альбедо тем меньше, чем меньше этот угол (см. F, § 5). Однако мы пренебрежем этой зависимостью в своем элементарном рассмотрении.

Вероятность захвата проходящего через детектор нейтрона обозначим через ζ; ее зависимость от угла падения также не будем учитывать.

Метод измерения альбедо основывается на сравнении активируемостей A_c и B_c, определение которых было дано выше.

Пусть $\mathfrak{N}$ есть число C-нейтронов, падающих на детектор группы C; детектор при этом полностью экранирован с одной стороны поглотителем C-нейтронов. Число захваченных детектором нейтронов равно $\mathfrak{N}\,\zeta$, а его активируемость B_c пропорциональна этой величине.

Теперь уберем поглотитель и вычислим увеличение активности детектора.

Прежде всего, нужно учесть то обстоятельство, что нейтроны могут попадать на него с обеих сторон; это дает множитель 2.

Однако гораздо большее увеличение обусловлено следующей причиной: если непосредственно за детектором поставить какую-либо фольгу, полностью поглощающую все нейтроны, то попадающий на детектор C-нейтрон проходит через него лишь один раз, и, значит, вероятность его захвата равна ζ; когда же поглотителя нет, нейтрон может пройти через детектор много раз.

В самом деле, вероятность захвата нейтрона при первом прохождении равна ζ, а вероятность его выхода из детектора есть $1 - \zeta$. Следовательно, вероятность того, что нейтрон вернется к детектору, равна $\beta\,(1 - \zeta)$, а вероятность того, что он поглотится в нем при вторичном прохождении,

равна $\beta(1-\zeta)\zeta$ и т. д. Таким образом, находим, что вероятность захвата есть

$$\zeta + \zeta\beta(1-\zeta) + \zeta\beta^2(1-\zeta)^2 + \ldots = \frac{\zeta}{1-\beta(1-\zeta)} = \frac{1}{1-\beta+\beta\zeta}.$$

Число захваченных нейтронов равно

$$2\mathfrak{N}\zeta/(1-\beta+\beta\zeta),$$

откуда получаем отношение A_c/B_c:

$$A_c/B_c = 2/(1-\beta+\beta\zeta). \quad (9)$$

При малых ζ, т. е. в случае очень тонкого детектора, это выражение сводится к

$$A_c/B_c = 2/(1-\beta). \quad (10)$$

Измерение отношения A_c/B_c позволяет тем самым определить альбедо β.

Для нашего серебряного детектора значение ζ очень мало, но не настолько, чтобы им можно было пренебречь. Его можно оценить по толщине и коэффициенту поглощения, учитывая наклонное прохождение нейтронов. Таким путем найдем, что $\zeta = 0{,}03$, откуда $\beta = 0{,}82$.

Родиевый детектор намного толще, и для него ζ составляет около 0,35; ясно, что малая ошибка в столь большом значении ζ приводит к большой ошибке в определении β. Поэтому для определения β нельзя пользоваться измерениями, выполненными с помощью родия, однако для этого детектора можно вычислить отношение A_c/B_c, если исходить из найденного в опытах с серебром значения альбедо. Получим $A_c/B_c = 4{,}3$, что удовлетворительно согласуется с экспериментальным значением 5,3.

Мы отмечали, что понятие альбедо — в том виде, в каком оно было нами введено,— определено не полно, поскольку процент отраженных поверхностью парафина нейтронов зависит от их углового распределения. Чтобы придать более четкий смысл понятию альбедо, можно определить β посредством равенства (10), справедливого в случае бесконечно тонкого детектора (экспериментальное альбедо; см. F, § 7).

Экспериментальное альбедо зависит от числа N свободных пробегов C-нейтрона, укладывающихся на том расстоянии, которое он в среднем проходит в парафине до захвата протонами. Можно показать [см. F, формула (63)], что эти величины связаны соотношением

$$\beta = 1 - 2/\sqrt{N}. \quad (11)$$

Это равенство справедливо в предположении, что энергия теплового движения мала по сравнению с квантом $h\nu$, соответствующим упругой связи атома водорода в парафине; в противном случае необходимо вводить малую поправку (см. § 13). Из равенства (11) при $\beta = 0{,}82$ находим $N = 124$.

Для определения альбедо нейтронов группы A был выполнен ряд опытов, аналогичных только что описанным. Использовался серебряный детектор 0,010 *г/см*^{2}, так что для группы A значение ζ было не слишком велико.

Поведение нейтронов групп A и C в этом аспекте совершенно различно: мы обнаружили, что альбедо группы A практически равно нулю. Этот факт не следует объяснять так, как будто A-нейтроны вообще не отражаются от парафина; скорее это говорит о таком изменении скорости при их отражении, что эти нейтроны больше уже не относятся к группе A.

Когда на детектор ставится второй блок парафина, то в силу малого альбедо для группы A активность за счет A-нейтронов возрастает только примерно вдвое, и это увеличение связано не с альбедо, а с тем, что нейтроны могут входить в детектор с обеих сторон.

Альбедо групп B, D и I также пренебрежимо мало. Из этого следует, что для всех групп, кроме C, изменение скорости нейтрона, обусловленное столкновением, оказывается, как правило, достаточным для его удаления из энергетической полосы, соответствующей данной группе (см. § 12).

Большая величина альбедо группы C по сравнению с другими группами является причиной того, что внутри парафина доля вызванной ею активации всегда гораздо выше, чем за его пределами.

Подобным же образом можно объяснить эксперименты Тилмана [16], наблюдавшего различное поведение целого ряда детекторов (расположенных на блоке парафина) в зависимости от толщины второго слоя парафина, который ставился на них сверху. Для детекторов, очень чувствительных к группе C, нужно ожидать довольно сильного роста активности; при объяснении этих опытов необходимо, конечно, принимать во внимание также и коэффициент ζ детектора, согласно равенству (9).

7. Диффузия нейтронов отдельной группы

Из результатов предыдущего параграфа можно сделать вывод, что нейтроны группы C проходят путь, состоящий из большого числа свободных пробегов. Поэтому их движение в парафине можно считать аналогичным диффузии, при условии, что учитывается убыль нейтронов вследствие поглощения протонами. Пусть N — среднее число свободных пробегов C-нейтрона, а λ — средняя длина его свободного пробега. Ясно, что нейтрон будет диффундировать на длине порядка величины $\lambda\sqrt{N}$; следовательно, диффузионные опыты дадут возможность определить ее [17]. Назовем величину

$$l = \lambda\,(N/3)^{1/2} \tag{12}$$

[16] J. R. Tillman. Nature (London), 1936, 137, 107.

[17] T. Bjerge, C. H. Westcott. Proc. Roy. Soc., 1935, A150, 709; E. Fermi, E. Amaldi. Ric. Scientifica, 1935, 6 (2), 443; 1936, 7 (1), 56.

длиной диффузии; ее значение можно получить непосредственно из опытов, которые сейчас будут описаны.

Пусть C-нейтрон находится в парафиновом блоке, ограниченном плоской поверхностью, на расстоянии x от нее.

В рамках теории диффузии можно показать (см. F, § 3), что вероятность ухода нейтрона из парафина до его захвата есть

$$p(x) = e^{-x/(D\tau)^{1/2}}, \tag{13}$$

где D — коэффициент диффузии тепловых нейтронов в парафине, а τ — их среднее время жизни относительно процесса захвата. В случае тепловых нейтронов кинетическая энергия мала по сравнению с квантом, частота которого отвечает упругой связи водорода в парафине. По этой причине будем считать атомы водорода фиксированными центрами изотропного рассеяния, а среднюю длину свободного пробега λ будем предполагать независящей от скорости нейтрона (см. F, § 10, 11). Эти допущения не вполне корректны, как станет ясно из детального обсуждения в § 13.

При изотропном рассеянии коэффициент D дается равенством

$$D = \frac{1}{3}\lambda v, \tag{14}$$

где v — средняя скорость нейтронов. Кроме того, имеем

$$N = v\tau/\lambda, \tag{15}$$

откуда

$$D\tau = \frac{1}{3}\lambda^2 N. \tag{16}$$

В итоге получаем [см. F, формула (34)]:

$$p(x) = e^{-x/(\lambda^2 N/3)^{1/2}} = e^{-x/l}. \tag{17}$$

Найдя вероятность $p(x)$, мы сможем определить l, а следовательно, и $\lambda^2 N$. Нахождение $p(x)$ основано на следующем. Пусть R — детектор группы C — достаточно велик и перекрывает всю плоскую поверхность большого парафинового блока, из которого выходят нейтроны. Допустим, что детектор поглощает все выходящие тепловые нейтроны на толщине, малой с точки зрения поглощения β-лучей. Его активность пропорциональна числу нейтронов, выходящих из парафина, и не зависит от их углового распределения. Если теперь на глубине x под поверхностью парафина уничтожить Q тепловых нейтронов, то активность детектора уменьшится на величину, пропорциональную $Qp(x)$; уничтожить их можно, поместив на глубине x поглотитель тепловых нейтронов. После этого мы сможем определить Q по величине активности, наведенной в поглотителе.

В этом опыте детектор помещался на парафиновый цилиндр диаметром 24 *см* и высотой 15 *см*, внутри которого находился источник — на расстоянии 3,5 *см* от центра верхнего торца. Верхняя часть цилиндра разрезалась на отдельные слои, чтобы поглотитель можно было вставлять в него на различных глубинах. В качестве детектора использовалась родиевая пластинка (10 *г*/28 *см*^{2}). Так как она закрывала лишь небольшую часть верхнего торца парафина, измерения проводились для девяти различных положений детектора, а результаты затем суммировались.

Поглотителем тепловых нейтронов служила пластинка сплава Cd — Sn с содержанием кадмия 0,019 *г/см*^{2}. Так как в кадмии малой толщины поглощаются только C-нейтроны, то уменьшение активности детектора связано только с C-нейтронами, что можно легко проверить. Мы не могли измерить непосредственно число поглощенных нейтронов Q, поскольку кадмий при поглощении не активируется; поэтому измерялась активность, наведенная в родиевой пластинке с таким же поглощением C-нейтронов, как и в кадмиевом поглотителе. Активность измерялась с обеих сторон этой пластинки, а результаты суммировались, так как нужно учесть, что нейтроны могут входить в нее с двух сторон (см. § 11).

Поглотитель располагался на расстояниях $x = 0, 1, 2, 3$ *см*. В табл. VIII

Таблица VIII

Данные для определения вероятности $p(x)$

x, *см*	Уменьшение активируемости	Q	Отношение	Исправленное отношение
0	89	358	0,249	0,207
1	139	1135	0,123	0,123
2	128	1580	0,081	0,081
3	98	1950	0,050	0,050

собраны результаты таких измерений. В первом столбце дается глубина, на которой находится поглотитель, во втором — уменьшение активируемости, связанное с наличием поглотителя; в третьем приведена сумма активируемостей эквивалентной поглотителю родиевой пластинки, измеренных с двух сторон только для группы C; в четвертом — отношение величин, стоящих во втором и третьем столбцах. В пятом столбце приведены значения этих отношений с поправкой на то, что наш детектор не удовлетворяет условию полного поглощения C-нейтронов на толщине, малой с точки зрения поглощения электронов (коэффициент поглощения электронов в родии составляет 7,3 *см*^{2}/*г*, нейтронов — 0,7 *см*^{2}/*г*; толщина 0,36 *г/см*^{2}). Отсюда следует, что наш детектор в большей степени чувствителен к прохождениям нейтронов с бо́льшим наклоном. В положении $x = 0$ поглоти-

тель более интенсивно захватывает те нейтроны, которые выходят под очень большими углами. В этом случае, следовательно, уменьшение активности относительно больше, чем при более глубоком расположении поглотителя, когда отсутствует связь между направлением вылета нейтронов и направлением их движения через поглотитель. Для учета этого обстоятельства нужно уменьшить величину отношения при $x = 0$, после чего его можно будет сравнивать с другими отношениями.

Количественные расчеты показывают, что в первое отношение нужно ввести поправочный множитель 0,832.

Приведенные в последнем столбце значения исправленных отношений пропорциональны $p(x)$; можно видеть, что с хорошей степенью точности они экспоненциально зависят от x. Обратная величина коэффициента в показателе представляет собой длину диффузии; таким образом, находим, что

$$l = 2{,}1 \ \textit{см}.$$

В соответствии с этим результатом и соотношением (12) получаем

$$\lambda^2 N = 13 \ \textit{см}^2.$$

Аналогичные опыты проводились также и для групп D и A. В случае группы D источник находился в парафиновом цилиндре (аналогичном применявшемуся в предыдущих опытах) в 3,4 *см* ниже центра верхнего торца. В опытах с нейтронами группы A это расстояние составляло 2,4 *см*.

Детекторами групп D и A служили соответственно индий (0,065 *г/см*^{2}) и серебро (0,057 *г/см*^{2}), которые экранировались кадмиевыми фильтрами толщиной около 0,5 *г/см*^{2}, а в качестве поглотителей использовались для группы A — родий (0,36 *г/см*^{2}) и для группы D — серебро (0,057 *г/см*^{2}).

Результаты этих измерений собраны в табл. IX; в первом столбце указана глубина x, на которой находится поглотитель, во втором и пятом — уменьшение активируемости детекторов для групп D и A. В третьем столбце дается сумма активируемостей, измеренных на разной глубине с обеих сторон экранированного кадмием родиевого поглотителя, когда регистрируется только активность, которая обусловлена группой D; шестой столбец содержит аналогичные данные для серебряных поглотителей группы A. В четвертом и седьмом столбцах приведены активируемости поглотителя, измеренные на его нижней стороне и связанные только с нейтронами групп D или A, которые входят в поглотитель с этой стороны (относительно методики постановки таких измерений см. § 11). Числа, заключенные в скобки (в последнем столбце), получены интерполяцией с помощью некоторых результатов, которые аналогичны упомянутым в § 11.

Малое значение альбедо групп D и A позволило нам в предыдущем разделе сделать вывод, согласно которому нейтроны этих двух групп остаются таковыми лишь на одной длине свободного пробега. По этой причине

Таблица IX

Данные для нейтронов групп D и A

x, *см*	Группа D			Группа A		
	Уменьшение активируемости	Активируемость поглотителя	Активируемость на нижней стороне поглотителя	Уменьшение активируемости	Активируемость поглотителя	Активируемость на нижней стороне поглотителя
0	12,0	102	68	15,3	27,3	17,4
0,16	9,6	105	71	11,6	31,2	(18)
0,34	6,4	124	75	8,3	34,6	(19)
0,87	2,7	173	93	3,8	51,5	(22)
1,87	0,5	244	101	0,5	61,5	23,1

группы D и A нельзя рассматривать в рамках теории диффузии. Тем не менее результаты измерений для групп D и A интересно обработать тем же методом, что и в случае группы C. С этой целью изучались (в зависимости от x) отношения величин, стоящих во втором и третьем, а также в пятом и шестом столбцах. Оказалось, что оба отношения с хорошей точностью убывают экспоненциально, и в обоих случаях обратная величина коэффициента в показателе равна 0,42 *см*. Следует отметить тождественное поведение этих групп в противоположность совершенно иному поведению C-нейтронов.

Более правильной, однако, была бы обработка данных табл. IX в крайнем предположении, что нейтроны групп D и A проходят всего лишь один свободный пробег. После этого можно получить среднюю длину свободного пробега нейтронов этих двух групп; если же такое предположение неверно, то значения, которые мы получим, будут представлять лишь верхние пределы средней длины свободного пробега.

Сравним активности детектора группы D, измеренные с поглотителем и без него (поглотитель на глубине x). Обе активности являются суммой двух членов: a) активность, обусловленная D-нейтронами, которые не пересекали плоскость на глубине x, и b) активность, связанная с D-нейтронами, которые эту плоскость пересекли.

Из нашего допущения, согласно которому D-нейтроны проходят всего один свободный пробег, следует, что все нейтроны, дающие вклад в долю активности «b», пересекли плоскость x снизу. Слагаемое «a» не меняется при постановке поглотителя на глубине x, тогда как слагаемое «b» при этом уменьшается. Это означает, что полное уменьшение активности есть уменьшение только слагаемого «b». В этих рассуждениях мы будем для простоты называть D-нейтроны, которые попадают на плоскость x снизу, нейтронами класса b.

Приведенную во втором столбце табл. IX убыль активности детектора можно, следовательно, вычислить, если учесть одни только нейтроны класса b. Как следует из нашего предположения, слой парафина толщиной x, который нейтроны класса b должны пройти прежде, чем достигнут детектора, следует считать поглощающим (но не рассеивающим) с коэффициентом поглощения $1/\lambda_D$.

Поэтому когда поглотитель отсутствует, активность детектора, обусловленная только нейтронами класса b, пропорциональна

$$N_b c\,(x/\lambda_D),$$

где N_b — число нейтронов класса b, а c — функция, определяемая выражением (6) (кривая поглощения, учитывающая наклонные прохождения нейтронов).

Мы неявно предположили независимость углового распределения нейтронов класса b от глубины x. На самом деле такое допущение не вполне корректно; однако мы считаем, что оно не внесет заметной ошибки.

Если же на глубине x находится поглотитель, то активность детектора, обусловленная одними нейтронами класса b, пропорциональна

$$N_b c\left(\frac{x}{\lambda_D} + K_D\delta\right),$$

где δ — толщина поглотителя, а K_D — его коэффициент поглощения D-нейтронов. Таким образом, разность этих активностей пропорциональна

$$N_b\left\{c\left(\frac{x}{\lambda_D}\right) - c\left(\frac{x}{\lambda_D} + K_D\delta\right)\right\}.$$

Это выражение соответствует данным, помещенным во втором столбце табл. IX.

В четвертом столбце приведены значения активируемости поглотителя, связанной только с нейтронами класса b; очевидно, что она пропорциональна N_b (см. § 11). Это означает, что отношения величин, стоящих во втором и четвертом столбцах, пропорциональны

$$c\left(\frac{x}{\lambda_D}\right) - c\left(\frac{x}{\lambda_D} + K_D\delta\right). \tag{18}$$

Для нашего родиевого поглотителя $K_D = 1{,}8$ *см*^{2}/*г*; $\delta = 0{,}36$ *г/см*^{2}, так что $K_D\delta = 0{,}65$. Аналогичная аргументация справедлива и для группы A ($K_A = 20$ *см*^{2}/*г*; $\delta = 0{,}057$ *г/см*^{2}).

На рис. 6 построены кривые (18) для групп A и D, причем при $x = 0$ их значения приняты за 100; экспериментальные отношения величин, стоящих во втором и четвертом столбцах табл. IX, представлены точками. Абсциссы вычислялись в предположении $\lambda_D = \lambda_A = 1{,}1$ *см*.

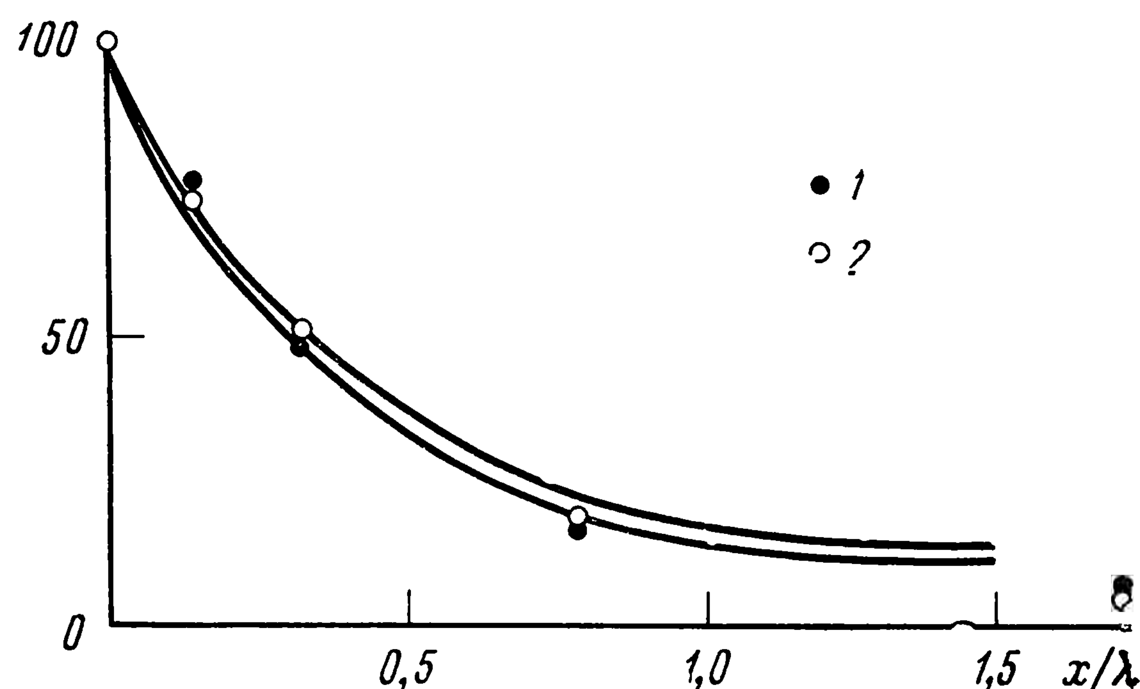


Рис. 6. Отношение активностей [выражение (18)]

Точки — экспериментальные значения (1 — группа D; 2 — группа A) $\lambda_A = \lambda_D = 1{,}1$ *см*

Поэтому представляется, что нейтроны этих двух групп имеют одинаковую среднюю длину свободного пробега, немного большую 1 *см*. Мы уже отмечали, что этот метод опирается на предположение, согласно которому нейтроны этих групп проходят в среднем только один свободный пробег. Для группы A такое допущение вполне правдоподобно, однако для группы D оно более сомнительно (см. § 12). Тем не менее тот факт, что найденные значения λ_D и λ_A приблизительно одинаковы, можно рассматривать как аргумент в пользу справедливости такого предположения.

8. Средняя длина свободного пробега тепловых нейтронов

В предыдущих разделах было найдено значение средней длины свободного пробега для групп D и A. Оно получено в предположении, что нейтроны этих групп проходят всего один средний свободный пробег (см. § 12).

Для проверки этого предположения можно было бы непосредственно измерить среднюю длину свободного пробега нейтронов этих групп. До сих пор нам не удалось поставить подобный опыт из-за малой интенсивности. Однако мы были в состоянии непосредственно измерить среднюю длину свободного пробега λ тепловых нейтронов в парафине.

Этот результат в совокупности с измеренным значением $\lambda^2 N$ (см. предыдущий раздел) позволяет вычислить среднее число N свободных пробегов теплового нейтрона. Вспомним, что измерения альбедо тоже позволяют вычислить значение N (см. § 6).

Длину среднего свободного пробега λ можно измерить, воспользовавшись источником и детектором тепловых нейтронов, разнесенными на расстояние, как можно большее по сравнению с их размерами, и устанавливая между ними различной толщины парафин, размеры которого достаточны для того, чтобы как раз заэкранировать детектор от источника. В условиях идеальной геометрии, когда пренебрежимо малы телесные углы, под которыми детектор виден от источника и источник от детектора, актив-

ность последнего будет пропорциональна $e^{-x/\lambda}$, где x — толщина рассеивающего парафина. В действительности же мы были весьма далеки от таких идеальных условий (во избежание слишком малой интенсивности), и поэтому в полученные результаты необходимо вводить поправку, учитывающую несовершенство геометрии.

Постановка опытов была следующей.

Источник. Источник Rn + Be находился в парафиновом цилиндре диаметром 12 *см* и высотой 13 *см* на расстоянии 2 *см* от центра верхнего торца. Цилиндр полностью покрывался слоем кадмия толщиной 0,5 *г/см*^{2}, в котором над серединой верхнего торца было прорезано окошко $5 \times 5{,}5$ *см*^{2}; его можно было открывать и закрывать. Измерив активность детектора медленных нейтронов, помещенного снаружи парафинового блока один раз с открытым окошком, а другой — с закрытым, и взяв их разность, мы получим ту долю активности, которая связана только с C-нейтронами, выходящими через это окошко. Эта разность, таким образом, эквивалентна активности, которая возникла бы под действием источника одних только C-нейтронов, причем размеры и положение этого источника таковы же, что и у окошка. В этом смысле мы будем говорить в следующих разделах об источнике C-нейтронов или просто о C-источнике.

Детектор. Чтобы можно было создать достаточно хорошую геометрию при достаточной интенсивности, мы изготовили [18] несколько небольших цилиндрических ионизационных камер длиной 10 и внутренним диаметром 3,5 *см*; камеры наполнялись кислородом под давлением 75 *атм*. Облучаемый элемент (Rh, 0,125 *г/см*^{2}) в виде полоски, свернутой в трубку длиной 5 *см* и диаметром 3,5 *см*, помещался внутрь камеры и служил одним из электродов, на который подавалось высокое напряжение. Вторым электродом, соединенным с электрометром, был металлический стержень, располагавшийся вдоль оси камеры. Толщина стальной стенки камеры составляла 4 *мм*, так что медленные нейтроны, которые могли попасть на детектор, практически не поглощались.

По сравнению с методами, которые применялись нами до сих пор, такое устройство обладает тем преимуществом, что благодаря высокому давлению почти вся энергия β-лучей выделяется внутри камеры; кроме того, электрод обладает большой полезной поверхностью, и геометрические условия оказываются хорошими. В такой постановке можно получить почти такую же чувствительность измерений, как и в опытах со счетчиками, но при большей стабильности, присущей ионизационным камерам.

Соединенная с электрометром камера облучалась в течение 2 *мин*; затем мы измеряли число делений шкалы, которое было пройдено за 2 *мин*, начиная отсчет спустя 15 *сек* после удаления источника.

Было проведено две серии измерений. В первой из них расстояние C-источника до оси ионизационной камеры равнялось 20 *см*, во вто-

---

[18] E. Amaldi, E. Fermi. Ric. Scientifica, 1936, **7** (1), 393.

Таблица X

Измерения активности для парафина различной толщины x и при детекторе в 10 и 20 *см* от источника

x, *см*	20 *см*		10 *см*		x	20 *см*		10 *см*	
	без Cd	с Cd	без Cd	с Cd		без Cd	с Cd	без Cd	с Cd
0	45,1	23,6	175	92,5	0,203	29,9	19,3	140,5	87
0,047	40,5	22,1	162	89,5	0,38	24,8	17,8	127	86
0,099	36,8	21,7	158	90	0,68	21,2	16,7	116,7	87

рой — 10 *см*. В обеих сериях парафиновые рассеиватели помещались посередине между C-источником и детектором. Во избежание эффектов вторичного рассеяния ионизационная камера и весь промежуток между источником и детектором экранировались слоем кадмия 0,5 *г/см*^{2}.

В табл. X приведены в произвольных единицах результаты обеих серий опытов (каждое значение есть среднее по трем отсчетам); ошибка составляет около одной единицы.

В первом столбце указаны толщины парафиновых рассеивателей (плотность 0,9) в сантиметрах; во втором и третьем — активности, измеренные на расстоянии 20 *см* при открытом и закрытом окошке в кадмии. Как уже говорилось выше, активность, обусловленная только C-нейтронами, выходящими из окошка, есть разность этих двух значений. Четвертый и пятый столбцы аналогичны двум предыдущим с той лишь разницей, что расстояние между источником и детектором составляет 10 *см*.

Чтобы из этих опытов получить величину средней длины свободного пробега тепловых нейтронов, необходимо учесть поправки на несовершенство геометрии; они особенно велики в опытах при расстоянии 10 *см*. Вычисление таких поправок для толстых рассеивателей довольно ненадежно, однако в случае тонких рассеивателей можно получить довольно точную оценку для поправки.

Для расстояния 20 *см* и тонкого рассеивателя поправка вычислялась следующим образом. Площадь сечения детектора составляла 17,5, а рассеивателя—22,3 *см*^{2}; некоторая часть попавших на детектор нейтронов не испытывала столкновений в рассеивателе, а другая часть рассеивалась один раз (случаем многократного рассеяния можно пренебречь при малых толщинах x рассеивателя).

Число первых пропорционально, очевидно, площади детектора (17,5 *см*^{2}) и вероятности того, что нейтрон не испытывает столкновения в рассеивателе ($e^{-x/\lambda}$). При малых x число таких нейтронов пропорционально

$$17{,}5(1 - x/\lambda).$$

Малым эффектом, связанным с наклонными прохождениями нейтронов через рассеиватель, можно пренебречь.

С другой стороны, число нейтронов, падающих на рассеиватель, пропорционально учетверенной площади последнего, так как он расположен к источнику вдвое ближе детектора. Оно пропорционально, таким образом,

$$4 \cdot 22{,}3 = 89{,}2.$$

Доля этих нейтронов, равная x/λ, испытает столкновения в рассеивателе. Считая рассеяние C-нейтронов водородом в парафине изотропным (см. § 13 и F, § 10 и 11), находим, что доля рассеянных нейтронов, попадающих на детектор, равна отношению площадей детектора и сферы, радиус которой равен расстоянию (10 *см*) между рассеивателем и детектором.

Следовательно, полное число рассеянных нейтронов, достигших детектора, пропорционально

$$89{,}2 \cdot (x/\lambda) \cdot (17{,}5/4\pi \cdot 10^2).$$

Складывая это число с количеством нейтронов, которые падают на детектор, не испытав соударений в рассеивателе, получаем в зависимости от x полное число нейтронов, попадающих на детектор. Оно пропорционально

$$17{,}5\ [1 - 0{,}929\,(x/\lambda) + \ldots].$$

Отсюда, принимая за 1 активность при $x = 0$, получаем активность детектора как функцию толщины рассеивателя x:

$$1 - 0{,}929\ (x/\lambda) + \ldots.$$

Из этого соотношения следует, что касательная к кривой диффузии для $x = 0$ пересекает ось абсцисс в точке

$$x_1 = (\lambda/0{,}929)\ \textit{см}.$$

Методом секущих из экспериментального графика была найдена касательная при $x = 0$; при этом ось абсцисс пересекается в точке

$$x_1 = 0{,}29\ \textit{см}.$$

Таким образом, получаем

$$\lambda = 0{,}29 \cdot 0{,}929 = 0{,}27\ \textit{см}.$$

Кроме того, мы убедились в том, что для толстого рассеивателя также можно привести в соответствие всю экспериментальную кривую рассеяния с вычисленной (расчеты, детали которых не приводятся, были выполнены с помощью методов, изложенных в F, § 5).

Вычисление поправок в тех опытах, когда расстояние между источником и детектором было 10 *см*, несколько сложнее, поскольку в этом случае нельзя пренебречь наклонными прохождениями нейтронов. В результате численного расчета была получена форма кривой рассеяния

на начальном участке

$$1 - 0{,}84\,(x/\lambda) + \ldots.$$

Как и раньше, из экспериментальной кривой было найдено, что

$$x_1 = 0{,}4\ \text{см},$$

т. е. эти измерения дают

$$\lambda = 0{,}84 \cdot 0{,}4 = 0{,}34\ \text{см}.$$

Комбинация двух измерений дает для наиболее вероятного значения средней длины свободного пробега тепловых нейтронов (см. § 13)

$$\lambda = 0{,}3\ \text{см}.$$

9. Поведение группы в зависимости от расстояния до источника; отношение энергий

В одной из предыдущих работ мы измерили [19] в баке с водой активность родиевого детектора как функцию расстояния до источника. Полученные в ней результаты соответствуют совместному действию групп C и D, которые эффективно активируют родий. Ясно, что было бы интересно исследовать по отдельности поведение каждой группы в зависимости от расстояния до источника.

Измерения проводились в цилиндрическом баке с водой, высота которого 95 *см*, диаметр 90 *см*. Детектором групп C и D служил родий (0,36 $г/см^2$, площадь 5 × 5,5 $см^2$); будучи экранирован кадмием 0,5 $г/см^2$, он чувствителен только к D-нейтронам, а разность активностей, измеренных без кадмия и с кадмием, обусловлена одной только группой C. Для регистрации групп $A + B$, которые порознь не изучались, использовался экранированный кадмием серебряный детектор (0,057 $г/см^2$, площадь 5 × 5 $см^2$). Наконец, исследование группы I проводилось детектором из PbI_2 (в кадмиевом экране) площадью 5 × 5 $см^2$ и толщиной 0,68 $г/см^2$.

Активности детекторов измерялись с обеих сторон на разных расстояниях от источника; сумма этих двух активностей пропорциональна числу нейтронов различных групп, попадающих на детектор (см. § 11).

Чтобы ошибки, связанные с конечными размерами бака, были доведены до минимума, измерения проводились так, что середина расстояния между источником и детектором совпадала с центром водяного цилиндра.

Размеры наших детекторов, а также ампулы, в которых содержался Rn+Be, не были достаточно малы для того, чтобы расстояние между центрами источника и детекторов можно было считать равным расстоянию между этими объектами, особенно при малых расстояниях. По этой при-

[19] E. Amaldi, O. D'Agostino, E. Fermi, B. Pontecorvo, F. Rasetti, E. Segrè. Proc. Roy. Soc., 1935, A149, 522. (Статья 69.)

чине мы пользовались усредненными расстояниями. Экспериментальные результаты, полученные для групп C, D, $A+B$ и I, приведены в табл. XI—XIV.

Приведенные в этих таблицах цифры представляют собой суммы активностей, измеренных на обеих сторонах детектора. Данные для групп C, D и $A+B$ являются усреднением по трем сериям измерений (для каждой стороны); для группы I была выполнена только одна серия измерений (для каждой стороны), поскольку период полураспада иода достаточно велик, чтобы обеспечить удовлетворительную точность результатов.

На рис. 7 значения активности, умноженные на r^2 (r — расстояние до источника), отложены в зависимости от r. Данные взяты из табл. XI—XIV; масштаб оси ординат таков, что площади под всеми четырьмя кривыми одинаковы.

Точность этих измерений достаточно высока и позволяет разделить кривые D, $A+B$ и I несмотря на то, что различия между ними малы.

Таблица XI

Группа C (разница в активности родиевого детектора, защищенного и незащищенного кадмием)

r, *см*	2,5	3,6	5,4	7,3	10,2	15,1	20,1	25	30	35	40
Активность	2121	1898	1441	1006	523	167	58	23	9	3,3	1,7

Таблица XII

Группа D (родиевый детектор, защищенный кадмием)

r, *см*	2,5	3,6	5,4	7,3	10,2	15,1	20,1
Активность	306	252	166	96	40	10,6	3,8

Таблица XIII

Группа $A+B$ (серебряный детектор, защищенный кадмием)

r, *см*	2,5	3,6	5,4	7,3	10,2	15,1
Активность	144	119	73	39,6	15,7	4,3

Таблица XIV

Группа I (детектор PbI_2, защищенный кадмием)

r, *см*	2,62	3,36	5,1	7,0	9,9
Активность	24,9	19,7	12,0	6,28	2,49

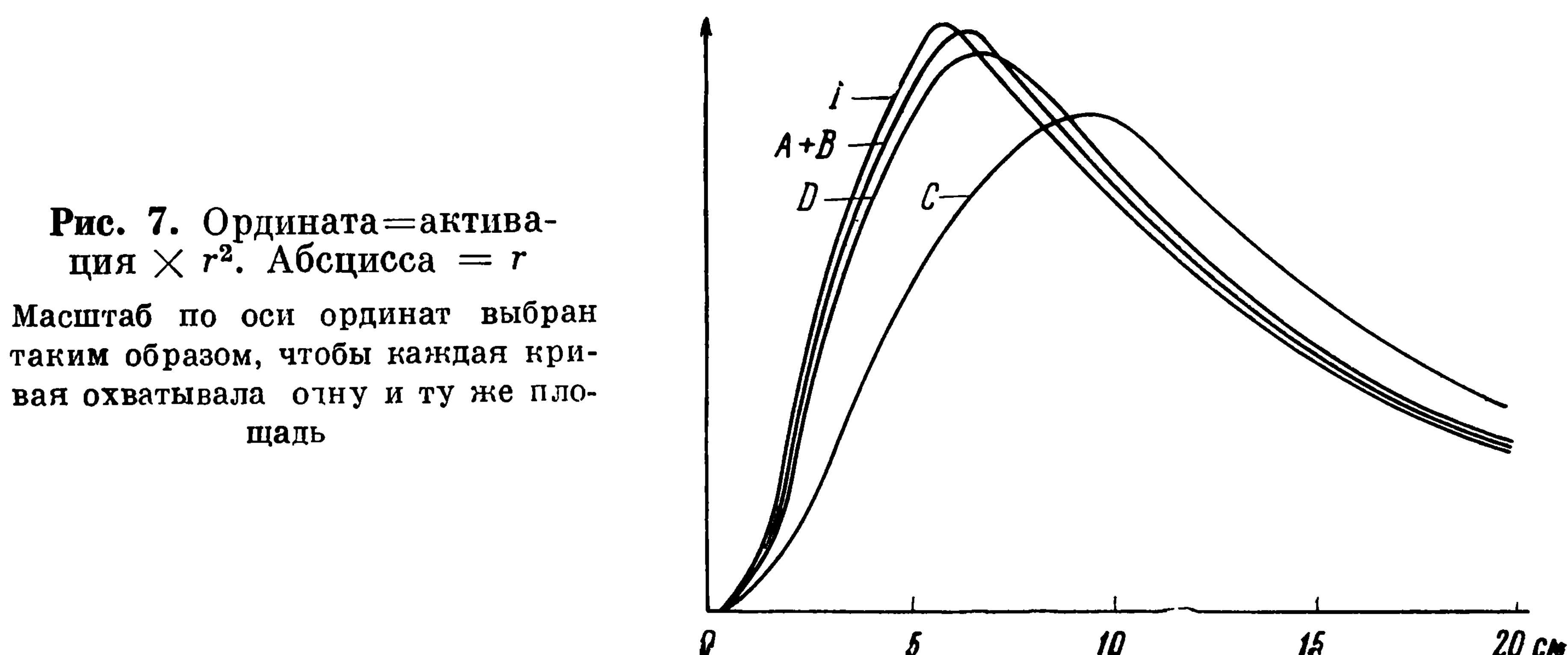


Рис. 7. Ордината=активация $\times$ r^2. Абсцисса $= r$

Масштаб по оси ординат выбран таким образом, чтобы каждая кривая охватывала одну и ту же площадь

Из этих кривых видно, что обусловленная различными группами активность уменьшается с ростом r, подчиняясь разным законам. По темпу убывания группы стоят в таком порядке: $C, D, A + B, I$. Этот факт позволяет расположить группы в порядке возрастания энергии. Заметим, что нейтроны меньшей энергии после своего испускания испытали в среднем большее число столкновений, чем нейтроны с большей энергией. С другой стороны, испытавшие большее число соударений нейтроны продиффундируют в среднем на большее расстояние от источника. Отсюда следует, что группы, интенсивность которых убывает быстрее всего с ростом r, характеризуются наибольшей энергией. Поэтому порядок возрастания энергии у изученных нами групп таков:

$$C, D, A + B, I.$$

На количественной основе эти рассуждения можно провести следующим образом. Среднее значение квадратов расстояний нейтронов различных групп до источника, $(r^2)_{\text{ср}}$, является удобным параметром для описания быстроты затухания групп в зависимости от расстояния. Эта величина вычислялась для каждой группы с помощью соотношения

$$\int\limits_0^\infty f(r)\, r^2 dr \Big/ \int\limits_0^\infty f(r)\, dr,$$

где $f(r)$ — кривая на рис. 7, относящаяся к рассматриваемой группе. Значения $(r^2)_{\text{ср}}$ даны в табл. XV.

Таблица XV

Средние значения r^2

Группа	C	D	$A+B$	I
$(r^2)_{\text{ср}}$, *см*^{2}	326,7	276,6	270,6	262,2

Нам не удалось измерить интенсивность групп D, $A + B$ и I на больших расстояниях, хотя кривые активностей как функций расстояния были измерены очень точно. Поэтому при вычислении $(r^2)_{ср}$ пришлось экстраполировать эти интенсивности на большие расстояния. Это представляется достаточно обоснованным, поскольку на таких расстояниях все группы убывают вполне одинаковым образом, так что концевые части кривых на рис. 7 можно удовлетворительно представить экспонентой с коэффициентом в показателе 0,106 *см*$^{-1}$.

Тем не менее подобная экстраполяция может привести к значительной ошибке.

Можно показать (см. F, § 2), что для групп с энергиями, превышающими энергию кванта $h\nu$ упругой связи водорода в парафине (практически для групп с энергиями выше 1 *эв*), имеет место равенство

$$\ln\frac{W''}{W'} = \frac{(r'^2)_{ср} - (r''^2)_{ср}}{6\lambda_g^2}\,. \tag{19}$$

Оно связывает отношение W''/W' соответствующих энергий с разностью средних квадратичных расстояний для двух групп $(r'^2)_{ср} - (r''^2)_{ср}$, причем λ_g — средняя длина свободного пробега нейтронов обеих групп в парафине. Было сделано допущение, согласно которому λ_g одинакова для обеих групп (см. § 7).

Предыдущее равенство качественно легко понять, если бы не численный множитель в знаменателе. Слева стоит среднее число столкновений, необходимое для уменьшения энергии от W'' до W'. Далее, среднее квадратичное смещение нейтрона на длине свободного пробега равно $2\lambda_g^2$ (множитель 2 появляется вследствие усреднения квадрата, вместо возведения в квадрат среднего). Если ориентации последовательных свободных пробегов были бы нескоррелированы между собой, то при каждом соударении $(r^2)_{ср}$ увеличивался бы на $2\lambda_g^2$, а при числе столкновений, равном $\ln W''/W'$, $(r^2)_{ср}$ возросло бы на $2\lambda_g^2 \ln W''/W'$; такое предположение привело бы затем к формуле, аналогичной (19), но с множителем 2, а не 6 в знаменателе. Множитель 6 возникает благодаря учету коррелированности направлений следующих друг за другом свободных пробегов, а также и учету флуктуаций числа соударений, необходимого для уменьшения энергии от W'' до W'.

Выражением (19) можно воспользоваться для определения отношения энергий двух групп (за исключением группы C, для которой эта формула несправедлива). Однако нужно заметить, что точность подобного метода очень низка, так как малые ошибки в λ_g и $(r^2)_{ср}$ сильно влияют на отношение W''/W'.

Поскольку $(r^2)_{ср}$ измерялось в воде, а не в парафине, для λ_g нужно будет подставить среднюю длину свободного пробега в воде; ее можно получить из соответствующего значения для парафина (1,1 *см* для нетепловых ней-

тронов, см. § 7), предполагая, что длина среднего свободного пробега обратно пропорциональна концентрации водорода. Таким путем получим, что $\lambda_g = 1{,}27$ *см.*

Принимая это значение, с помощью выражения (19) находим, что разность средних квадратичных расстояний $(r^2)_{\text{ср}}$, соответствующая отношению энергий e, равна $6\lambda_g^2 = 9{,}7$ *см*².

Из табл. XV получаем следующие отношения энергий групп I, $A+B$ и D:

$$W_I : W_{A+B} : W_D = 4{,}4 : 1{,}85 : 1.$$

Выше уже говорилось, что ошибки этих отношений могут быть весьма велики. Поэтому, может быть, целесообразнее получить из соотношения (19) значения средней длины свободного пробега в воде, предполагая, что энергия группы обратно пропорциональна квадрату ее коэффициента поглощения бором [20] (см. также § 13). Взяв для бора коэффициенты поглощения

$$K_I = 1, \quad K_B = 2{,}3, \quad K_A = 3, \quad K_D = 4{,}7, \quad K_C = 38 \text{ см}^2/г,$$

получим следующие отношения энергий:

$$W_I : W_B : W_A : W_D : W_C = 1440 : 270 : 160 : 65 : 1.$$

Принимая [21] $W_C = kT = 0{,}025$ *эв*, получаем

$$W_I = 36, \quad W_B = 7, \quad W_A = 4, \quad W_D = 1{,}6 \text{ эв}.$$

Из этих значений и соотношения (19) находим среднюю длину свободного пробега в воде:

$$\lambda_g = 0{,}87 \text{ см}.$$

вместо 1,27 *см*. Различие находится в пределах экспериментальных ошибок.

Видно, что приведенные в табл. XV значения $(r^2)_{\text{ср}}$ для группы C заметно отличаются от соответствующих величин для остальных групп, например

$$(r_C^2)_{\text{ср}} - (r_D^2)_{\text{ср}} = 50 \text{ см}^2.$$

Такое различие частично связано с большим числом свободных пробегов нейтронов, когда их энергия уже уменьшилась до тепловой; этим процессом диффузии обусловлено (см. § 7)

$$2\lambda^2 N = 26 \text{ см}^2.$$

....

[20] O. R. Frisch, G. Placzek. Nature (London), 1936, **137**, 357; D. F. Weekes, M. S. Livingston, H. A. Bethe. Phys. Rev., 1936, 49, 471.

[21] Голдсмит и Разетти (H. H. Goldsmith, F. Rasetti. Phys. Rev., 1936, **50**, 328) показали, что в таком расчете в качестве тепловой энергии вместо (3/2) kT правильнее пользоваться величиной kT.

Остающиеся 24 *см*^{2} соответствуют замедлению нейтронов от энергии, которая отвечает группе D, до энергии теплового движения. Но этот процесс рассчитать трудно, ибо он осложняется влиянием химической связи водорода (см. F, § 19).

10. Переход нейтронов из одной группы в другую

В предыдущем разделе мы расположили группы в порядке убывания энергии. Теперь становится ясным, что нейтрон из группы с большой энергией после ряда столкновений потеряет некоторую ее долю и может перейти, таким образом, в группу меньшей энергии. Точнее говоря, следует ожидать, что нейтроны всех групп после определенного числа соударений становятся тепловыми. Поэтому мы попытались наблюдать подобную трансформацию D-нейтронов в C-нейтроны [22].

Идею этих опытов легко понять, представив себе, что в нашем распоряжении имеются детектор R, который может активироваться только C-нейтронами, и поглотитель A одних только D-нейтронов. Поместим детектор в центре верхнего торца парафинового цилиндра, в котором находится источник S. Если вставить поглотитель между этим торцом парафина и детектором, никакого снижения активности последнего не произойдет, поскольку выходящие из парафина C-нейтроны не поглощаются в A. Если же поместить поглотитель A внутри парафина (в одном или двух сантиметрах), то может случиться, что он будет захватывать некоторую часть D-нейтронов, которые за счет столкновений в парафине могли бы стать C-нейтронами до того, как попадут на детектор.

Если переход D-нейтронов в C-нейтроны действительно происходит, то следует ожидать, что, будучи расположен между парафином и детектором, поглотитель A не создаст никакого эффекта; когда же он находится в парафине (в 1—2 *см* ниже детектора), активность R должна уменьшаться.

Такая идеальная схема постановки этого опыта невозможна, так как не существует детектора только для группы C и поглотителя одних только D-нейтронов. По этой причине в качестве детектора использовалась родиевая пластинка толщиной 0,36 *г/см*^{2}; около 70% ее активности обусловлено C-группой, а остальное—D-группой. Для определения активности, вызванной только C-группой, все измерения проводились с кадмиевым поглотителем (0,54 *г/см*^{2}) и без него; кадмий находился прямо под родиевой пластинкой. Разность измеренных без кадмия и с кадмием активностей связана только с группой C.

Поглотителем D-группы служила пластинка индия 1,83 *г*/28,5 *см*^{2}. Коэффициент поглощения группы D в индии равен 3,4 *см*^{2}/*г*, а для группы C он составляет 0,7 *см*^{2}/*г*. Это значит, что поглощением C-нейтронов в индиевой пластинке вовсе нельзя пренебрегать, особенно если вспомнить большие численность и альбедо этой группы. Чтобы учесть этот факт,

[22] E. Amaldi, E. Fermi. Ric. Scientifica, 1936, 7 (1), 56.

была приготовлена пластинка из сплава Sn — Cd, эквивалентная по поглощению *С*-группы нашему индию и практически не поглощавшая *D*-нейтроны. Измеряя разность активностей, которые группа *С* наводит в детекторе с индиевым или кадмиевым поглотителем, находим эффект, связанный с поглощением в индии только *D*-группы.

В табл. XVI собраны данные об активности, наводимой в пластинке родия при различных условиях. Разные сочетания с парафином и поглотителем обозначаются символами, аналогичными использовавшимся в § 6; цифры в скобках, стоящие вслед за символом *Р*, означают толщину слоев парафина в сантиметрах. В опытах использовались два разных слоя кадмия: один, толщиной 0,54 *г/см*^{2}, — для полного поглощения группы *С*, а другой, толщиной 0,0036 *г/см*^{2},— как поглотитель *С*-группы, эквивалентный индиевой пластинке; эти поглотители обозначаются соответственно Cd и cd. Приведенные в таблице цифры являются средними по десяти отсчетам.

Таблица XVI

Активности, наводимые в родиевой пластинке при различных расположениях

S — источник, P — парафин (толщина, *см*), R — детектор

S P (3,5) R	280,4±0,7
S P (3,5) In R	230,2±0,7
S P (3,5) In Cd R	45,6±0,4
S P (3,5) Cd R	68,7±0,5
S P (3,5) cd R	254,8±0,7
S P (2,5) cd P (1) R	253,0±0,7
S P (2,5) In P (1) R	241,5±0,7
S P (2,5) cd P (1) Cd R	71,1±0,5
S P (2,5) In P (1) Cd R	64,9±0,5
S P (1,5) cd P (2) R	254,0±0,7
SP (1,5) In P (2) R	248,9±0,7
S P (1,5) cd P (2) Cd R	69,2±0,5
S P (1,5) In P (2) Cd R	68,1±0,5

Первые пять измерений выполнены для проверки тождественности тонкого кадмия (cd) и индия (In) в смысле поглощения ими *С*-нейтронов. Результат состоит в том, что индиевая пластинка, по-видимому, поглощает чуть-чуть сильнее кадмиевой. Разность 280,4—68,7 — (230,2—45,6) = = 27,1 ± 1,2 представляет активность родиевого детектора, обусловленную группой *С*, которая поглощается индием; разность же 280,4—254,8 = = 25,6 ± 1 отвечает аналогичному поглощению тонким слоем кадмия.

Следующие четыре измерения проведены с поглотителем (Cd или In), расположенным в парафине на глубине 1 *см*. Разность 253,0—71,1 =

$= 181{,}9 \pm 0{,}9$ есть активность детектора, наведенная группой C при наличии поглотителя Cd в парафине (на глубине 1 *см*). Аналогичной активности, измеренной с индиевым поглотителем, соответствует разность $241{,}5-64{,}9 = 176{,}6 \pm 0{,}9$. Разность этих двух активностей составляет $5{,}3 \pm 1{,}2$, что заметно превышает величину, которая могла бы ожидаться из-за малых различий этих двух поглотителей, когда они расположены вплотную к детектору.

Следующие четыре измерения аналогичны только что упомянутым, с единственным отличием, что в этом случае поглотители находились в 2 *см* под поверхностью парафина. В этой серии опытов также наблюдается разность активностей, подобная отмечавшейся выше; здесь она равна $4{,}0 \pm 1{,}2$.

Совместный анализ всех этих данных приводит к выводу, что знак наблюдаемого эффекта как будто соответствует трансформации D-нейтронов в C-нейтроны, а его величина в 2,3 раза больше средней квадратической ошибки. И хотя у нас имеются серьезные основания предполагать существование реального эффекта в этом смысле, тем не менее из этих опытов нельзя вывести окончательного суждения.

Оценка ожидаемого в этом опыте эффекта показывает, что по порядку величины он действительно равен наблюдаемому. Мы оценили его следующим образом: были измерены активности, наведенные по отдельности группой C и группой D в индиевой пластинке, которая использовалась в описанном выше опыте (индий находился в парафине, в 2 *см* от его верхнего торца); оказалось, что они равны соответственно 257 и 47,5. Эти величины пропорциональны числу нейтронов обеих групп, поглощенных индием.

Обозначим через p_1 вероятность того, что находящийся в парафине (в месте расположения индиевого поглотителя) C-нейтрон выходит через верхний торец и поглощается родиевым детектором. Аналогично, пусть p_2 — вероятность того, что D-нейтрон, который находится в том же месте и выходит через ту же поверхность парафина, становится C-нейтроном и поглощается родием.

Поглощение D- и C-нейтронов индиевой пластинкой приводит к соответственному уменьшению активностей родиевого детектора, наведенных группой C; отношение таких уменьшившихся активностей равно $47{,}5\ p_2/257 p_1$. Полагая p_1 равным p_2 или же считая их, по меньшей мере, величинами одного порядка, находим, что отношение составляет примерно 47,5/257. Но поскольку уменьшение активности, обусловленное поглощением C-нейтронов, равно 26,9 (см. табл. XVI), эффект, который должен был бы наблюдаться в предыдущем эксперименте, равен 5, т. е. он того же порядка, что и фактически наблюдаемый.

Подобные же опыты были поставлены Прайсверком и фон Халбаном [23], обнаружившими генетическую связь групп I и A.

....

[23] Preiswerk, von Halban. Compt. Rend., 1936, **202**, 840.

11. Поведение групп вблизи поверхности парафина

В § 9 рассматривалось поведение активности, которую различные группы нейтронов наводят внутри бака с водой, достаточно большого для того, чтобы можно было пренебречь возмущениями, обусловленными его конечными размерами. Теперь мы рассмотрим поведение активности, связанной с разными группами, вблизи поверхности парафина.

Сначала рассмотрим поведение нейтронов группы C. Из теории диффузии тепловых нейтронов следует, что независимо от положения источника их плотность вблизи поверхности парафина убывает в направлении его границы [см. F, § 6, формула (57)]. Далее, можно показать, что при малых x (x — расстояние до поверхности парафина) плотность $n(x)$ приблизительно пропорциональна

$$x + \lambda/\sqrt{3}.$$

Таким образом, если экстраполировать кривую $n(x)$ за пределы парафина ($x < 0$), то она обращается в нуль на расстоянии от его поверхности, равном

$$x_0 = -\lambda/\sqrt{3}.$$

Именно таким поведением плотности тепловых нейтронов вблизи поверхности и определяется характер углового распределения (5) выходящих C-нейтронов. Если бы у поверхности парафина плотность была постоянна, то распределение подчинялось бы закону косинуса.

Для измерения $n(x)$ нужно пользоваться детектором нейтронов группы C, достаточно тонким, чтобы не вызвать искажения распределения нейтронов; тогда его активность будет пропорциональна плотности $n(x)$ тепловых нейтронов.

Мы работали с двумя детекторами, полученными электролитическим осаждением родия на никелевую пластинку площадью 29 $см^2$ (она служила только неактивируемой подложкой). Вес высаженного на эти два детектора родия составлял 0,087 и 0,169 *г*. Величина $K\delta$ равна для них соответственно 0,002 и 0,004, так как коэффициент поглощения группы C родием есть 0,7 $см^2/г$. Этим значениям отвечают средние вероятности ζ захвата теплового нейтрона, проходящего через детектор, около 0,004 и 0,008 соответственно (см. § 6). Поскольку они очень малы, применявшиеся в опытах детекторы можно считать тонкими.

Измерения были проведены в парафиновом цилиндре диаметром 24 *см* и высотой 10 *см*, в котором на расстоянии 3,2 *см* от центра верхнего торца находился источник. Слой парафина толщиной 3,2 *см* (от источника и до верхнего торца) разрезался на несколько пластинок, чтобы детектор можно было помещать в парафин на разной глубине.

Для определения активности, которая связана только с группой C, всегда вычислялась разность активностей, измеренных без кадмия и затем — с двумя кадмиевыми экранами (0,44 $г/см^2$), между которыми помещались детекторы.

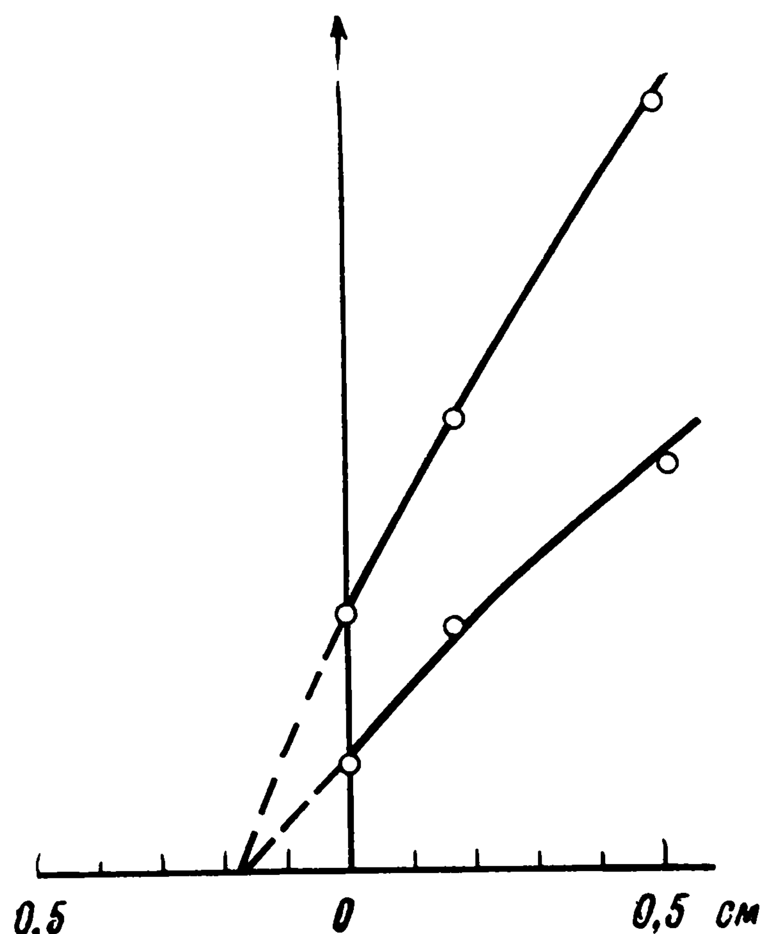


Рис. 8. Активность группы C в зависимости от глубины x в парафине

На рис. 8 активность обоих детекторов, обусловленная одной лишь группой C, нанесена в зависимости от глубины x, причем кривые экстраполированы в область отрицательных значений x. Точка пересечения с осью абсцисс находится вблизи

$$x_0 = -0{,}18 \text{ см}.$$

Пользуясь этим значением, находим

$$\lambda \equiv 0{,}31 \text{ см},$$

что хорошо согласуется с величинами, полученными из непосредственных измерений (см. § 8).

Как уже отмечалось, этот опыт весьма просто интерпретируется, если только детектор очень тонок. Толстый же детектор сильно возмущает плотность тепловых нейтронов, и поэтому кривая активности как функция x оказывается совершенно иной. Так, например, воспользовавшись родиевым детектором толщиной 0,36 *г/см*^{2} и суммируя измеренные с обеих его сторон активности, возбужденные нейтронами группы C (чтобы получить данные, сравнимые с предыдущим опытом), мы обнаружили, что экстраполированная в область отрицательных значений x кривая активности пересекает ось x в точке

$$x_0 = -0{,}4 \text{ см}.$$

Это более чем вдвое превышает расстояние в случае тонкого детектора.

В этом опыте измеренные с обеих сторон детектора активности суммировались, поскольку эта сумма пропорциональна полному числу тепловых нейтронов, которые входят в детектор. Пусть N_1 и N_2 — числа таких нейтронов, которые входят в него через поверхности 1 и 2 соответственно; активности, измеренные на этих поверхностях, даются равенствами

$$A_1 = N_1 a + N_2 b, \qquad A_2 = N_1 b + N_2 a, \tag{20}$$

где a и b — константы, характеризующие детектор; они зависят от его толщины и коэффициентов поглощения нейтронов и электронов в нем. Отношение a/b можно найти, измеряя A_1/A_2 при $N_2 = 0$, т. е. когда детектор находится снаружи парафина.

Для родиевого детектора толщиной 0,36 *г/см*^{2} отношение a/b равно 4/3 и 2/1 для C- и D-групп соответственно. Это отличие возникает из-за большего коэффициента поглощения D-нейтронов. В случае тонкого детектора a было бы равно b.

Складывая равенства (20), находим, что

$$A_1 + A_2 = (a + b)(N_1 + N_2),$$

и, таким образом, сумма активностей, измеренных с обеих сторон детектора, всегда пропорциональна полному числу нейтронов $N_1 + N_2$, проходящих через детектор.

Из равенств (20) находим

$$N_1 = \frac{aA_1 - bA_2}{a^2 - b^2}, \qquad N_2 = \frac{aA_2 - bA_1}{a^2 - b^2}. \tag{21}$$

Следовательно, измеряя A_1 и A_2, а также отношение a/b, можно получить величины, пропорциональные N_1 и N_2 (этот метод использовался в § 7 для раздельного измерения N_1 и N_2). В табл. XVII приведены значения N_1 и N_2, измеренные нашим родиевым детектором (0,36 *г/см*^{2}) для каждой группы, C и D, по отдельности. Чтобы иметь возможность сравнивать эти два набора данных, значение N_1 при $x = 0$ принято для обеих групп за 1. В этих опытах источник был расположен на $x = 2{,}4$ *см*. Данные относительно группы C не допускают простой интерпретации, так как детектор нельзя считать тонким.

Таблица XVII

Число нейтронов, попадающих на стороны (1) и (2) детектора

x — толщина парафина

x	Группа C		Группа D		x	Группа C		Группа D	
	N_1	N_2	N_1	N_2		N_1	N_2	N_1	N_2
0	1	0	1	0	0,53	1,28	0,91	1,25	0,28
0,16	1,10	0,28	1,07	0,07	0,87	1,60	1,19	1,31	0,45
0,34	1,15	0,63	1,17	0,14	1,87	2,19	2,00	1,35	1,00

Напротив, детектор группы D, хотя он и является толстым, не возмущает распределение D-нейтронов, так как нейтроны этой группы проходят в среднем лишь одну длину среднего свободного пробега (см. § 6, 7, 12), и потому каждый из них только один раз попадает на детектор.

Экстраполяция формы кривой $N_1 + N_2$ для группы D в область отрицательных x дает пересечение с осью x в точке

$$x_0 = -0{,}9 \text{ см}.$$

Тот факт, что это пересечение происходит гораздо дальше от поверхности парафина, чем в случае группы C ($x_0 = -0{,}18$ *см*, тонкий детектор),

объясняется, с одной стороны, большей средней длиной свободного пробега (см. § 7), а с другой — коррелированностью ориентаций последовательных свободных пробегов, которая очень сильно выражена у нейтронов с энергиями, превышающими энергию кванта упругой связи водорода в парафине.

Сравнение второго и четвертого столбцов табл. XVII обнаруживает, что для нашего детектора кривые N_1 группы C и D вблизи поверхности не очень различаются. При большей же глубине группа C усиливается намного быстрее, чем группа D. Подобное поведение можно объяснить, если учесть возрастание альбедо парафинового слоя, положенного на детектор, с ростом толщины парафина.

12. Ширина энергетических полос, соответствующих группам. Полное число нейтронов

В этом разделе будет обсуждаться метод определения ширины энергетических полос [24], отвечающих разным группам, или, точнее, метод определения отношения $W_{\max}/W_{\min}$ максимальной и минимальной энергий, которые ограничивают полосу. В вычислениях предполагалось, что такие полосы имеют резкие границы. Можно было бы выполнить подобные расчеты и в предположении резонансной формы полосы, однако ввиду малой точности экспериментальных данных это едва ли стоит делать.

В последней части этого раздела будет сделана оценка полного числа нейтронов, испускаемых источником Rn + Be.

Метод определения ширины полосы, которая отвечает некоторой группе g с энергией выше 1 *эв*, основывается на сравнении двух величин. Одна из них — активируемость детектора A_g, обусловленная нейтронами рассматриваемой группы, другая — его же активируемость B_c под воздействием тепловых нейтронов, измеренная в условиях, когда детектор экранирован с одной стороны слоем кадмия, причем толщина кадмия достаточна для полного поглощения падающих на него тепловых нейтронов. Естественно, что B_c можно получить как разность активируемостей нашего детектора, измеренных при наличии кадмиевого экрана либо лишь с одной его стороны, либо с обеих.

Ясно, что величины A_g и B_c будут независимы от положения и ориентации детектора, если распределение быстрых нейтронов в большом блоке парафина однородно. Однако в силу малости размеров источника быстрых нейтронов сравнивать нужно значения A_g и B_c, усредненные по всем положениям и ориентациям внутри парафина, т. е. нужно сравнивать

$$\int \overline{A}_g \, d\tau, \qquad \int \overline{B}_c \, d\tau.$$

[24] E. Amaldi, E. Fermi. Ric. Scientifica, 1936, 7 (1), 310.

Здесь подынтегральные выражения $\bar{A}_g$ и $\bar{B}_c$ представляют собой средние значения активируемостей детектора, измеренные при двух противоположных ориентациях. Практически они тождественны величинам, усредненным по всем направлениям. Прибегнув к упомянутым интегралам, мы устраняем все сложности, которые появляются вследствие неравномерного распределения нейтронов.

Допустим теперь, что в окружающем наш детектор парафине образуется q быстрых нейтронов в секунду в кубическом сантиметре. Они замедляются таким образом, что в окрестности нашего детектора будут присутствовать нейтроны всех скоростей.

Можно показать (см. F, § 1), что для энергий выше 1 *эв* число нейтронов со скоростями от v до $v + dv$ равно

$$(2q\lambda\,(v)/v^2)\,dv. \tag{22}$$

С помощью этого выражения можно легко вычислить активируемость A_g как функцию энергий $W_{\max}$ и $W_{\min}$ (ограничивающих энергетическую полосу g), средней длины свободного пробега λ_g и коэффициента K_g поглощения группы g детектором, а также площади s и толщины δ детектора (см. F, § 8):

$$A_g = \eta s q \lambda_g K_g \ln \frac{W_{\max}}{W_{\min}} \cdot \frac{1}{2} \left\{ \int_0^\delta b\,(K_g x)\, e^{-\mu x}\, dx + \int_0^\delta b\,(K_g x)\, e^{-\mu(\delta - x)} dx \right\}; \tag{23}$$

здесь μ — коэффициент поглощения β-лучей детектора в нем самом; $b\,(K_g x)$ — функция (4); η — эффективность регистрации β-лучей детектора в ионизационной камере. Последний множитель в (23) описывает поглощение нейтронов и β-лучей детектором; для очень тонкого детектора он равнялся бы δ.

Активность B_c, обусловленная тепловыми нейтронами, может быть вычислена как функция длины диффузии $(D\tau)^{1/2} = (\lambda^2 N/3)^{1/2}$ (см. § 7) и коэффициента поглощения детектора K_C. Учитывая угловое распределение падающих на детектор нейтронов (5), находим, что

$$B_c = \eta s q \sqrt{\lambda^2 N}\, K_C \int_0^\delta c\,(K_C x)\, e^{-\mu x} dx, \tag{24}$$

где $c\,(K_C x)$ — функция (6). Здесь не принимается во внимание зависимость коэффициента поглощения нашего детектора от скорости тепловых нейтронов. Для очень тонкого детектора интеграл равен δ.

Как уже было сказано, теперь нужно проинтегрировать (23) и (24), после чего получим

$$\int A_g\, d\tau = \eta s Q K_g \lambda_g \ln \frac{W_{\max}}{W_{\min}} \cdot \frac{1}{2} \left\{ \int_0^\delta b\,(K_g x)\, e^{-\mu x}\, dx + \int_0^\delta b\,(K_g x)\, e^{-\mu x\,(\delta - x)}\, dx \right\},$$

$$\int B_c\, d\tau = \eta s Q K_C \sqrt{\lambda^2 N} \int_0^\delta c\,(K_C x)\, e^{-\mu x}\, dx, \tag{25}$$

где $Q = \int q d\tau$ — полное число нейтронов, испускаемых источником в секунду. Из (25) находим

$$\ln \frac{W_{\max}}{W_{\min}} = \frac{K_C}{K_g} \frac{\sqrt{\lambda^2 N}}{\lambda_g} \frac{\int A_g \, d\tau}{\int B_c \, d\tau} \cdot \frac{2 \int_0^{\delta} c\,(K_C x)\, e^{-\mu x}\, dx}{\int_0^{\delta} b\,(K_g x)\, e^{-\mu x}\, dx + \int_0^{\delta} b\,(K_g x)\, e^{-\mu(\delta - x)}\, dx}. \quad (26)$$

Подобные опыты проводились на группах D, A и I. Для группы D использовался родиевый детектор (0,36 *г/см*²); группа A исследовалась серебряным детектором (0,057 *г/см*²), а группа I — детектором из иодистого серебра (0,76 *г/см*²). Коэффициент поглощения нейтронов C-группы иодом мал, и его значение известно недостаточно хорошо; поэтому при вычислении B_c для I-группы использовались данные, полученные с помощью родиевого детектора. При этом эффективность камеры для β-лучей родия и иода предполагалась одинаковой. Для вычисления интегралов

$$\int \bar{A}_g \, d\tau \quad \text{и} \quad \int \bar{B}_c \, d\tau$$

$\bar{A}_g$ и $\bar{B}_c$ были определены для некоторого фиксированного расстояния, а их значения для всех других расстояний находились затем с помощью кривых, приведенных на рис. 7.

В следующих ниже равенствах численные значения различных величин написаны в том же порядке, в каком они стоят в формуле (26).

$$\text{Группа } D: \quad \ln \frac{W_{\max}}{W_{\min}} = \frac{0{,}7}{1{,}8} \frac{\sqrt{13}}{1{,}1} \frac{4{,}58 \cdot 10^5}{1{,}5 \cdot 10^6} \frac{2 \cdot 0{,}108}{0{,}087 + 0{,}052} = 0{,}60.$$

$$\text{Группа } A: \quad \ln \frac{W_{\max}}{W_{\min}} = \frac{0{,}25}{20} \frac{\sqrt{13}}{1{,}1} \frac{7{,}8 \cdot 10^4}{2{,}04 \cdot 10^5} \frac{2 \cdot 0{,}048}{0{,}021 + 0{,}019} = 0{,}038.$$

$$\text{Группа } J: \quad \ln \frac{W_{\max}}{W_{\min}} = \frac{0{,}7}{0{,}38} \frac{\sqrt{13}}{1{,}1} \frac{4{,}16 \cdot 10^4}{1{,}5 \cdot 10^5} \frac{2 \cdot 0{,}108}{0{,}085 + 0{,}149} = 0{,}27.$$

Эти величины позволяют получить отношения $W_{\max}/W_{\min}$ для каждой группы. Назовем величину $\ln (W_{\max}/W_{\min})$ логарифмической шириной; она имеет простой физический смысл, представляя собой среднее число соударений, испытываемых нейтроном за то время, пока он принадлежит данной группе. Группа A, например, обладает логарифмической шириной 0,04, т. е. является столь узкой энергетической полосой, что в процессе замедления через нее проходит только 4% нейтронов. Использовавшийся в случае группы A детектор нельзя считать тонким в смысле поглощения нейтронов; простая численная оценка, учитывающая резонансную форму полосы, показывает, что вычисленная по формуле (26) логарифмическая ширина группы A слишком велика — примерно вдвое. Для других детекторов эта поправка намного меньше.

Логарифмическая ширина группы I и, тем более, группы D значительно больше, что проявляется также в большей численности (см. § 5) этих групп. Даже в случае группы D вероятность того, что нейтрон принадлежит группе дольше, чем на протяжении одного свободного пробега, сравнительно мала и составляет 0,27. Эти факты объясняют наши результаты, согласно которым альбедо всех нетепловых групп практически равно нулю.

Однако было разумно ожидать небольшого различия в поведении групп D и A в диффузионных экспериментах, описанных в § 7. Тот факт, что нам не удалось заметить какое-либо различие, можно объяснить неточностью опытов, поскольку ожидаемая разница довольно мала.

Если принять, что энергии групп таковы, как это было установлено в § 9 с помощью поглощения бора, то для ширины групп D, A и I соответственно получим 1; 0,15 и 10 *эв*.

Наконец, для вычисления полного числа нейтронов, испускаемых источником, можно воспользоваться вторым соотношением (25), где B_c — начальная активность детектора. Чтобы получить активируемость (3), нужно умножить определяемую формулой (25) величину B_c на

$$1000/I \cdot U = 1000/I \cdot 840\,\eta_U,$$

после чего получим

$$\frac{Q}{I} = 0{,}84\,\frac{\eta_U}{\eta}\,\frac{\int B_c\,d\tau}{s\sqrt{\lambda^2 N}\,K_C \int\limits_0^\delta c\,(K_C x)\,e^{-\mu x}\,dx}\,. \tag{27}$$

В эту формулу входят те же величины, которые использовались при вычислении логарифмической ширины. Например, с помощью данных по активации родия находим, что

$$Q/I = 160\,000\,(\eta_U/\eta).$$

Положив $\eta_U = \eta$, получим, что в наших опытах одна нейтронная единица соответствует 160 000 нейтронов в секунду; если же принять во внимание, что одной нейтронной единице отвечает около 6 *мкюри* Rn + Be, то в итоге получаем соответствующее число испускаемых нейтронов

27 000 *нейтронов/сек/мкюри*.

Это значение значительно больше того, что было найдено другими методами[25]; различием между η и η_U можно лишь частично объяснить такое расхождение.

[25] Ср., например, R. Jaeckel. Z. Physik, 1934, **91**, 493; F. A. Paneth, H. Loleit. Nature (London), 1935, **136**, 950.

13. Обсуждение и выводы

Все изложенные здесь результаты приводят, по-видимому, к заключению, что в элементах, чувствительных к медленным нейтронам, сечение захвата часто оказывается нерегулярной функцией их энергии, причем резкие максимумы представляют своего рода полосы поглощения.

Анализ кривых поглощения, измеренных для разных элементов разными детекторами, позволяет нам идентифицировать несколько полос поглощения (группы A, B, C, D, I).

Имеются основания полагать, что группе C (излучение, сильно поглощаемое кадмием), по крайней мере большей ее части, соответствуют нейтроны со скоростями теплового движения, тогда как другим отвечают нейтроны бо́льших скоростей.

Самым непосредственным доказательством является опыт с кадмиевым селектором скоростей [26] (используемым для наблюдения одной лишь группы C), который позволяет прямо измерить скорость C-нейтронов; она оказалась равной скорости теплового движения.

Такой же результат можно получить из опытов Прайсверка и фон Халбана и других [27], обнаруживших, что отфильтрованное кадмием излучение нечувствительно к вариациям температуры; это говорит о том, что энергия нейтронов, не принадлежащих группе C, больше энергии теплового движения.

Наконец, наши измерения альбедо показывают (см. § 6), что только C-нейтроны способны испытать большое число столкновений, оставаясь в пределах этой группы. Этот факт легко понять, предположив, что C-группа состоит из нейтронов, которые находятся в тепловом равновесии, поскольку тогда их средняя энергия не меняется в результате следующих друг за другом столкновений. В то же время нейтрон, принадлежащий полосе энергий $\gg kT$, уже после одного соударения с большой вероятностью уходит из этой полосы.

Во всех наших опытах основная доля активности (в большинстве случаев она превышает 50%) была обусловлена тепловыми нейтронами; это, однако, не означает, что коэффициент поглощения тепловых нейтронов, как правило, больше, чем нейтронов с энергиями в несколько *эв*. Это обстоятельство можно в какой-то мере объяснить большим числом тепловых нейтронов, которые выходят из парафинового блока, содержащего источник (см. табл. VI).

Установить соответствие энергетических полос известным нейтронным группам можно следующим методом, впервые применявшимся Фришем и Плачеком, а также Уиксом, Ливингстоном и Бете. Они предположили, что сечение захвата медленного нейтрона бором обратно пропорционально

---

[26] J. R. Dunning, G. B. Pegram, G. A. Fink, D. P. Mitchell, E. Segrè. Phys. Rev., 1935, 48, 704; Rend. Lincei, 1936, 23, 340.

[27] P. Preiswerk, H. von Halban. Nature (London), 1935, 136, 1027; F. Rasetti, G. Fink. Phys. Rev., 1936, 49, 642.

скорости нейтрона v. При таком допущении из наших измерений были получены следующие значения энергий:

группа	C	D	A	B	I
энергия, *эв*	0,037	1,6	4	7	36

Однако ошибки в подобного рода измерениях могут быть довольно велики.

В § 9 было проведено совершенно независимое определение порядка следования групп на шкале энергий и, кроме того, оценивалось отношение энергий (последнее только для нетепловых групп). При этом мы исходили из поведения интенсивности различных групп в зависимости от расстояния до источника. Обнаруженный нами порядок энергий совпадает с тем, который следует из опытов по поглощению в боре; значения же отношений энергии по нашим данным получаются меньше, чем по борному методу, но не противоречат последним, поскольку при таком их определении довольно велика ошибка.

Несмотря на то, что наш метод очень неточен, он является прямым и в этом его большое преимущество.

Аналогичными методами нам удалось определить также и ширину энергетических полос (вернее, относительную ширину $\Delta W/W$) в случае нетепловых групп; мы установили, что самая узкая полоса соответствует группе A (излучение, сильно поглощаемое серебром), у которой $\Delta W/W = 0{,}04$. Другие группы (см. § 12) оказываются несколько шире. Тем не менее вероятность того, что нейтрон после первого своего столкновения останется в той же самой группе, довольно мала.

С шириной полос поглощения связана численность групп, которая по существу соответствует числу нейтронов, выходящих за секунду через поверхность содержащего источник парафинового блока (см. § 5). Группой с наибольшей численностью является тепловая (численность 40), тогда как наименьшая присуща группе A (численность 0,5), которая, как мы видели, оказалась самой узкой.

Эти факты качественно согласуются с представлениями Бора, а также Брейта и Вигнера.

Некоторую дополнительную информацию о свойствах таких полос поглощения можно получить, сравнивая поведение двух периодов полураспада одного и того же элемента, чувствительных к медленным нейтронам. В этом аспекте нам удалось исследовать только серебро, родий, индий и бром. Различие в поведении двух периодов было обнаружено лишь у серебра. Во всех остальных случаях не было замечено никакой разницы (в пределах точности наших измерений). Отметим, что родий, индий и бром представляют собой три примера, для которых число наблюдавшихся периодов, обусловленных медленными нейтронами, превышает число известных изотопов.

Разделы 6—11 посвящены изучению диффузионных свойств медленных нейтронов в водородсодержащих средах. Анализ процесса диффузии можно провести в два последовательных этапа. На первом (фаза замедления)

нейтрон теряет свою энергию за счет последовательных соударений, пока не достигнет энергии теплового движения. Затем (фаза диффузии) энергия в среднем больше не уменьшается, и нейтрон испытывает рассеяние до тех пор, пока не захватывается протонами или другими ядрами.

При замедлении средняя длина свободного пробега очень быстро уменьшается до величины порядка 1 *см*; после этого она остается приблизительно постоянной, пока энергия нейтрона сравнима с энергией кванта $h\nu$ упругой связи атома водорода в парафине.

Можно сказать, что все изученные группы, кроме тепловой, соответствуют энергетическому интервалу, где средняя длина свободного пробега λ_g в парафине составляет около 1 *см*.

Из теории столкновений медленных нейтронов с атомами водорода, учитывая химическую связь последних (см. F, §§ 10 и 11), можно получить, что при уменьшении энергии нейтронов от значений, больших $h\nu$, до значений, меньших $h\nu$, средняя длина свободного пробега убывает и стремится к пределу, равному $\lambda_g/4$. Подобное поведение λ связано также и с различием угловых распределений нейтронов после столкновения: если $W \gg h\nu$, то угол между направлениями движения нейтронов до и после столкновения всегда острый, тогда как при $W \ll h\nu$ угловое распределение после столкновения стремится к изотропному.

В соответствии с этим результатом теории на опыте действительно наблюдается заметное уменьшение средней длины свободного пробега при переходе из нетепловой группы в тепловую.

Для тепловой группы можно принять, что $W/h\nu$ составляет около 1/10. Эта величина довольно мала, однако считать, что энергия тепловых нейтронов практически равна нулю, нельзя. Для этого значения $W/h\nu$ находим, что средняя длина свободного пробега [см. *F*, формула (102)] есть

$$\lambda = \lambda_g/3{,}3, \tag{28}$$

в то время как в пределе $W = 0$ получилось бы $\lambda = \lambda_g/4$.

Кроме того, можно оценить, в какой мере сохраняется связь между направлениями движения теплового нейтрона до и после столкновения. В качестве меры такой корреляции можно взять $(\cos\theta)_{\text{ср}}$, т. е. среднее значение косинуса угла рассеяния нейтрона после столкновения; $(\cos\theta)_{\text{ср}} = 1$ означает полную корреляцию, тогда как для изотропного рассеяния $(\cos\theta)_{\text{ср}} = 0$. Для нейтронов с энергиями выше 1 *эв* получаем $(\cos\theta)_{\text{ср}} = 2/3 = 0{,}67$. Для тепловых же нейтронов — в предположении $W/h\nu = 1/10$ — получаем [см. F, формула (103)], что $(\cos\theta)_{\text{ср}} = 0{,}067$, т. е. одну десятую предыдущей величины.

Эти результаты оправдывают сделанные ранее в этой работе приближения, в рамках которых рассеяние тепловых нейтронов предполагалось изотропным. Следует, однако, обратить внимание на малую ошибку, которую мы при этом ввели; она состоит в том, что длина диффузии, определяемая формулой (12), оказывается слишком малой, а определяемое выра-

жением (11) альбедо — слишком большим. Соответствующие поправки можно было бы вычислить, если бы была известна величина $(\cos\theta)_{\text{ср}}$. Однако последняя зависит от отношения $W/h\nu$, которое нам известно лишь по порядку величины.

В § 6—11 были представлены пять экспериментально измеренных характеристик, которые с помощью соотношений, полученных на основе теории диффузии нейтронов (см. F), можно выразить всего через две величины. Вот эти пять характеристик: средние длины свободных пробегов λ и λ_g тепловых нейтронов (см. § 8) и нейтронов групп D и A (см. § 7); альбедо тепловых нейтронов β (см. § 6); длина диффузии тепловых нейтронов l (см. § 7); длина $|x_0|$ (см. § 11), которая относится к тепловым нейтронам и связана с λ соотношением

$$|x_0| = \lambda/\sqrt{3}. \tag{29}$$

С помощью соотношений (28), (11), (12) и (29) эти пять характеристик можно представить в виде функций λ_g и N (число столкновений, которое испытывает в среднем тепловой нейтрон).

Таблица XVIII

Сравнение измеренных и вычисленных значений

λ и λ_g — средний свободный пробег тепловых нейтронов и нейтронов групп D и A, соответственно; β — альбедо для тепловых нейтронов; l — длина диффузии; $|x_0| = \lambda/\sqrt{3}$

λ	λ_g	β	l	$\|x_0\|$
0,3	1,1	0,82	2,1	0,18
0,30	1,0	0,83	2,05	0,174

В табл. XVIII измеренные значения этих характеристик сравниваются с вычисленными по упомянутым выше формулам в предположении, что

$$\lambda_g = 1{,}0 \ \textit{см}, \qquad N = 140.$$

Как видно, согласие хорошее.

Исходя из этих значений λ_g и N, находим следующие константы для тепловых нейтронов в парафине:

сечение упругого рассеяния на водороде

$$\sigma_e = 43 \cdot 10^{-24} \ \textit{см}^2,$$

сечение захвата

$$\sigma_c = 0{,}31 \cdot 10^{-24} \ \textit{см}^2,$$

среднее время жизни

$$\tau = 1{,}7 \cdot 10^{-4} \textit{ сек.}$$

Последнее значение очень хорошо согласуется с результатами измерения τ, проведенного с помощью механической системы [28], а также с расчетными данными; расчет проведен в рамках теории (см. F, § 12), предполагающей, что захват медленных нейтронов протонами связан с испусканием γ-кванта магнитного дипольного излучения [29]. Там же показано, что теоретическое значение τ равно $6{,}5 \cdot 10^{-4}$ или $2{,}6 \cdot 10^{-4}$ *сек* — в зависимости от того, реальным или виртуальным предполагается ^1S-состояние дейтрона ($\pm$ 120 000 *эв*). Удовлетворительное согласие последнего значения с экспериментальным указывает на то, что это состояние является, по-видимому, виртуальным.

Выражаем нашу горячую благодарность Римскому институту Министерства здравоохранения и особенно проф. Дж. К. Трабакки за предоставление радоновых источников, которые использовались в этих исследованиях. Мы благодарны также Национальному совету Италии по научным исследованиям за финансовую поддержку.

---

[28] E. Amaldi, O. D'Agostino, E. Fermi, B. Pontecorvo, E. Segrè. Ric. Scientifica, 1935, 6 (1), 581. (Статья 71.)

[29] Предварительное сообщение об этой теории было сделано Ферми (Phys. Rev., 1935, 48, 570). (Статья 72.)

См. вводные замечания к статье 73

74

О ДВИЖЕНИИ НЕЙТРОНОВ В ВОДОРОДСОДЕРЖАЩИХ ВЕЩЕСТВАХ*

В этой статье мы рассмотрим с теоретической точки зрения некоторые свойства медленных нейтронов. В первой части исследуются замедление и диффузия нейтронов в водородсодержащих средах без квантовомеханического анализа процесса столкновения (упругого или неупругого) нейтронов с протонами вещества, содержащего водород. Изучению механизма соударения посвящена вторая часть. Кроме того, в этой работе будет дано математическое обоснование ряду формул, которыми Амальди и Ферми [1] пользовались при интерпретации некоторых своих опытов с медленными нейтронами. В дальнейшем мы будем часто ссылаться на эти опыты (обозначая упомянутую работу AF), чтобы проиллюстрировать связь существующих теорий с экспериментом.

Часть I

ДИФФУЗИЯ И ЗАМЕДЛЕНИЕ НЕЙТРОНОВ

После того как нейтрон покидает источник, расположенный в водородсодержащей среде, он начинает быстро замедляться благодаря столкновениям с атомами водорода [2]; такой средой практически всегда оказывается парафин или вода, так что в дальнейшем ради краткости обычно будет подразумеваться парафин.

Можно легко показать, что с каждым соударением логарифм энергии нейтрона убывает в среднем на единицу (уменьшение энергии в e раз). Таким образом, примерно после двух десятков столкновений энергия нейтрона уменьшается от начального значения в несколько миллионов *эв* до энергии теплового движения. Поэтому в процессе диффузии нейтронов в водородсодержащей среде нужно различать:

а) фазу замедления, в течение которой энергия нейтрона уменьшается от начального значения до энергии теплового движения;

---

* *Sul moto dei neutroni nelle sostanze idrogenate.* Ric. Scientifica, 1936, 7 (2), 13—52.

[1] E. Amaldi, E. Fermi. *Sopra l'assorbimento e la diffusione dei neutroni lenti.* Ric. Scient., 1936, 7 (1), 454. ([Б118а], см. статью 73). В статье цитируются предварительные сообщения по этому вопросу.

[2] E. Amaldi, O. D'Agostino, E. Fermi. B. Pontecorvo, F. Rasetti, E. Segrè. Proc. Roy. Soc., 1935, A149, 522. (Статья 69.)

в) фазу тепловой диффузии, на протяжении которой достигнувший тепловой энергии нейтрон в среднем уже более не теряет своей энергии при последовательных соударениях с атомами водорода; он продолжает диффундировать до тех пор, пока не покинет эту среду или же не окажется захваченным водородом либо какими-нибудь другими атомами, присутствующими в среде.

1. Фаза замедления. При изучении процесса замедления предположим сначала, что атомы водорода можно считать покоящимися и, кроме того, можно пренебречь наличием химических связей, т. е. тем, что они не свободны. Такие допущения будут, очевидно, оправданы до тех пор, пока энергия нейтрона w значительно превышает энергию химических связей. Более точно это условие формулируется как $w \gg h\nu$, где ν — частота колебаний атомов водорода, обусловленная химической связью. По порядку величины эта частота составляет для обычных водородсодержащих веществ от 1000 до 4000 *см*$^{-1}$, так что наша гипотеза остается в силе, пока энергия нейтрона не упадет ниже 1 *эв*. Последующее замедление — от этой величины до тепловых энергий ($\sim$1/30 *эв*) — осложняется эффектами, обусловленными химической связью водорода; оно будет рассмотрено позднее.

До тех пор, пока энергия нейтрона выше 1 *эв*, будем предполагать, что после соударения все направления движения нейтрона являются равновероятными, если только процесс рассматривается в системе, в которой покоится центр масс сталкивающихся частиц. Если же пользоваться лабораторной системой, где протон вначале покоится, и учесть равенство масс протона и нейтрона, то легко убедиться (непосредственно применяя законы сохранения энергии и импульса), что угол ϑ между траекториями нейтрона до и после соударения всегда острый. Точнее, можно получить соотношение

$$\frac{w'}{w} = \cos^2\vartheta, \tag{1}$$

в котором w и w' обозначают энергии нейтрона до и после столкновения.

Из нашего предположения о равновероятном распределении направлений движения нейтрона после столкновения сразу же следует, что вероятность уменьшения его энергии при этом до величины, лежащей между w' и $w' + dw'$, равна

$$dp = \frac{dw'}{w}. \tag{2}$$

Прежде всего нам нужно определить число нейтронов со скоростями от v до $v + dv$, содержащихся в блоке парафина практически бесконечных размеров; пусть источник быстрых нейтронов, который находится в этом блоке, испускает Q нейтронов в секунду при начальной скорости v_0.

При этих условиях распределение по скоростям можно было бы получить как некий частный случай распределения, выведенного нами ранее [3]. Однако в данном случае оно получается и непосредственно.

Пусть $\mathfrak{N}(v)\,dv$ — число нейтронов со скоростями от v до $v+dv$, находящихся во всем объеме парафина. Оно имеет тенденцию к уменьшению, так как некоторые из этих $\mathfrak{N}(v)\,dv$ нейтронов испытывают соударения, и их скорость, следовательно, уменьшается; с другой стороны, оно стремится возрасти благодаря тому, что в результате столкновения нейтроны со скоростями больше v могут приобрести скорость, лежащую между v и $v+dv$. В стационарных условиях такое уменьшение и возрастание должны взаимно компенсироваться. Выразив в равенстве (2) энергию через скорость, можем написать

$$dp = \frac{2v'\,dv'}{v^2}. \tag{3}$$

Если же учесть, что вероятность столкновения нейтрона в единицу времени равна

$$\frac{v}{\lambda(v)}, \tag{4}$$

где $\lambda(v)$ — средняя длина свободного пробега, то для стационарного состояния получим условие

$$\frac{v}{\lambda(v)}\mathfrak{N}(v)\,dv = \frac{2v\,dv}{v_0^2}Q + 2v\,dv\int_v^{v_0}\frac{1}{u^2}\mathfrak{N}(u)\,\frac{u}{\lambda(u)}\,du,$$

т. е.

$$\frac{\mathfrak{N}(v)}{\lambda(v)} = \frac{2Q}{v_0^2} + 2\int_v^{v_0}\frac{1}{u}\frac{\mathfrak{N}(u)}{\lambda(u)}\,du. \tag{5}$$

Дифференцируя это выражение по v, находим уравнение

$$\frac{d}{dv}\frac{\mathfrak{N}(v)}{\lambda(v)} = -\frac{2}{v}\frac{\mathfrak{N}(v)}{\lambda(v)},$$

после интегрирования которого получаем

$$v^2\frac{\mathfrak{N}(v)}{\lambda(v)} = \text{const}.$$

Значение этой константы определяется при подстановке последнего равенства в (5) и оказывается равным $2Q$. Таким образом, получаем, что

$$\mathfrak{N}(v) = \frac{2Q\lambda(v)}{v^2}. \tag{6}$$

[3] E. Fermi. Zeeman Verhandelingen, Martinus Nijhoff. Hague, 1935, p. 128. (Статья 70.)

Этот закон распределения справедлив, разумеется, лишь для энергий, бо́льших 1 *эв*. В разделе 8 мы столкнемся с приложением этого закона к методам определения ширины энергетических полос, соответствующих различным группам медленных нейтронов.

2. Длина диффузии нейтронов в процессе замедления. Уравнение (6) дает нам полное число нейтронов, относящихся к данному интервалу энергий, однако оно ничего не говорит об их пространственном распределении. Положим, что у нас имеется источник S быстрых нейтронов (с начальной энергией w_0), расположенный в центре парафинового блока очень больших размеров. Вследствие столкновений с атомами водорода нейтроны теряют энергию, так что в среднем те нейтроны, которые испытали большее число соударений, будут обладать меньшей энергией. С другой стороны, для таких нейтронов среднее расстояние от источника оказывается больше, а это означает, таким образом, что среднее расстояние нейтронов данной энергии до источника будет тем больше, чем ниже их энергия.

Теперь нам предстоит вычислить средний квадрат расстояния $\overline{r^2}$ до источника как функцию энергии (по-прежнему ограничиваясь случаем энергий, превышающих примерно 1 *эв*). В этих расчетах будут учитываться только столкновения с атомами водорода. Такой подход оправдан, когда водородсодержащей средой является вода или парафин, поскольку при этом, как показывают оценки, 90% столкновений быстрых нейтронов происходит с атомами водорода, а для медленных нейтронов эта доля еще больше. Кстати, в конце этого раздела дается (без доказательства) ряд формул, в которых учитываются соударения также с тяжелыми атомами, присутствующими в водородсодержащей среде, где диффундируют нейтроны.

Вычисление $\overline{r^2}$ осложняется тем, что направления движения нейтрона до и после столкновения не являются независимыми: они всегда образуют острый угол между собой. Пусть $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — расстояния, которые нейтрон проходит за время своих первых $n+1$ свободных пробегов; полное перемещение нейтрона есть векторная сумма

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\lambda}_0 + \boldsymbol{\lambda}_1 + \ldots \boldsymbol{\lambda}_n. \tag{7}$$

Положим, что после n-го соударения энергия принимает значение w_a и попробуем вычислить $\overline{r^2}$ в зависимости от w_a. Для этого удобнее всего воспользоваться логарифмической шкалой энергий, заменив энергию w переменной

$$x = \ln \frac{w_0}{w}; \tag{8}$$

графически эта переменная всегда будет представляться как абсцисса точки на прямой линии. Зависящую от энергии среднюю длину свободного пробега также можно записать как функцию x: $\lambda = \lambda(x)$. При движении нейтрона его энергия в результате ряда последовательных столкно-

вений становится все меньше и меньше, начиная с величины w_0:

$$w_0 > w_1 > w_2 > \ldots > w_{n-1} > w_a$$

и соответственно этому x принимает значения

$$0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = \ln \frac{w_0}{w_a}.$$

На оси абсцисс точки x_1, x_2, ... распределены по довольно простому закону. Действительно, равенство (2) равносильно утверждению, что величина

$$\xi_r = x_r - x_{r-1} \tag{9}$$

попадает в интервал от ξ_r до $\xi_r + d\xi_r$ с вероятностью

$$e^{-\xi_r} d\xi_r.$$

Такое выражение для вероятности найти определенную величину интервала между двумя последовательными точками в распределении точек по прямой линии совпадает с тем, которое получается в случае, когда эти точки распределены вдоль прямой независимо друг от друга, причем вероятность того, что одна из них попадет в заданный интервал dx на прямой, как раз равна dx. Следовательно, именно таким и будет закон распределения точек x.

Пусть два последовательных свободных пробега λ_{r-1} и λ_r образуют между собой угол ϑ_r; из соотношений (1), (8), (9) следует

$$\cos\vartheta_r = e^{-\frac{1}{2}\xi_r} = e^{-\frac{1}{2}(x_r - x_{r-1})}. \tag{10}$$

Положим далее

$$a = \ln \frac{w_0}{w_a}; \tag{11}$$

здесь a — среднее число столкновений, необходимое для снижения энергии от w_0 до w_a. Среднее значение r^2 мы вычислим в два последовательных этапа.

I. Допустим, что точки

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \tag{12}$$

заданы, и возьмем среднее по всем возможным значениям свободных пробегов и всем направлениям, совместимым с условиями (10) и (12).

II. После этого проведем усреднение по всем возможным значениям (12) и n.

I) Возводя в квадрат выражение (7), получаем

$$r^2 = \sum_0^n \lambda_r^2 + 2 \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=r+1}^{n} \lambda_r \lambda_s \cos\widehat{\lambda_r \lambda_s}. \tag{13}$$

Это выражение нужно усреднить, предполагая, что значения (12) заданы. Учитывая соотношение (10), легко находим

$$\overline{\lambda_r^2} = 2\lambda^2(x_r), \qquad \overline{\lambda_r} = \lambda(x_r),$$

$$\overline{\cos \widehat{\lambda_r \lambda_s}} = \cos\vartheta_{r+1}\cos\vartheta_{r+2}\ldots\cos\vartheta_s = e^{-\frac{1}{2}(x_s - x_r)}, \tag{14}$$

и отсюда

$$r^2 = 2\sum_0^n \lambda^2(x_r) + 2\sum_{0\leqslant r<s\leqslant n} \lambda(x_r)\lambda(x_s)e^{-\frac{1}{2}(x_s-x_r)}. \tag{15}$$

Это равенство следует понимать так, что усреднение проведено по заданным значениям (12).

II) Теперь нужно провести усреднение по x и n. Вспоминая, что значения x в интервале dx (между 0 и a) реализуются с вероятностью, равной dx, сразу получаем

$$\overline{\sum_0^n \lambda^2(x_r)} = \lambda^2(0) + \int_0^a \lambda^2(x)\,dx + \lambda^2(a).$$

Аналогичным образом находим, что

$$\overline{\sum_1^n \lambda(0)\lambda(x_s)e^{-\frac{x_s}{2}}} = \lambda(0)\int_0^a \lambda(x)e^{-\frac{1}{2}x}dx + \lambda(0)\lambda(a)e^{-\frac{1}{2}a},$$

$$\overline{\sum_1^{n-1} \lambda(x_r)\lambda(a)e^{-\frac{1}{2}(a-x_r)}} = \lambda(a)\int_0^a \lambda(x)e^{-\frac{1}{2}(a-x)}dx.$$

Остается вычислить среднее значение выражения

$$\sum_{1\leqslant r<s\leqslant n-1} \lambda(x_r)\lambda(x_s)e^{-\frac{1}{2}(x_s-x_r)}.$$

Для этого сначала проводится усреднение по возможным значениям x_s, которые попадают в интервал между x_r и a:

$$\sum_r \lambda(x_r)\int_{x_r}^a \lambda(x)e^{-\frac{1}{2}(x-x_r)}dx = \sum_r \lambda(x_r)\int_0^{a-x_r}\lambda(x_r+x)e^{-\frac{1}{2}x}dx.$$

И, наконец, усредняя по x, получаем

$$\int_0^a \lambda(\xi)\,d\xi\int_0^{a-\xi}\lambda(\xi+x)e^{-\frac{1}{2}x}dx.$$

Комбинируя эти различные средние значения, находим искомый результат

$$\overline{r^2} = 2\lambda^2(0) + 2\lambda^2(a) + 2\int_0^a \lambda^2(x)\,dx + 2\lambda(0)\int_0^a \lambda(x)\,e^{-\frac{1}{2}x}\,dx +$$
$$+ 2\lambda(0)\,\lambda(a)\,e^{-\frac{a}{2}} + 2\lambda(a)\int_0^a \lambda(x)\,e^{-\frac{1}{2}(a-x)}\,dx +$$
$$+ 2\int_0^a \lambda(\xi)\,d\xi \int_0^{a-\xi} \lambda(\xi+x)\,e^{-\frac{1}{2}x}\,dx. \qquad (16)$$

Эта формула указывает на постепенное возрастание среднего квадратичного расстояния нейтронов до источника по мере убывания их энергии (т. е. с увеличением a). Из последнего выражения получаем

$$\frac{d\overline{r^2}}{da} = 4\lambda^2(a) + 4\lambda(a)\,\lambda'(a) + \lambda(0)\,[\lambda(a) + 2\lambda'(a)]\,e^{-\frac{a}{2}} +$$
$$+ [\lambda(a) + 2\lambda'(a)]\int_0^a \lambda(x)\,e^{-\frac{1}{2}(a-x)}\,dx. \qquad (17)$$

Средняя длина свободного пробега $\lambda(0)$ быстрых нейтронов, испущенных источником Rn+Be, составляет в парафине от 5 до 6 *см*. С уменьшением энергии средняя длина свободного пробега убывает до тех пор, пока не достигнет, по-видимому, примерно 1 *см*; при этом энергия (все еще оставаясь выше 1 *эв*) принимает уже такие значения (вероятно, не выше 1000 *эв*), что нейтрон можно считать медленным. В этом последнем энергетическом интервале (между 1 и 1000 *эв*) λ является, вероятно, постоянной (см. также часть II). По этой причине соотношение (17) можно значительно упростить. В самом деле, третьим слагаемым в первой части можно пренебречь, так как оно содержит весьма малый множитель $e^{-a/2}$, а интеграл, значения которого группируются вблизи его верхнего предела, можно заменить выражением

$$\int_{-\infty}^{a} \lambda(a)\,e^{-(a-x)/2}\,dx = 2\lambda(a);$$

после этого получаем

$$\frac{d\overline{r^2}}{da} = 6\lambda^2(a). \qquad (18)$$

При этом мы положили также, в силу сказанного, $\lambda'(a) = 0$.

Эта формула применялась для определения отношения энергий двух групп медленных нейтронов (см. AF). Обозначим через w' и w'' их энергии и положим далее, что в энергетическом интервале между w' и w'' величина λ постоянна. Пусть $\overline{r'^2}$ и $\overline{r''^2}$ — средние квадратичные расстояния нейтронов этих двух групп до источника. Тогда, принимая во внимание, что изменение переменной a при переходе из одной группы в другую, сог-

ласно (11), равно $\ln(w''/w')$, из уравнения (18) получаем формулу

$$\ln \frac{w''}{w'} = \frac{\overline{r'^2} - \overline{r''^2}}{6\lambda^2}, \tag{19}$$

которая и была использована для определения w''/w'.

Если предположить, что в энергетическом интервале изучаемых групп средняя длина свободного пробега составляет 1 *см*, то равная 6 *см*^{2} разность средних квадратичных расстояний соответствует отношению энергий этих групп, равному *e*. Детальное обсуждение этого вопроса на основе экспериментальных результатов см. в AF.

Методом, аналогичным уже применявшемуся при выводе уравнения (16), можно легко получить такую же формулу для случая диффузии и замедления нейтронов в среде, содержащей наряду с водородом тяжелые атомы. Сохраняя обозначения, введенные в (8) и (11), обозначим через $\rho(x)$ отношение вероятностей столкновения нейтронов (энергия которых соответствует x) с тяжелым атомом и водородом. Кроме того, соударения с тяжелыми атомами будем считать абсолютно упругими, а передаваемой этим атомам энергией пренебрежем (ввиду их большой массы); наконец, предположим, что все направления скорости после столкновения с тяжелым атомом равновероятны, т. е. утрачивается всякая коррелированность с направлением движения до столкновения. При этих условиях оказывается, что среднее квадратичное расстояние до источника нейтронов с энергией w_a равно[4]

---

[4] Это равенство неверно, возможно, вследствие типографских опечаток. В обзорной статье Маршака (Rev. Mod. Phys., 1947, **19**, 185) приведено правильное выражение, выведенное разными авторами. Вместо

$$\rho = \frac{\mathfrak{N}_{\text{тяжелый элемент}}\,\sigma_{\text{тяжелый элемент}}}{\mathfrak{N}_{\text{H}}\sigma_{\text{H}}}$$

Маршак использует параметр

$$c = \frac{\mathfrak{N}_{\text{H}}\sigma_{\text{H}}}{\mathfrak{N}_{\text{H}}\sigma_{\text{H}} + \mathfrak{N}_{\text{тяжелый элемент}}\,\sigma_{\text{тяжелый элемент}}}.$$

При $c = \frac{1}{1+\rho}$ и $\overline{r^2} = 6L_s^2$ равенство (108) на стр. 211 статьи Маршака принимает вид:

$$\overline{r^2} = 2\lambda^2(0)[1+\rho(0)] + 2\lambda^2(a)[1+\rho(a)] + 2\lambda(0)\lambda(a)\,e^{-\int_0^a\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{1+\rho(x')}\right]dx'} +$$
$$+ 2\int_0^a \lambda^2(x)[1+\rho(x)]dx + 2\lambda(a)\int_0^a \lambda(x)\,dx\,e^{-\int_x^a\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{1+\rho(x')}\right]dx'} +$$
$$+ 2\lambda(0)\int_0^a \lambda(x)\,dx\,e^{-\int_0^x\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{1+\rho(x')}\right]dx'} + 2\int_0^a \lambda(x)\,dx\int_0^x \lambda(x')\,dx'\,e^{-\int_{x'}^x\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{1+\rho(x'')}\right]dx''}$$

— *Прим. ред. итало-амер. издания.*

$$\overline{r^2} = 2\lambda^2(0)\,[1+\rho(0)] + 2\lambda^2(a)\,[1+\rho(a)] + 2\int_0^a \lambda^2(x)\,[1+\rho(x)]\,dx +$$

$$+ \frac{2\lambda(0)}{1+\rho(0)}\int_0^a \lambda(x)\, e^{-\frac{x}{2}}\, dx e^{-\int_0^x \rho(\xi)\,d\xi} + 2\lambda(a)\int_0^a \frac{\lambda(x)}{1+\rho(x)} \times$$

$$\times e^{-\frac{x}{2}-\int_x^a \rho(\xi)\,d\xi} dx + 2\int_0^a \frac{\lambda(x)\,dx}{1+\rho(x)} \int_0^{a-x} \lambda(x+\xi)\, e^{-\frac{\xi}{2}-\int_0^\xi \rho(x+\xi)\,d\xi} d\xi. \quad (20)$$

Когда столкновения с тяжелыми атомами во внимание не принимаются, т. е. $\rho(x)$ полагается равным нулю, эта формула, естественно, сводится к выражению (16).

3. Тепловые нейтроны. До сих пор рассматривались нейтроны, которые принадлежат интервалу энергий от максимальной и до 1 *эв*, т. е. всегда выше не только энергии теплового движения ($\sim$ 1/30 *эв*), но также и энергии кванта $h\nu$ сил химической связи, удерживающей атомы водорода в данном веществе (между 1/2 и 1/10 *эв*). В этом энергетическом интервале допустимо пренебрегать тепловым движением и химической связью водорода. Однако, когда в результате ряда последовательных соударений энергия нейтрона падает ниже 1 *эв*, закон, по которому происходит дальнейшее замедление, несколько усложняется (ср. часть II). Но при этом следует помнить, что уже после десятка соударений энергия достигает тепловой области. Это означает, что появится значительное число нейтронов с тепловыми энергиями, распределение которых по скоростям будет более или менее максвелловским. Количество таких нейтронов ограничено вследствие того, что они — наряду с непрерывным образованием за счет замедления быстрых нейтронов — также и исчезают все время благодаря, главным образом, захвату ядрами водорода с образованием дейтерия (ср. часть II). Результат процесса захвата мы выразим через среднее время жизни тепловых нейтронов τ; предполагая, что источник создает Q тепловых нейтронов за секунду в практически бесконечном блоке парафина, полное число тепловых нейтронов, имеющихся в данный момент времени, равно

$$\mathfrak{N}_T = Q\tau. \quad (21)$$

По всей вероятности, поведение тепловых нейтронов и нейтронов с энергиями выше 1 *эв* различно и в случае упругих столкновений. В силу теоретических соображений (ср. часть II) следует ожидать, что при переходе энергии нейтрона w от больших к малым по сравнению с $h\nu$ (ν—частота колебаний водорода в молекуле парафина) значениям, средняя длина свободного пробега сокращается в четыре раза; при этом в пределе

очень малых w угловое распределение нейтронов после соударения стремится стать изотропным. Несмотря на достаточную малость величины $w/h\nu$ для тепловых нейтронов (около 1/10), условия применимости упомянутых выше предельных законов реализуются еще не полностью (см. раздел 11). Тем не менее в разделах 3, 5, 6 и 7 для упрощения наших рассуждений диффузия тепловых нейтронов будет предполагаться изотропной. Вводимая при этом малая ошибка будет, очевидно, занижать длину диффузии и завышать альбедо.

Пусть λ есть средняя длина свободного пробега тепловых нейтронов в парафине (0,3 *см*, ср. AF), v — их средняя скорость (при обычных температурах $v = 2{,}5 \cdot 10^5$ *см/сек*), а N — среднее число столкновений, которое испытывает тепловой нейтрон до своего захвата ($N = 140$; ср. AF, § 13). Ясно, что в этом случае справедливы следующие соотношения:

$$\tau = \frac{\lambda N}{v}, \qquad \mathfrak{N}_T = Q\tau. \tag{22}$$

Из них следует, что $\tau = 1{,}7 \cdot 10^{-4}$ *сек* (ср. также раздел 12).

Учитывая значительное число столкновений, испытываемых тепловым нейтроном в среде до захвата, можно, очевидно, с хорошей точностью уподобить его движение диффузионному. Легко записать дифференциальное уравнение для плотности тепловых нейтронов n как функции x, y, z и t. Обозначив через $q\,(x, y, z, t)$ число тепловых нейтронов, возникающих в единицу времени за счет замедления более быстрых нейтронов, можно сразу же написать уравнение

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\lambda v}{3}\Delta n - \frac{1}{\tau} n + q, \tag{23}$$

в котором первый член в правой части описывает результат диффузии (в самом деле, из классической кинетической теории известно, что $\lambda v/3$ — коэффициент диффузии). Второе слагаемое дает убыль нейтронов за счет захвата, а третье — образование тепловых нейтронов при замедлении. В стационарном случае — очевидно, наиболее важном — уравнение (23) [с учетом формулы (22)] сводится к

$$n = \frac{\lambda^2 N}{3}\Delta n + \frac{q\lambda N}{v}. \tag{24}$$

В качестве примера применения формулы (24) решим такую задачу. Имеется блок парафина, ограниченный слева плоскостью $x = 0$ и заполняющий все пространство справа от нее. Нужно определить вероятность того, что находящийся в точке a с положительной абсциссой тепловой нейтрон покинет парафин через плоскость $x = 0$ прежде, чем будет захвачен. Эта задача, очевидно, эквивалентна следующей: допустим, что в точке с абсциссой a образуется Q тепловых нейтронов в секунду; определить их долю, которая выходит из парафина через плоскость $x = 0$.

Чтобы решить задачу, преобразуем прежде всего уравнение (24), содержащее три независимых переменных x, y, z, к виду, содержащему только одну независимую переменную x. Для этого оказывается достаточным умножить обе части (24) на $dydz$ и проинтегрировать по y и z от $-\infty$ до $+\infty$. Полагая

$$\rho(x) = \iint n\,dy\,dz, \qquad f(x) = \iint q\,dy\,dz \tag{25}$$

и воспользовавшись очевидными соотношениями

$$\iint \frac{\partial^2 n}{dy^2}\,dy\,dz = \iint \frac{\partial^2 n}{dz^2}\,dy\,dz = 0,$$

находим

$$\rho(x) - \frac{\lambda^2 N}{3}\frac{d^2\rho}{dx^2} = \frac{\lambda N}{v} f(x). \tag{26}$$

В нашем случае функция $f(x)$ явно равна нулю при $x \neq a$, тогда как при $x = a$ она становится бесконечной, причем

$$\int f(x)\,dx = Q, \tag{27}$$

если интегрирование проводится по интервалу, содержащему a. Из этого свойства $f(x)$ следует, что, за исключением точки a, функция $\rho(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\rho - \frac{\lambda^2 N}{3}\frac{d^2\rho}{dx^2} = 0. \tag{28}$$

Ясно, что при $x = 0$ и $x = \infty$ функция $\rho(x)$ должна удовлетворять условиям

$$\rho(0) = 0, \qquad \rho(\infty) = 0. \tag{29}$$

Из (26) и (27) следует, что в особой точке a производная ρ испытывает разрыв, в то время как сама функция остается непрерывной, а именно:

$$\delta\rho(a) = 0, \qquad \delta\left(\frac{d\rho}{dx}\right)_{x=a} = -\frac{3}{v\lambda}Q. \tag{30}$$

Общее решение уравнения (28) дается линейной комбинацией двух частных решений

$$e^{\sqrt{\frac{3}{\lambda^2 N}}x}, \qquad e^{-\sqrt{\frac{3}{\lambda^2 N}}x}.$$

Вспоминая соотношения (29), немедленно находим, что выражения для $\rho(x)$ слева и справа от точки a имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \rho(x) &= A\left\{e^{\sqrt{\frac{3}{\lambda^2 N}}x} - e^{-\sqrt{\frac{3}{\lambda^2 N}}x}\right\} \quad \text{для} \quad 0 < x < a, \\ \rho(x) &= Be^{-\sqrt{\frac{3}{\lambda^2 N}}x} \quad \text{для} \quad x > 0; \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

здесь A и B — константы, которые легко определяются с помощью соотношений (30):

$$A = \frac{\sqrt{3N}}{2v} Qe^{-\sqrt{\frac{3}{\lambda^2 N}}a}, \qquad B = A\left(e^{2\sqrt{\frac{3}{\lambda^2 N}}a} - 1\right). \tag{32}$$

Число нейтронов, покидающих парафин в единицу времени, дается, очевидно, произведением коэффициента диффузии $\lambda v/3$ на производную ρ по x, взятую в точке $x = 0$. Поэтому это число равно

$$\frac{\lambda v}{3} \cdot 2A\sqrt{\frac{3}{\lambda^2 N}} = Qe^{-\sqrt{\frac{3}{\lambda^2 N}}a}. \tag{33}$$

Искомая вероятность $p(a)$ того, что выходящему из точки с абсциссой a нейтрону удастся покинуть парафин, равна, очевидно, отношению выражения (33) к Q, т. е.

$$p(a) = e^{-\sqrt{\frac{3}{\lambda^2 N}}a}. \tag{34}$$

Эта формула использовалась для измерения $\lambda^2 N$ (ср. AF).

Отметим, что подобно всем прочим результатам, которые могут быть получены из дифференциальных уравнений (23) и (24), этот результат в точности выполняется только в предельном случае очень больших N и очень малых λ, но таких, чтобы величина $\lambda^2 N$ оставалась конечной. В самом деле, как станет ясно из последующих разделов, вблизи граничной поверхности парафина, а точнее в пределах расстояния λ от нее, плотность нейтронов обнаруживает аномалии.

Для их исследования удобнее будет сначала упростить задачу, как показано в следующем разделе.

4. Одномерный случай. В этом разделе мы упростим изучение диффузии, прибегнув к рассмотрению воображаемого случая, когда нейтроны движутся в одном измерении, по прямой, и не являются, следовательно, свободными в пространстве. Подобная процедура имеет то преимущество, что на основании этого простого случая позволяет легко получить приближенные выражения, справедливые в реальном трехмерном случае.

В случае одномерной ситуации будем предполагать, что при каждом соударении (средняя длина свободного пробега λ) нейтрон с вероятностью $1/N$ может поглотиться. Если же, с другой стороны, это столкновение не приводит к захвату, то с одинаковой вероятностью нейтрон может отклониться как вправо, так и влево.

Прежде всего попытаемся найти для одномерного случая точное решение задачи, аналогичной обсуждавшейся в конце последнего раздела, а именно: имеется слой парафина, ограниченный абсциссами 0 и a. Тепловой нейтрон выходит из точки x, находящейся внутри парафина. Нужно найти вероятность $p(x)$ того, что нейтрон покинет парафин с левой стороны. В предельном случае $a = \infty$ эта задача является одномерным аналогом задачи, упомянутой выше.

Для ее решения составим уравнение для $p(x)$, исходя из следующего. Эту вероятность можно представить в виде суммы двух слагаемых:

(I) Вероятности того, что нейтрон выходит из точки x, начинает двигаться влево и покидает парафин без единого соударения, т. е.

$$\frac{1}{2} e^{-x/\lambda}.$$

(II) Вероятности того, что нейтрон испытывает первое столкновение между ξ и $\xi + d\xi$ (равной $^1/_2 e^{-|x-\xi|/\lambda} d\xi/\lambda$), что соударение это является упругим (вероятность этого есть $(N-1)/N$) и, наконец, что после всего этого нейтрону удается покинуть парафин через левую грань (вероятность такого события равна $p(\xi)$); вероятность (II) равна произведению всех перечисленных вероятностей, т. е.

$$\frac{1}{2} e^{\frac{-|x-\xi|}{\lambda}} \frac{d\xi}{\lambda} \frac{N-1}{N} p(\xi),$$

причем это выражение нужно проинтегрировать по ξ от 0 до a. Суммируя (I) и (II), находим следующее интегральное уравнение для $p(x)$:

$$p(x) = \frac{1}{2} e^{-x/\lambda} + \frac{N-1}{2\lambda N} \int_0^a p(\xi)\, e^{-\frac{|x-\xi|}{\lambda}} d\xi. \tag{35}$$

Легко проверить, что решение уравнения (35), можно представить в виде

$$p(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}, \tag{36}$$

где A, B и α — константы. Для этого достаточно подставить (36) в уравнение (35) и убедиться, что последнее удовлетворяется, если положить

$$\left.\begin{aligned} A &= -\frac{(N-\sqrt{N})\, e^{-a/\lambda\sqrt{N}}}{(\sqrt{N}+1)^2 e^{a/\lambda\sqrt{N}} - (\sqrt{N}-1)^2 e^{-a/\lambda\sqrt{N}}}, \\ B &= \frac{(N+\sqrt{N})\, e^{a/\lambda\sqrt{N}}}{(\sqrt{N}+1)^2 e^{a/\lambda\sqrt{N}} - (\sqrt{N}-1)^2 e^{-a/\lambda\sqrt{N}}}, \qquad \alpha = \frac{1}{\lambda\sqrt{N}}. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Эти формулы значительно упрощаются в том случае, когда парафин не ограничен справа ($a = \infty$). При этом они принимают вид

$$\left.\begin{aligned} A = 0, \quad B = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{N}+1}, \quad \alpha = \frac{1}{\lambda\sqrt{N}}, \\ p(x) = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{N}+1} e^{-\frac{x}{\lambda\sqrt{N}}} \end{aligned}\right\} \text{при} \quad a = \infty. \tag{38}$$

Решенная здесь задача позволяет легко определять (по-прежнему в одномерном случае) коэффициент отражения (альбедо) тепловых нейтронов, падающих на слой парафина. Допустим, что на такую парафиновую пластину, которая, как и прежде, простирается от $x = 0$ до $x = a$, слева падает тепловой нейтрон. Для пластины толщиной a мы будем принимать за альбедо $\beta(a)$ вероятность того, что после одного или более соударений нейтрон выходит через ту же самую поверхность, через которую вошел. Чтобы вычислить альбедо, заметим, что для попавшего в парафин нейтрона вероятность испытать первое столкновение в пределах от x до $x + dx$ и не поглотиться при этом дается, как и выше, выражением

$$\frac{N-1}{N} e^{-x/\lambda} \frac{dx}{\lambda}.$$

Как мы уже видели, начинающий двигаться из точки x нейтрон с вероятностью $p(x)$ покидает парафин через левую поверхность; отсюда следует, что полная вероятность выхода нейтрона с левой стороны, т. е. альбедо, оказывается в этом случае равной

$$\beta(a) = \frac{N-1}{N\lambda} \int_0^a p(x)\, e^{-x/\lambda} dx.$$

Пользуясь формулами (36) и (37) и интегрируя, получаем

$$\beta(a) = \frac{(N-1)\left[e^{a/\lambda\sqrt{N}} - e^{-a/\lambda\sqrt{N}}\right]}{(\sqrt{N}+1)^2 e^{a/\lambda\sqrt{N}} - (\sqrt{N}-1)^2 e^{-a/\lambda\sqrt{N}}} = \frac{N-1}{N+1+2\sqrt{N}\,\mathrm{cth}\,\dfrac{a}{\lambda\sqrt{N}}}. \tag{39}$$

Особенно важным представляется случай, когда толщина парафина a бесконечна. При этом альбедо можно найти либо из (39), либо непосредственно из (38):

$$\beta(\infty) = \frac{\sqrt{N}-1}{\sqrt{N}+1} = 1 - \frac{2}{\sqrt{N}} + \cdots \tag{40}$$

Последнее выражение, являющееся приближением для больших N, применяется наиболее часто.

Напишем также выражение *коэффициента пропускания* для слоя толщиной a, т. е. вероятность того, что нейтрон, падающий на этот слой слева, покинет его через правую поверхность. С помощью точно таких же рассуждений, как и при выводе альбедо, получаем, что этот коэффициент есть

$$\gamma(a) = e^{-a/\lambda} + \frac{N-1}{N\lambda}\int_0^a p(a-x)\, e^{-x/\lambda} dx = \\ = \frac{4\sqrt{N}}{(\sqrt{N}+1)^2 e^{a/\lambda\sqrt{N}} - (\sqrt{N}-1)^2 e^{-a/\lambda\sqrt{N}}}. \tag{41}$$

При $N = \infty$ значение $\gamma(a)$ сводится к

$$\gamma_\infty(a) = \frac{2\lambda}{a+2\lambda}. \tag{42}$$

В будущем нам понадобятся результаты исследования следующего вопроса (опять же для одномерного случая). Пренебрежем процессом гибели нейтронов ($N = \infty$) и допустим, что в блоке парафина, занимающем пространство между $x = 0$ и $x = \infty$, на некотором расстоянии (большом по сравнению с λ) от границы $x = 0$ возникает Q тепловых нейтронов в секунду. Нейтроны будут диффундировать через эту границу и уходить из парафина. Поскольку процесс гибели нейтронов предполагается несущественным, становится ясным, что поток нейтронов из парафина наружу должен при этих условиях равняться Q нейтронов в секунду. Чтобы этот поток оставался постоянным, плотность нейтронов $n(x)$ должна линейно возрастать в зависимости от x, т. е.

$$n(x) = A + Bx. \tag{43}$$

Константы A и B легко определяются, если потребовать, чтобы направленный влево поток нейтронов на любой глубине x равнялся бы Q. Следовательно, Q должно равняться разности чисел нейтронов, проходящих за одну секунду через точку x влево и вправо, т. е.

$$Q = \frac{1}{2}\,\frac{v}{\lambda}\int_0^\infty n(x+\xi)\, e^{-\xi/\lambda} d\xi - \frac{1}{2}\,\frac{v}{\lambda}\int_0^x n(x-\xi)\, e^{-\xi/\lambda} d\xi.$$

Подставляя выражение (43) в это равенство, сразу же убеждаемся в справедливости последнего, если только имеют место соотношения

$$Q = \lambda v B, \tag{44}$$

$$A = B\lambda. \tag{45}$$

Уравнение (43) можно, таким образом, переписать в виде

$$n(x) = (\lambda + x) B, \tag{46}$$

а из соотношения (44) можно получить коэффициент диффузии (одномерной)

$$D = \lambda v. \tag{47}$$

Как видно из уравнения (46), на границе парафина плотность нейтронов не обращается в нуль, и если бы мы экстраполировали кривую $n(x)$ за пределы парафина, то обнаружили, что плотность $n(x)$ становится нулевой на некотором расстоянии от границы, равном средней длине свободного пробега λ.

5. Альбедо и вероятность пропускания в трехмерном случае. Найденные в предыдущем разделе точные решения одномерной задачи позволяют легко получить довольно приближенные результаты, справедливые в реальном случае трехмерной диффузии нейтронов.

Рассмотрим с этой целью спроектированное на ось x движение теплового нейтрона, который испытывает ряд последовательных соударений в парафине. Оно будет возвратно-поступательным — довольно похожим на движение в одномерном случае. Отличие состоит в том, что при одномерном движении вероятность испытать столкновение экспоненциально зависит от расстояния, которое прошел нейтрон, а в случае проекции трехмерного движения она не является строго экспоненциальной. Более того, средняя длина свободного пробега λ' для спроецированного движения оказывается, естественно, короче, чем λ в случае истинного движения.

Чтобы надлежащим образом выбрать λ', можно, например, написать аналогичное (24) уравнение диффузии в одномерном случае. Вспоминая выражение (47), для коэффициента одномерной диффузии (в обозначениях λ' и v' вместо λ и v оно принимает вид $D' = \lambda' v'$), имеем

$$n - \lambda'^2 N \frac{d^2 n}{dx^2} = \frac{q\lambda' N}{v'}.$$

Сравнение этого уравнения с (24) наводит на мысль, что можно было бы положить

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\sqrt{3}}. \tag{48}$$

К такому же выбору λ' можно прийти и другим путем. Для этого заметим, что в трехмерном случае средний квадрат расстояния $\overline{r^2}$, на которое смещается точка после m соударений при средней длине свободного пробега λ, есть

$$\overline{r^2} = 2\lambda^2 m$$

(множитель 2 следует из того, что средний квадрат свободного пробега

равен удвоенному квадрату среднего свободного пробега). Средний квадрат проекции δx этого расстояния r равен, очевидно, $^1/_3\,\overline{r^2}$, т. е.

$$\overline{\delta x^2} = \frac{2}{3}\lambda^2 m.$$

С другой стороны, в одномерном случае было бы

$$\overline{\delta x^2} = 2\lambda'^2 m.$$

Эти выражения в точности одинаковы, если принять соотношение (48).

Из этого, следовательно, можно сделать вывод, что проекция трехмерной диффузии достаточно аналогична одномерной диффузии при средней длине свободного пробега, задаваемой выражением (48). Далее будет видно, что основная доля результатов предыдущего раздела с хорошей степенью приближения может использоваться также и в трехмерном случае.

В предыдущем разделе было получено выражение для вероятности $p(x)$ того, что тепловой нейтрон, начиная двигаться из точки x, покидает парафиновый слой толщиной a, ограниченный двумя плоскостями $x = 0$ и $x = a$. Подобная же задача в трехмерном случае состоит в следующем: дается слой парафина толщиной a, который ограничен плоскостями $x = 0$ и $x = a$; требуется найти вероятность $p(x)$ утечки теплового нейтрона из этого слоя через левую поверхность, причем нейтрон начинает двигаться из точки с абсциссой x.

В качестве приближенного выражения для $p(x)$ можно взять (36), где A, B и α определяются формулами, аналогичными (37). Однако вместо λ нужно подставить величину λ', определяемую равенством (48). Итак, получаем

$$\left.\begin{aligned} p(x) &= Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x},\\ A &= -\frac{(N-\sqrt{N})\,e^{-\alpha a}}{(\sqrt{N}+1)^2 e^{\alpha a} - (\sqrt{N}-1)^2 e^{-\alpha a}},\\ B &= \frac{(N+\sqrt{N})\,e^{\alpha a}}{(\sqrt{N}+1)^2 e^{\alpha a} - (\sqrt{N}-1)^2 e^{-\alpha a}}, \qquad \alpha = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{3}{N}}. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

При бесконечной толщине парафина a эти формулы, так же как и равенства (38), упрощаются, и мы находим, что

$$p(x) = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{N}+1}\, e^{-\sqrt{\frac{3}{N}}\frac{x}{\lambda}} \quad (\text{при } a = \infty). \tag{50}$$

Сравним это выражение с формулой (34): они оказываются тождественными (если положить $a = x$) в предельном случае, упоминавшемся в конце раздела 3. Отличие заключается в множителе $\sqrt{N}/(\sqrt{N}+1)$,

который описывает влияние возмущений со стороны поверхности на дифференциальное уравнение (24).

Зная $p(x)$, можно легко решать задачи, связанные с определением альбедо для парафина в трехмерном случае. Для частного случая парафина бесконечной толщины и в пределе очень больших N задачу альбедо рассматривал также Вик [5]; в ряде случаев его подход позволяет получить точный результат, в других — дает приближение, точность которого может быть сделана сколь угодно высокой. Те же результаты, которые будут приведены здесь, являются приближенными, однако они соответствуют более общим, чем рассмотренные Виком, случаям. Как мы увидим далее, наше приближение обычно оказывается достаточно хорошим.

В отличие от одномерной задачи, когда альбедо определено однозначно, в трехмерной ситуации оно зависит, очевидно, от угла падения нейтронов, будучи тем меньше, чем меньше угол падения. Чтобы обеспечить однозначный смысл альбедо, необходимо поэтому указывать угол падения либо задавать угловое распределение падающих нейтронов, или же, наконец, указывать способ, которым предполагается измерить коэффициент отражения. В разделе 7 будет дано определение того, что мы понимаем под «экспериментальным альбедо», которое представляет собой значение коэффициента отражения, измеренного в особенно подходящих условиях (они также будут сформулированы ниже). Важность экспериментального альбедо объясняется тем, что его определяют непосредственными измерениями и поэтому всякое сравнение теории и эксперимента опирается на эти измерения. Теория экспериментального альбедо будет представлена в разделе 7.

Теперь мы приведем несколько формул для вычисления альбедо нейтронов как функции угла падения ϑ. Ясно, что альбедо нейтронов, падающих под углом ϑ на слой парафина толщиной a, записывается как интеграл произведения вероятности того, что попавший в парафин нейтрон испытывает первое столкновение на глубине между x и $x + dx$ и не захватывается при этом,

$$\frac{N-1}{N} e^{-\frac{x}{\lambda \cos \vartheta}} \frac{dx}{\lambda \cos \vartheta},$$

и вероятности выхода этого нейтрона из парафина через ту же поверхность, через которую он вошел. Последняя вероятность равна $p(x)$, и искомое выражение для альбедо, таким образом, есть

$$\beta(a, \vartheta) = \frac{N-1}{N} \int_0^a e^{-\frac{x}{\lambda \cos \vartheta}} \frac{p(x)}{\lambda \cos \vartheta} dx. \qquad (51)$$

Подставляя вместо $p(x)$ его выражение (49), можно без труда проинтегрировать (51). Краткости ради мы приведем здесь точное решение лишь

[5] G. C. Wick. Rend. Lincei, 1936, 23, 774.

для случая, когда толщина парафина a бесконечно велика, так что $p(x)$ дается формулой (50). При этих условиях, интегрируя (51), получаем, что

$$\beta(\infty, \vartheta) = \frac{\sqrt{N}-1}{\sqrt{N}+\sqrt{3}\cos\vartheta} = 1 - \frac{1+\sqrt{3}\cos\vartheta}{\sqrt{N}}, \tag{52}$$

где последнее выражение справедливо при достаточно больших N.

Из формулы (52) можно получить выражение для альбедо при любом заданном угловом распределении падающих нейтронов. Так, например, если падающие нейтроны распределены по закону косинуса, то вероятность того, что направление движения нейтрона составляет с нормалью угол в пределах от ϑ до $\vartheta + d\vartheta$, равна $2\cos\vartheta\sin\vartheta d\vartheta$. Поэтому, когда имеет место распределение по косинусу, альбедо оказывается равным

$$\beta(\infty) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{N}-1}{\sqrt{N}+\sqrt{3}\cos\vartheta} 2\cos\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt{N}-1)\left[1 - \sqrt{\frac{N}{3}}\ln\left(1+\sqrt{\frac{3}{N}}\right)\right] = 1 - \frac{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{N}} + \cdots. \tag{53}$$

Чтобы судить о степени приближения, даваемого этим методом, заметим, что для косинусоидального закона Вик [5] дает точное асимптотическое выражение альбедо и получает

$$\beta(\infty) = 1 - \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{N}} + \cdots \tag{54}$$

Точное значение коэффициента при $1/\sqrt{N}$ равно, таким образом, $4/\sqrt{3} = 2{,}31$, тогда как из (53) получается $1 + 2/\sqrt{3} = 2{,}15$. Различие составляет всего 7%.

Подобным же образом можно вычислить коэффициент пропускания тепловых нейтронов, падающих под углом ϑ на слой парафина толщиной a. Так же, как и при выводе (51), находим, что этот коэффициент дается формулой

$$\gamma(a, \vartheta) = e^{-\frac{a}{\lambda\cos\vartheta}} + \frac{N-1}{N\lambda\cos\vartheta}\int\limits_0^a e^{-\frac{x}{\lambda\cos\vartheta}} p(a-x)\, dx. \tag{55}$$

При подстановке (49) вместо $p(x)$ последнее выражение легко интегрируется; приведем здесь конечный результат лишь для предельного случая $N = \infty$:

$$\gamma_\infty(a, \vartheta) = \frac{\lambda}{a+\frac{2\lambda}{\sqrt{3}}}\left[\cos\vartheta + \frac{1}{\sqrt{3}} - \left(\cos\vartheta - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)e^{-\frac{a}{\lambda\cos\vartheta}}\right]. \tag{56}$$

6. Угловое распределение нейтронов, выходящих из парафина. Через поверхность парафинового блока, в котором находится нейтронный источник, непрерывно выходят наружу тепловые нейтроны. Попытаемся приближенно определить закон углового распределения, который необходимо знать при обработке результатов наблюдений коэффициентов поглощения, а также и при решении целого ряда других задач (ср. AF). Вот простой метод отыскания такого закона.

В разделе 4 было показано, что в одномерном случае плотность нейтронов вблизи границы парафина $x = 0$ ведет себя в соответствии с выражением (46). Этот результат можно также обобщить (приближенно) и на трехмерный случай, если только заменить длину свободного пробега λ на λ', которая дается соотношением (48). Отсюда следует вывод, что плотность тепловых нейтронов $n(x)$ вблизи плоскости $x=0$, ограничивающей блок парафина слева, ведет себя как

$$n(x) = \text{const}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{3}} + x\right), \tag{57}$$

Полученный закон можно сформулировать и таким образом: если существующую внутри парафина плотность нейтронов экстраполировать за его пределы (т. е. к отрицательным значениям x), то оказывается, что она обращается в нуль на расстоянии от поверхности парафина, равном $\lambda/\sqrt{3}$. Относительно экспериментальной проверки этого свойства см. AF, § 11.

Поскольку частота столкновений, испытываемых тепловыми нейтронами в каждом элементе объема, пропорциональна, очевидно, $n(x)$, число упругих соударений тепловых нейтронов в единицу времени в пределах объема $d\tau$ получается равным

$$\mu\left(\frac{\lambda}{\sqrt{3}} + x\right)d\tau,$$

где μ — некоторая постоянная. Вероятность того, что испытавший одно из этих соударений нейтрон покинет парафин через плоскость $x = 0$ под углом от ϑ до $\vartheta + d\vartheta$ к нормали и без единого последующего столкновения, равна, очевидно,

$$e^{-\frac{x}{\lambda \cos\vartheta}}\frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{2}.$$

Отсюда находим число нейтронов, выходящих через элемент поверхности (площадью S), ограничивающей парафин, под углами от ϑ до $\vartheta + d\vartheta$ и испытывающих последнее столкновение в интервале абсцисс между x и dx:

$$\mu\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + x\right)Sdxe^{-\frac{x}{\lambda \cos\vartheta}}\frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{2}.$$

После интегрирования этого выражения по x в пределах от 0 до ∞ получим полное число тепловых нейтронов, выходящих через поверхность S под углами между ϑ и $\vartheta + d\vartheta$:

$$\frac{\lambda^2 S\mu}{2\sqrt{3}}(\cos\vartheta + \sqrt{3}\cos^2\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta.$$

Отсюда следует, что число тепловых нейтронов, выходящих из парафина по направлениям, которые лежат в телесном углу $d\omega$, пропорционально

$$(\cos\vartheta + \sqrt{3}\cos^2\vartheta)\, d\omega. \tag{58}$$

Угловое распределение тепловых нейтронов, покидающих парафин, было найдено численно Виком, и его результаты вполне удовлетворительно согласуются с выражением (58).

7. Экспериментальное альбедо. Сущность экспериментального метода, применяемого для определения альбедо (ср. AF), состоит в следующем. Имеется детектор R медленных нейтронов, которым служит тонкая плоская фольга, способная активироваться при поглощении одних только тепловых нейтронов. Будем считать этот детектор очень тонким не только в геометрическом, но также и в том смысле, что вероятность захвата теплового нейтрона при одиночном прохождении детектора достаточно мала (она определяется произведением толщины и коэффициента поглощения тепловых нейтронов). Кроме того, имеется фольга, способная полностью поглощать все падающие на нее тепловые нейтроны.

Проведем два измерения наведенной в детекторе активности, помещая его сначала [случай (а)] в определенное место внутри парафинового блока больших размеров, в котором находится источник, а затем в то же самое место [случай (б)], но закрыв одну сторону детектора поглощающей фольгой.

Пусть A и B означают активности, измеренные в случаях (а) и (б); покажем, что отношение A/B определяет альбедо.

Обозначим через $\mathfrak{N}$ число тепловых нейтронов, проходящих сквозь детектор в случае (б); в случае (а) число тепловых нейтронов, прошедших через детектор, по меньшей мере, один раз (нейтрон, который несколько раз пересек детектор, сосчитывается только один раз), равно $2\mathfrak{N}$, поскольку падающие на детектор в случае (а) нейтроны могут приходить с любой его стороны. Кроме того, можно показать, что нейтрон, однажды пройдя через детектор, в среднем пересечет его $1/(1-\beta)$ раз, где β — альбедо.

Действительно, вероятность того, что нейтрон, прошедший через детектор один раз, пройдет через него снова, равна, очевидно, альбедо. Отсюда следует, что среднее число прохождений в точности равно

$$1 + \beta + \beta^2 + \cdots = \frac{1}{1-\beta}.$$

Итак, число прохождений через детектор в случае (а) оказывается равным

$$\frac{2\mathfrak{N}}{1-\beta}.$$

Полагая активности A и B пропорциональными числу прохождений в случаях (а) и (б), получаем, таким образом,

$$\frac{A}{B}=\frac{2}{1-\beta}, \qquad (59)$$

а это и означает, что измерение отношения A/B позволяет получить альбедо β. Как уже неоднократно отмечалось, понятие альбедо определено неоднозначно, поскольку коэффициент отражения зависит от углового распределения падающих нейтронов. Так, например, для нейтронов, падающих нормально либо распределенных по косинусоидальному закону или же по закону типа (58), альбедо будут различны. Как можно видеть, соотношение (59), таким образом, дает точное, но лишь одно из возможных, определение альбедо. Альбедо, определяемое соотношением (59), мы назовем «экспериментальным», так как его значение получается непосредственно из опыта. Выражение для экспериментального альбедо следует из (59):

$$\beta_{\text{эксп}}=1-\frac{2B}{A}. \qquad (60)$$

Обсуждение деталей опыта по измерению экспериментального альбедо можно найти в работе AF. Там отмечается, как важно установить соотношение, которое связывает величину экспериментального альбедо со средним числом соударений N, испытываемых нейтроном до его захвата протонами парафина, поскольку в опытах измеряется именно экспериментальное альбедо.

Мы выведем подобное соотношение для предельного случая, представляющего практический интерес, а именно для случая очень больших N.

Пусть q — число тепловых нейтронов, образующихся за секунду в кубическом сантиметре вблизи детектора R. В случае (а) наличие детектора не приведет к возмущению распределения тепловых нейтронов вокруг него, поскольку, по предположению, R очень тонок. Можно заметить, что для теплового нейтрона полная длина пробега в парафине в среднем равна, очевидно, $N\lambda$. Тогда суммарное расстояние, покрываемое тепловыми нейтронами, которые образуются в единицу времени в единице объема, есть $qN\lambda$. Отсюда следует, что сумма длин пробега тепловых нейтронов в нашем детекторе (имеющем площадь S, толщину δ и объем $S\delta$) за единицу времени будет равна $S\delta qN\lambda$. Обозначив через K коэффициент поглощения тепловых нейтронов в веществе детектора и вспоминая, что последний предполагается весьма тонким (т. е. $K\delta\ll 1$), получаем число тепловых нейтронов, поглощаемых детектором в единицу времени: $K\delta SqN\lambda$. Естественно, что активность A будет пропорциональна этому числу, и, следо-

вательно, ее можно записать в виде

$$A = \eta K \delta S q N \lambda, \tag{61}$$

гда η — константа пропорциональности.

Для вычисления B заметим, что при экранировке одной стороны детектора фольгой, полностью поглощающей тепловые нейтроны, последние могут на него попасть только в том случае, если они появляются с неэкранированной стороны R. Далее, ни один нейтрон не может пересечь R более одного раза, поскольку уже после первого прохождения через R он будет захвачен поглотителем. Число падающих на поглотитель нейтронов можно определить, если вспомнить, что перед детектором (площадью S) на расстоянии от него между x и $x + dx$ образуется $Sqdx$ тепловых нейтронов в секунду. Вероятность того, что один из них достигнет детектора, дается в нашем случае (N очень велико) формулой (34), куда вместо a следует подставить x:

$$p(x) = e^{-\sqrt{\frac{3}{\lambda^2 N}}\, x}.$$

Поэтому число падающих на детектор нейтронов равно

$$Sq\int_0^\infty e^{-\sqrt{\frac{3}{N}}\,\frac{x}{\lambda}}\,dx = Sq\lambda\sqrt{\frac{N}{3}}\,.$$

Чтобы узнать, сколько из этих нейтронов будет захвачено в R, нужно знать их угловое распределение. Допустим, что оно описывается выражением (58). Очевидно, что в действительности присутствие слоя, полностью поглощающего тепловые нейтроны [случай (б)], изменит распределение нейтронов в его окрестности так, что оно сделается похожим на распределение вблизи границы парафинового блока. Проведенный на основе выражения (58) элементарный расчет показывает, что среднее значение расстояния, которое проходит в детекторе (толщиной δ) падающий на него тепловой нейтрон, есть

$$\sqrt{3}\,\delta;$$

отсюда полное число поглощенных детектором нейтронов будет равно $K\delta Sq\lambda\sqrt{N}$. Активность B пропорциональна этому числу, причем с той же константой η, что и в (61):

$$B = \eta K \delta S q \lambda \sqrt{N}. \tag{62}$$

Теперь, используя равенства (61) и (62), получаем из (60) значение экспериментального альбедо:

$$\beta_{\text{эксп}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{N}}\,. \tag{63}$$

Эта формула совпадает с приближенным результатом, найденным Виком[5] с помощью численных расчетов.

Выполненные в парафине измерения дали значение экспериментального альбедо $\beta = 0{,}82$ (ср. AF), пользуясь которым можно найти из (63) значение N; получается, что $N = 123$. Если же учесть тот факт, что даже для тепловых нейтронов существует слабая корреляция между направлениями следующих друг за другом свободных пробегов, то значение N должно несколько увеличиться.

8. Логарифмическая ширина групп. Согласно нашим теперешним представлениям, группы медленных нейтронов, за исключением группы C, сформированной по существу из тепловых нейтронов, соответствуют сравнительно узким энергетическим полосам. Их можно характеризовать значениями энергий $w_{\min}$ и $w_{\max}$, ограничивающих данную полосу энергий. Здесь мы обсудим принципы определения величины

$$\ln \frac{w_{\max}}{w_{\min}},$$

которую назовем *логарифмической шириной* группы. Описание реального опыта и различных необходимых поправок можно найти в статье AF.

Заметим, что логарифмическая ширина группы имеет непосредственный физический смысл — в силу сказанного нами в первой части раздела 2; действительно, она представляет собой среднее число столкновений, испытываемых нейтроном, пока он принадлежит данной группе. Это справедливо, конечно, лишь для групп с энергиями выше 1 *эв*, так что оговоренные в разделах 1 и 2 посылки остаются в силе. Во всех следующих далее рассуждениях мы ограничимся этими случаями.

Процедура определения логарифмической ширины опирается на сравнение активностей, одна из которых наведена в детекторе G исследуемой группы g, а другая — в детекторе R тепловой группы; при этом детектор R имеет такую же, как и G, площадь, и экранирован [как в случае (б) предыдущего раздела] с одной стороны фольгой, которая полностью поглощает тепловую группу. Для простоты положим, что оба детектора достаточно тонки в том же смысле, что и в предыдущем разделе. В противном случае потребовалось бы вводить поправки на поглощение электронов и нейтронов в самом детекторе.

Чтобы понять существо метода, допустим, во-первых, что в безграничном блоке парафина повсюду образуется q быстрых нейтронов в единицу времени и в единице объема. В результате столкновений эти нейтроны постепенно замедляются до тех пор, пока не будут иметь тепловых скоростей и не начнут захватываться присутствующими в парафине протонами. Активность B, наведенная в детекторе R тепловых нейтронов в том случае, когда он полностью экранирован с одной стороны поглотителем тепловых ней-

тронов, дается формулой (62), как и для случая (б) предыдущего раздела. Для определения же активности детектора G (группы g) заметим, что в соответствии с (6) плотность нейтронов со скоростями от v до $v + dv$, принадлежащих группе g, дается выражением

$$n(v)\,dv = \frac{2q\lambda_g}{v^2}\,dv,$$

где λ_g — средняя длина свободного пробега нейтронов этой группы. Из него сразу же можно вычислить число нейтронов со скоростями между v и $v + dv$, которые проходят через детектор G за единицу времени и составляют с нормалью угол, лежащий в пределах от ϑ до $\vartheta + d\vartheta$; оно равно

$$2q\lambda_g S\frac{dv}{v}\sin\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta.$$

Если δ — толщина детектора, а коэффициент поглощения нейтронов группы g в нем равен K_g, то доля поглощенных нейтронов (памятуя о предположении $K_g\delta \ll 1$) будет $K_g\delta/\cos\vartheta$; отсюда полное число поглощенных g-нейтронов есть

$$2qS\lambda_g K_g\delta\int\limits_{v_{\min}}^{v_{\max}}\frac{dv}{v}\int\limits_0^{\pi/2}\sin\vartheta\,d\vartheta = 2qS\lambda_g K_g\delta\ln\frac{v_{\max}}{v_{\min}},$$

где $v_{\min}$ и $v_{\max}$ — скорости, которые соответствуют энергиям $w_{\min}$ и $w_{\max}$, т. е. $\ln v_{\max}/v_{\min} = {}^1/_2\ln w_{\max}/w_{\min}$. Наведенная в детекторе G активность пропорциональна числу нейтронов, поглощаемых в единицу времени. Если η_G — константа пропорциональности, то эта активность равна

$$A_g = \eta_G qS\lambda_g K_g\delta\ln\frac{w_{\max}}{w_{\min}}. \tag{64}$$

В экспериментальной практике для регистрации тепловых нейтронов (детектор R) и нейтронов группы g (детектор G) используется обычно один и тот же объект — с надлежащими поглотителями и без них. В этих условиях, очевидно, $\eta_G = \eta$. Таким образом, если бы можно было создать условия, при которых число q возникающих в единицу времени и в единице объема тепловых нейтронов было бы постоянным по большому объему парафина, то из (62) и (64) следовало бы

$$\ln\frac{w''}{w'} = \frac{K\lambda\sqrt{N}A_g}{\lambda_g K_g B}. \tag{65}$$

В действительности же определить $\ln(w_{\max}/w_{\min})$ непосредственно с помощью этой формулы нельзя, поскольку равномерное распределение быстрых нейтронов обеспечить нелегко из-за того, что они, как правило, возникают в практически точечном источнике. Поскольку расстояние,

на которое диффундируют тепловые нейтроны, больше соответствующей величины для нейтронов других групп, отношение A_g/B оказывается не постоянным, а убывающим с ростом расстояния до источника. Обойти это неудобство можно простым путем, проинтегрировав равенства (62) и (64) по всему объему (а если необходимо, то и по всем ориентациям детектора). После этого получается результат, который, естественно, уже более не зависит от равномерности q, но лишь от $Q = \int q d\tau$, т. е. от полного числа быстрых нейтронов, образующихся в одну секунду. Положив снова $\eta_G = \eta$, находим выражения

$$\int B d\tau = \eta K \delta S Q \lambda \sqrt{N}, \qquad \int A_g d\tau = \eta K_g \delta S Q \lambda_g \ln \frac{w_{\max}}{w_{\min}}, \tag{66}$$

из которых получим

$$\ln \frac{w_{\max}}{w_{\min}} = \frac{K\lambda \sqrt{N}}{\lambda_g K_g} \frac{\int A_g d\tau}{\int B d\tau}. \tag{67}$$

Эта формула — с поправкой на поглощение в детекторе — использовалась в работе AF для вычисления логарифмических ширин.

Часть II

МЕХАНИЗМ СТОЛКНОВЕНИЯ НЕЙТРОНОВ С АТОМАМИ ВОДОРОДА

Эта часть посвящена квантовомеханическому исследованию столкновения медленных нейтронов с протонами парафина. В частности, здесь будет рассмотрен механизм таких соударений с учетом того обстоятельства, что атомы водорода не являются свободными, а можно считать, что они удерживаются в каких-то равновесных положениях упругой силой. Кроме того, мы обсудим процесс захвата нейтрона протоном, в результате которого образуется ядро дейтерия.

9. Столкновения медленных нейтронов с протонами без учета влияния химической связи. До тех пор, пока энергия нейтрона велика по сравнению с энергией химической связи водорода в парафине, можно, очевидно, не учитывать влияние этой связи при изучении соударений и считать протон свободным. Вернее, как уже отмечалось, такой подход оправдан, пока энергия нейтронов $w \gg h\nu$, т. е. много больше энергии кванта, которому отвечает частота ν упругой связи атомов водорода. Поскольку $h\nu$ составляет, самое большее, примерно 0,5 *эв*, можно считать протон практически

свободным, если нейтроны обладают энергиями выше 1 *эв*. В этом случае задача о столкновении нейтрона и протона становится совсем простой, поскольку при переходе к относительным координатам этих двух частиц мы сразу же возвращаемся к задаче о столкновении частицы с фиксированным рассеивающим центром, а эта задача решается стандартными методами квантовой теории столкновений. При вычислении относительного движения нужно, конечно, за массу принять $M/2$, где M — общее для нейтрона и протона значение массы.

Ясно, что даже в этом простом случае детали теории столкновений зависят от предположений относительно характера сил, действующих между нейтроном и протоном. Далее, следует принять во внимание обе возможные ориентации спина (параллельную и антипараллельную) нейтрона и протона.

Будем полагать, как это обычно делается [6], что радиус действия ρ силы между протоном и нейтроном несколько меньше 10^{-12} *см*. Такая сила может быть получена из потенциала обычного типа или же она может представлять обменное взаимодействие, согласно гипотезам Гейзенберга и Майораны.

Хорошо известно, что спин нейтрона равен единице. Представляется поэтому, что его основной конфигурацией следует считать (в обозначениях атомной спектроскопии) ^3S, спин которой есть сумма спинов нейтрона и протона. Энергия связи этого терма равна $2{,}2 \cdot 10^6$ *эв*. Кроме основного терма ^3S, можно рассмотреть также и синглетный терм ^1S, для которого спины протона и нейтрона антипараллельны. Если бы взаимодействие протон — нейтрон не зависело от ориентации спинов, оба эти терма должны были бы совпадать. Если же существует различие сил в этих двух случаях, терм ^1S должен, по-видимому, располагаться выше основного терма ^3S; он будет реальным или виртуальным соответственно тому, положительна или отрицательна его энергия связи.

Предполагая, что радиус действия силы протон — нейтрон очень мал по сравнению с де-бройлевской длиной волны, задачу столкновения можно рассмотреть простым методом, которым пользовались Бете и Пайерлс. В результате для сечения соударения получается следующее выражение [7]:

$$\sigma = \frac{h^2}{\pi M}\left[\frac{3}{4}\frac{1}{|w_0| + \frac{1}{2}w} + \frac{1}{4}\frac{1}{|w_1| + \frac{1}{2}w}\right], \qquad (68)$$

в котором w_0 и w_1 означают энергии термов ^3S и ^1S, а w — энергию нейтрона. Когда w очень мала (мала по сравнению с w_0 и w_1, но все еще больше

[6] H. A. Bethe, R. Peierls. Proc. Roy. Soc., 1934, A148, 146, A149, 176.

[7] Нужно учитывать тот факт, что отношение статистических весов синглетного и триплетного состояний равно 1 : 3; см. также M. Goldhaber. Nature (London), 1936, **137**, 824.

1 *эв*), выражение (68) приводит к сечению столкновения, не зависящему от w:

$$\sigma_1 = \frac{h^2}{\pi M}\left[\frac{3}{4}\frac{1}{|w_0|} + \frac{1}{4}\frac{1}{|w_1|}\right]. \tag{69}$$

Экспериментально установлено (ср. AF), что по меньшей мере для двух групп нейтронов, обладающих энергиями выше 1 *эв*, средняя длина свободного пробега в парафине приблизительно одинакова, а именно

$$\lambda_g = 1 \text{ см}. \tag{70}$$

Это значение λ_g соответствует сечению столкновения $\sigma_1 = 12{,}8 \cdot 10^{-24}$ *см*^{2}. Принимая это значение и полагая $w_0 = -2{,}2 \cdot 10^6$ *эв*, находим из соотношения (69):

$$|w_1| = 1{,}86 \cdot 10^{-7} \text{ эрг} = 1{,}16 \cdot 10^5 \text{ эв}.$$

Таким образом, в рамках этой теории относительно большое сечение столкновения медленных нейтронов с водородом приводит к выводу, что терм ^1S — реальный или виртуальный — обладает сравнительно малой по абсолютному значению энергией связи.

Подставив в (68) полученное значение w_1, можно оценить сечение столкновения для быстрых нейтронов; оно оказывается слишком малым. Это связано, вероятно, с неточностью расчета по Бете и Пайерлсу в применении к нейтронам с энергиями в несколько *эв*. С другой стороны, величина сечения столкновения, полученная из опытов Голдхабера [7] по измерению средней длины свободного пробега нейтронов с энергией около 200 000 *эв*, образующихся при ядерном фотоэлектрическом эффекте в дейтерии, облучаемом γ-лучами ThC″, меньше, чем это следует из (68). Для определенных выводов, однако, точности измерений недостаточно.

10. Рассеяние нейтронов на связанных атомах водорода. Как уже неоднократно отмечалось, при уменьшении энергии нейтронов ниже 1 *эв* перестает быть законным пренебрежение химической связью атомов водорода в парафине. Исследуем теперь столкновение нейтрона с ядром водорода, учитывая химические силы, которые стремятся удержать протон вблизи положения равновесия.

Рассмотрим эту задачу с помощью следующих критериев для сделанных приближений. Пусть ρ — радиус действия сил протон—нейтрон, a — порядок величины длины рассеяния нейтрон—протон, λ — порядок величины де-бройлевской длины волны, соответствующей импульсам нейтрона и протона. Приближения, которые мы намереваемся здесь использовать, законны в том случае, если можно найти некую длину R, одновременно удовлетворяющую неравенствам

$$R \ll \lambda, \qquad R \gg \rho, \qquad R \gg a. \tag{71}$$

Эти условия достаточно хорошо выполняются в случае столкновения медленных нейтронов с протонами парафина. Обозначим через x, y, z и X, Y, Z координаты нейтрона и протона и пренебрежем влиянием спина обеих частиц, несущественным для интересующих нас здесь эффектов. Гамильтониан такой системы можно записать в виде суммы кинетических энергий обеих частиц, потенциальной энергии $U(X, Y, Z)$ химических сил, воздействующих на атом водорода, и энергии взаимодействия нейтрона и протона. Последнюю будем представлять как потенциальную энергию $g(r)$, являющуюся функцией расстояния между нейтроном и протоном. Если бы даже это взаимодействие было взаимодействием типа Гейзенберга или Майораны, вычисления можно было бы провести по существу тем же самым методом.

Запишем уравнение Шредингера для этой системы:

$$-\frac{h}{2\pi i}\dot{\psi} = -\frac{h^2}{8\pi^2 M}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial Z^2}\right) + U\psi + g(r)\psi. \tag{72}$$

Скаляр поля [8] $\psi(x, y, z, X, Y, Z)$ будет, очевидно, функцией с регулярным поведением (в том смысле, что ее вариации будут малы при изменениях аргументов, малых по сравнению с λ) всюду, кроме областей, где r мало. Учитывая неравенства (71), можно легко проверить, что нерегулярности имеют место при $r < R$ (см. также обсуждение рис. 1). Введем новую функцию $\overline{\psi}$, которая получается из ψ с помощью такого усреднения:

$$\overline{\psi}(x, y, z, X, Y, Z) = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3}\iiint \psi(\xi, \eta, \rho, X, Y, Z)\, d\xi\, d\eta\, d\rho; \tag{73}$$

здесь интеграл распространяется на сферу радиуса R с центром в точке x, y, z. Поведение функции $\overline{\psi}$ будет, очевидно, регулярным даже при малых значениях r.

Теперь найдем аналогичное шредингеровскому уравнение для $\overline{\psi}$. С этой целью усредним обе части уравнения (72) по объему сферы радиуса R и с центром в x, y, z. Обозначая эту операцию, как и в (73), чертой, после очевидных преобразований получаем

$$-\frac{h}{2\pi i}\dot{\overline{\psi}} = -\frac{h^2}{8\pi^2 M}\left(\frac{\partial^2\overline{\psi}}{\partial x^2} + \cdots + \frac{\partial^2\overline{\psi}}{\partial X^2} + \cdots\right) + U\overline{\psi} + \overline{g(r)\psi}. \tag{74}$$

Для вычисления последнего слагаемого заметим, что в сингулярной области $r < R$ изменения ψ связаны главным образом с влиянием потенциальной энергии $g(r)$; она отлична от нуля лишь в весьма малой области, достигая, однако, там очень больших значений. При $r < R$ можно также

[8] См. примечание на стр. 232.— *Прим. ред.*

пренебречь изменениями функции ψ, обусловленными другими членами гамильтониана, и записать ее в форме

$$\psi = c\chi(r), \tag{75}$$

где функция $\chi(r)$ есть решение уравнения

$$\chi''(r) + \frac{2}{r}\chi'(r) = \frac{4\pi^2 M}{h^2} g(r)\chi(r), \tag{76}$$

т. е. решение уравнения Шредингера (только для S-волн, ибо лишь они существенны на коротких расстояниях) для относительного движения двух частиц (координата r, приведенная масса $M/2$) с учетом только потенциальной энергии $g(r)$; величина c — плавно меняющаяся функция.

Если нормировать $\chi(r)$ так, чтобы при больших r она достигала единицы, то связь между (75) и значениями ψ при $r \gg R$ получим, отождествляя функцию c с медленно меняющейся функцией $\overline{\psi}$. Таким образом, в общем виде можно написать:

$$\psi(x, X) = \overline{\psi}(x, X)\,\chi(r). \tag{77}$$

Если положить $\chi(r) = \frac{1}{r}v(r)$, то уравнение (76) принимает вид

$$v''(r) = \frac{4\pi^2 M}{h^2} g(r)\,v(r). \tag{78}$$

Поведение $v(r)$ представлено на рис. 1. При $r > \rho$ график $v(r)$ есть прямая линия. В силу условия нормировки наклон асимптоты к кривой $v(r)$ должен составлять 45°, т. е. получаем

$$v(r) = a + r \quad \text{при} \quad r > \rho. \tag{79}$$

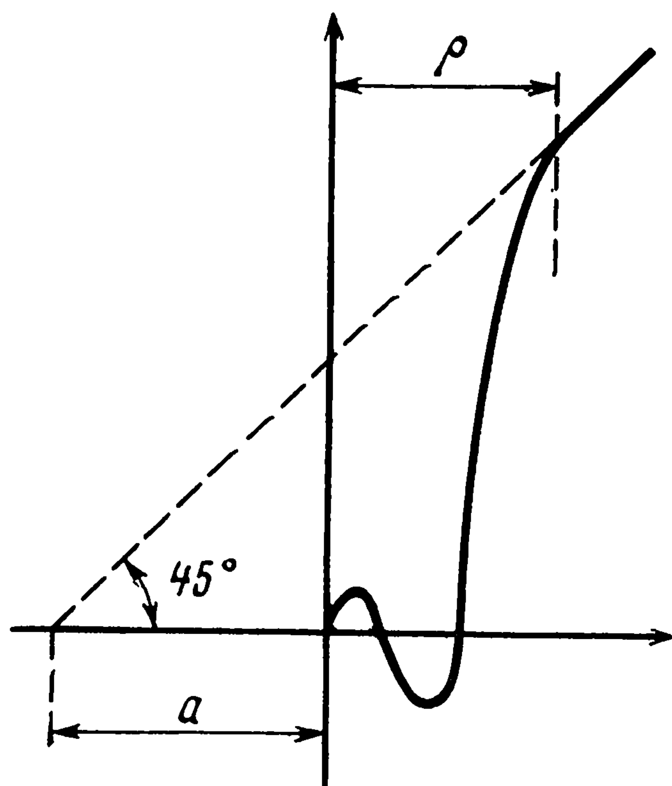


Рис. 1

Смысл константы a ясен из рисунка.

Принимая во внимание неравенства (71) и пренебрегая ρ по сравнению с R, мы видим, что $\overline{g(r)\psi}$ будет отлична от нуля лишь тогда, когда расстояние между точками x, y, z и X, Y, Z меньше R. Если это условие выполняется, то найдем, что

$$\overline{g(r)\psi} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3}\int g(r)\,\overline{\psi}(x, X)\,\chi(r)\,dr =$$

$$= \frac{4\pi\overline{\psi}(x, X)}{\frac{4}{3}\pi R^3}\int_0^\infty g(r)\,v(r)\,r\,dr$$

(вспомним, что $\rho \ll R$, а $\overline{\psi}$ заметно не меняется в области с размерами R). Этот интеграл легко вычисляется с помощью (78) и (79) и того факта,

что $v(0) = 0$ (см. рис. 1):

$$\int\limits_0^\infty g(r)\,v(r)\,r\,dr = \frac{h^2}{2\pi^2 M}\int\limits_0^\infty v''(r)\,r\,dr = \frac{h^2}{4\pi^2 M}\Big|v'r - v\Big|_0^\infty = -\frac{h^2 a}{4\pi M}.$$

И, наконец, получаем

$$\overline{g(r)\,\psi} = -\frac{h^2 a}{\pi M}\,\overline{\psi}(x, X)\,\delta_R(r),$$

где функция $\delta_R(r)$ равна нулю для $r > R$ и равна $3/(4\pi R^3)$ во всем остальном пространстве (так что интегрирование ее по всему пространству дает единицу). Подставив это выражение в уравнение (74), получаем искомое уравнение для $\overline{\psi}$

$$-\frac{h}{2\pi i}\,\dot{\overline{\psi}} = -\frac{h^2}{8\pi^2 M}\left(\frac{\partial^2\overline{\psi}}{\partial x^2} + \cdots + \frac{\partial^2\overline{\psi}}{\partial X^2} + \cdots\right) + \\ + U(X, Y, Z)\,\overline{\psi} - \frac{h^2 a}{\pi M}\,\delta_R(r)\,\overline{\psi}. \qquad (80)$$

Столкновение нейтрона с протоном определяется наличием последнего слагаемого, которое описывает взаимодействие этих частиц. Легко убедиться, что с помощью уравнения (80) можно рассчитать соударение в первом борновском приближении (действительно, описывающий взаимодействие член приводит лишь к незначительной нерегулярности $\overline{\psi}$). Более того, при вычислении матричных элементов члена взаимодействия функцию δ_R можно отождествить с трехмерной δ-функцией Дирака, поскольку содержащиеся в (80) величины медленно меняются в той области, где δ_R отлична от нуля.

Прибегнув к классическому методу Борна, можно без труда найти следующее выражение для сечения $\sigma_{m,\,n,\,d\omega}$ процесса столкновения, при котором атом водорода переходит из начального состояния m в конечное n, а нейтрон рассеивается в направлении, лежащем в пределах элемента телесного угла $d\omega$:

$$\sigma_{m,\,n,\,d\omega} = 4a^2\,\frac{p}{p_0}\,d\omega\left|\int u_m^* u_n e^{\frac{2\pi i}{h}(\mathbf{p}-\mathbf{p}_0)\cdot\mathbf{X}}\,d\tau\right|^2. \qquad (81)$$

Здесь $\mathbf{p}_0$ означает импульс нейтрона до столкновения; $u_m(X, Y, Z)$ и $u_n(X, Y, Z)$ — собственные функции, описывающие состояние протона до и после соударения (соответствующие им собственные значения энергии равны w_m и w_n); $\mathbf{p}$ — импульс нейтрона после столкновения; его величина согласно закону сохранения энергии определяется соотношением

$$\frac{p^2}{2M} = \frac{p_0^2}{2M} + w_m - w_n, \qquad (82)$$

а направление совпадает с направлением элемента телесного угла $d\omega$.

Прежде чем перейти к дальнейшим приложениям, рассмотрим два крайних случая выражения (81).

1) *Случай, когда атомы водорода связаны сильно.* (Вернее, когда мала по сравнению с де-бройлевской длиной волны нейтрона та область, в которой отлична от нуля u_m — собственная функция начального состояния протона.) В этом случае экспоненциальный член под интегралом в выражении (81) можно считать постоянным в области, где множитель u_m отличен от нуля. При этом из ортогональности собственных функций протона следует, что этот интеграл отличен от нуля лишь для $n = m$, а квадрат его модуля равен тогда 1. Таким образом, мы приходим к выводу, что в данном случае единственно возможными оказываются столкновения, при которых энергия атома не изменяется и, следовательно, нейтрон — согласно соотношению (82) — сохраняет всю кинетическую энергию ($p = p_0$). Из выражения (81) следует сечение процессов столкновения, при которых нейтрон рассеивается в элемент телесного угла $d\omega$:

$$\sigma_{d\omega} d\omega = 4a^2 d\omega; \tag{83}$$

рассеяние, как можно видеть, является изотропным. Полное сечение получается при интегрировании предыдущего выражения по всему телесному углу:

$$\sigma = 16\pi a^2. \tag{84}$$

2) *Случай свободных атомов водорода.* В этой задаче собственные функции протона u_m и u_n можно характеризовать отвечающими им импульсами $\mathbf{p}_m$ и $\mathbf{p}_n$; записываются они в обычной экспоненциальной форме. Можно легко установить, что интеграл в (81) отличен от нуля, если только имеет место равенство

$$\mathbf{p}_n + \mathbf{p} = \mathbf{p}_m + \mathbf{p}_0, \tag{85}$$

выражающее закон сохранения импульса. Если равенство (85) выполняется, то квадрат модуля упомянутого выше интеграла равен 1. Далее, соотношение (82) принимает вид

$$p_n^2 + p^2 = p_m^2 + p_0^2. \tag{86}$$

Перейдем к системе, в которой атом водорода сначала покоится, т. е. где $p_m = 0$; тогда равенства (85) и (86) принимают вид

$$\mathbf{p}_n + \mathbf{p} = \mathbf{p}_0, \qquad p_n^2 + p^2 = p_0^2. \tag{87}$$

Отсюда из элементарных соображений получаем

$$p = p_0 \cos\vartheta, \tag{88}$$

где ϑ — угол между p и p_0. В силу положительной определенности p и p_0 оказывается, что рассеяние происходит только под острыми углами.

Из формулы (81) получаем дифференциальное сечение рассеяния:

$$\sigma_{d\omega} d\omega = 4a^2 \cos\vartheta \, d\omega. \qquad (89)$$

Интегрируя по полусфере $\cos\vartheta > 0$, находим полное сечение рассеяния:

$$\sigma = \int_0^{\pi/2} 4a^2 \cos\vartheta \, 2\pi \sin\vartheta \, d\vartheta = 4\pi a^2. \qquad (90)$$

Сравнение этого равенства с формулой (84) показывает, что сечение рассеяния на сильно связанных атомах водорода вчетверо больше, чем на свободных. Это значит, что при уменьшении кинетической энергии нейтрона от значений выше 1 *эв* (когда атомы водорода можно считать практически свободными) до гораздо меньших значений (при которых, наоборот, атомы водорода следует считать сильно связанными) сечение рассеяния возрастает вчетверо, а средняя длина свободного пробега, следовательно, во столько же раз уменьшается. В следующем разделе будет более ясно показано, что в случае тепловых нейтронов мы находимся достаточно близко к этому предельному значению, хотя оно и не достигается полностью. В действительности же следует ожидать, что средняя длина свободного пробега — значительно меньшая для тепловых нейтронов, чем для медленных с энергиями выше 1 *эв*,— все же несколько больше одной четверти последней. Кроме того, из формулы (83) следует, что в пределе крайне малых энергий нейтрона рассеяние становится изотропным. Для тепловых нейтронов этот результат также носит приближенный характер, поскольку для таких нейтронов наблюдается некоторое преобладание рассеяния на малые углы, о чем будет сказано в следующем разделе.

11. Упруго связанные атомы водорода. Для исследования ситуации, промежуточной между рассмотренными выше двумя предельными случаями, ограничимся предположением, что атом водорода удерживается в положении равновесия (начало координат) изотропной упругой силой. В этом случае, как будет видно, выражения различных сечений рассеяния могут быть получены в замкнутой форме. Далее, положим, что колебательному состоянию, в котором атом водорода находится сначала, отвечает минимальная энергия.

Если ν — частота колебаний атома водорода, то энергия его колебательных состояний (отсчитываемая ради удобства от основного состояния, которое принимается за нуль) задается равенством

$$w_n = nh\nu, \qquad (91)$$

где n — целое число. Разложив движение осциллятора на три его компоненты X, Y, Z, можно записать полное квантовое число n через три пар-

циальных:

$$n = n_1 + n_2 + n_3, \tag{92}$$

которые полностью определяют колебательное состояние. Квантовые числа начального состояния m равны нулю по определению.

Соответствующая квантовым числам n_1, n_2, n_3 функция является произведением трех одномерных собственных функций осциллятора, записанных для трех координат X, Y, Z:

$$u_{n_1n_2n_3} = \left(\frac{4\pi m\nu}{h}\right)^{3/4} \frac{H_{n_1}(\xi)\, H_{n_2}(\eta)\, H_{n_3}(\zeta)}{\sqrt{2^n n_1!\, n_2!\, n_3!}} e^{-\frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}, \tag{93}$$

где

$$\xi = X\sqrt{\frac{4\pi^2 m\nu}{h}}, \qquad \eta = Y\sqrt{\frac{4\pi^2 m\nu}{h}}, \qquad \zeta = Z\sqrt{\frac{4\pi^2 m\nu}{h}}, \tag{94}$$

а H означает полиномы Эрмита. Собственная функция начального состояния есть просто

$$u_{000} = \left(\frac{4\pi m\nu}{h}\right)^{3/4} e^{-\frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}.$$

Стоящий в правой части (81) объемный интеграл можно свести к произведению трех простых интегралов типа

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_s(x)\, e^{-x^2} e^{iQ_s} dx = i\sqrt{\pi} Q_s e^{-Q_s^2/4}. \tag{95}$$

В результате простых вычислений с помощью этой формулы получаем из (81)

$$\sigma_{n_1n_2n_3 d\omega} = 4a^2 \frac{P}{P_0} d\omega \frac{(P_x - P_{0x})^{2n_1}}{n_1!} \frac{(P_y - P_{0y})^{2n_2}}{n_2!} \frac{(P_z - P_{0z})^{2n_3}}{n_3!} e^{-(\mathbf{P}-\mathbf{P}_0)^2}, \tag{96}$$

где

$$\mathbf{P}_0 = \frac{\mathbf{p}_0}{\sqrt{2Mh\nu}}, \qquad \mathbf{P} = \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{2Mh\nu}}, \tag{97}$$

так что P_0^2 и P^2 представляют собой деленные на $h\nu$ энергии нейтрона до и после столкновения. При этом равенство (82) принимает вид

$$P^2 = P_0^2 - n. \tag{98}$$

Суммируя выражение (96) по всем целым и неотрицательным решениям (92), соответствующим данному значению n, получаем парциальное сечение столкновения для таких процессов, когда нейтрон рассеивается в телесный угол $d\omega$, а атом водорода возбуждается и переходит в колеба-

тельные состояния с энергией (91). С помощью формул разложения трехчлена степени n суммирование легко выполняется в явной форме; находим:

$$\sigma_{n,\,d\omega} = 4a^2 \frac{P}{P_0} d\omega \frac{(\mathbf{P}-\mathbf{P}_0)^{2n}}{n!} e^{-(\mathbf{P}-\mathbf{P}_0)^2}. \tag{99}$$

В силу (98) последнее выражение можно переписать в виде

$$\sigma_{n,\,d\omega} = 4a^2 \frac{\sqrt{P_0^2-n}}{P_0} \times$$

$$\times \frac{\left(2P_0^2 - n - 2P_0\sqrt{P_0^2-n}\cos\vartheta\right)^n}{n!} e^{-\left(2P_0^2-n-2P_0\sqrt{P_0^2-n}\cos\vartheta\right)} d\omega, \tag{100}$$

где ϑ — угол между $d\omega$ и направлением $\mathbf{P}_0$.

Равенство (100) позволяет решать различные задачи о столкновениях. Проинтегрировав его по всему телесному углу, получим парциальное сечение соударения σ_n для процессов, в которых атом водорода возбуждается до n-го колебательного состояния. Оно оказывается равным

$$\sigma_n = \frac{4\pi a^2}{n!\,P_0^2} \int\limits_{2P_0^2-n-2P_0\sqrt{P_0^2-n}}^{2P_0^2-n+2P_0\sqrt{P_0^2-n}} \xi^n e^{-\xi} d\xi. \tag{101}$$

Ясно, что σ_n следует положить равным нулю, если $P_0^2 < n$, т. е. если энергии падающего нейтрона недостаточно для возбуждения состояния n.

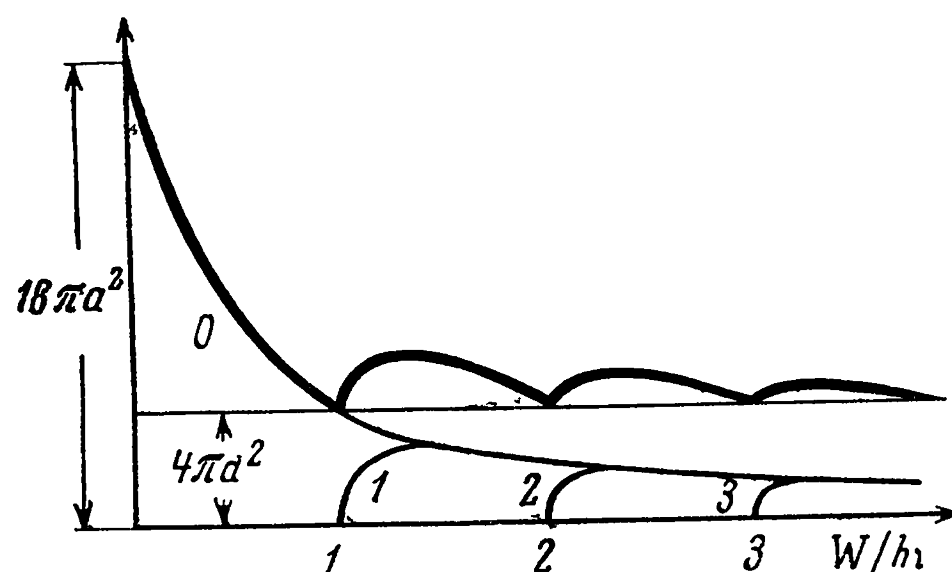


Рис. 2

Сечение σ_n как функция $P_0^2 = w/h\nu$ показано на рис. 2 (кривые 0, 1, 2, 3, ...), где жирная линия соответствует полному сечению соударения, т. е. сумме парциальных сечений. Как показывает формула (101), асимптотическая кривая, общая для кривых, описывающих σ_0, σ_1, σ_2, ..., представ-

ляет собой равностороннюю гиперболу

$$\frac{4\pi a^2}{w/h\nu}.$$

Отметим поведение полного сечения столкновения: при нулевой энергии его значение равно $16\pi a^2$; уже при $w = h\nu$ оно уменьшается до величины, лишь незначительно меньшей одной четверти приведенного значения; с дальнейшим ростом энергии сечение остается вблизи предельного значения $4\pi a^2$, осциллируя со все убывающей амплитудой. Эти результаты согласуются с общими выводами, сделанными в предыдущем разделе.

Когда энергия w меньше $h\nu$, полное сечение столкновения сводится просто к σ_0. Формула (101) показывает, что оно равно

$$\sigma_0 = 4\pi a^2 \frac{1 - e^{-4w/h\nu}}{w/h\nu}, \tag{102}$$

поскольку $P_0^2 = w/h\nu$. Угловая зависимость определяется выражением (100), которое сводится к

$$\sigma_{0,\,d\omega} = 4a^2 e^{-\frac{2\omega}{h\nu}(1-\cos\vartheta)}\,d\omega. \tag{103}$$

Это равенство говорит о том, что при $w \ll h\nu$ рассеяние имеет тенденцию стать изотропным — в соответствии с результатами последнего раздела. Однако для значений w, лишь немного меньших $h\nu$, анизотропия оказывается значительной. Для тепловых нейтронов ($w \sim 0{,}037$ *эв*) $w/h\nu$ по порядку величины равно 1/10, но анизотропией тем не менее все еще нельзя пренебрегать. Подобным же образом и сечение столкновения оказывается в действительности несколько меньшим учетверенного сечения при $w \gg h\nu$; именно, их отношение ближе к трем, нежели к четырем.

Заметим, наконец, что если бы атомы водорода были упруго связаны в устойчивых положениях равновесия, как это предполагалось в наших рассуждениях, то, как только энергия нейтрона w за счет ряда столкновений стала бы ниже $h\nu$, она не смогла бы уменьшаться далее до значений, отвечающих тепловому движению. Возможность дальнейшего замедления нейтрона после того, как его энергия стала меньше кванта энергии упругих колебаний, зависит от того, что атомы водорода в кристаллической решетке твердого тела связаны не с фиксированными равновесными положениями, но с окружающими атомами, которые сами находятся в движении. Следовательно, частоты колебаний образуют, как известно, непрерывный спектр, который простирается до нулевой частоты; а это означает возможность уменьшения энергии до тепловых значений. Однако если энергия уже достигла значения порядка средней энергии кванта упругого колебания или ниже, то процесс замедления становится значительно менее быстрым, нежели при более высоких энергиях, так что для уменьшения энергии в e раз требуется более одного столкновения.

Оценка числа столкновений, необходимых для снижения энергии от w до тепловой (уменьшение примерно в десять раз), показывает, что для этого процесса может потребоваться приблизительно десять соударений; если бы замедление подчинялось тому же закону, что и у нейтронов с энергиями выше 1 *эв*, то хватило бы двух-трех столкновений.

12. Процесс захвата нейтронов. Как уже несколько раз отмечалось, тепловые нейтроны в парафине обладают конечным средним временем жизни τ из-за того, что могут захватываться окружающими их протонами и образовывать при этом ядра тяжелого водорода. Порядок величины τ оценивался в непосредственном опыте [9]; было найдено $\tau \sim 10^{-4}$ *сек*. Оценить τ можно также по средней длине свободного пробега тепловых нейтронов и среднему числу столкновений, испытываемых тепловым нейтроном до захвата. Этот метод (ср. AF, § 13) дает $\tau = 1{,}7 \cdot 10^{-4}$ *сек*, что хорошо согласуется с прямой оценкой.

В этом разделе будет рассмотрен механизм процесса захвата нейтронов протонами [10] и, таким образом, теоретически будет определено значение τ, которое оказывается в превосходном согласии с экспериментальными значениями.

Излагаемая далее теория основывается на предположении, что переходы, при которых медленный нейтрон соединяется с протоном, образуя дейтрон (высвобождающаяся при этом энергия излучается в виде γ-кванта), определяются осцилляциями магнитного момента системы нейтрон — протон.

В самом деле, оказывается, что обычные переходы, обусловленные колебаниями электрического дипольного момента, в случае тепловых нейтронов запрещены. Мы исходим из того, что имеют место переходы из ^1S-состояния области непрерывного спектра в основное состояние ^3S, поскольку — согласно обычной теории столкновений — медленные нейтроны могут захватываться только из S-состояний непрерывного спектра (так как в состояниях P, D, ... эти частицы слишком далеки друг от друга, чтобы эффективно взаимодействовать). Далее, известно, что обычные процессы излучения электрическим диполем или квадруполем для $S \to S$-переходов запрещены. Однако, как будет показано ниже, благодаря магнитному дипольному излучению все же имеется возможность перехода из ^1S-состояния непрерывного спектра в основное состояние дейтрона ^3S.

В силу симметрии электрического и магнитного полей в уравнениях Максвелла формулы для расчета характеристик излучения, обусловленного колебаниями магнитного диполя и электрического диполя, являются, по существу, аналогичными. Вероятность перехода между двумя состоя-

---

[9] E. Amaldi, O. D'Agostino, E. Fermi, B. Pontecorvo, E. Segrè. Ric. Scientifica, 1935, 6 (1), 581. (Статья 71.)

[10] E. Fermi. Phys. Rev., 1935, 38, 570. (Статья 72.)

ниями i и j равна

$$\frac{64\pi^4\nu^3}{3hc^3}|\mu_{ij}|^2, \tag{104}$$

где μ_{ij} — матричный элемент (i, j) магнитного момента μ системы, а ν — частота излучения, испускаемого при переходе.

Обозначим индексами 0 и 1 термы ^3S (основное состояние дейтрона с энергией $w_0 = -2{,}2\cdot 10^6$ *эв*) и ^1S (состояние области непрерывного спектра, которое представляет медленный нейтрон с энергией w, весьма малой по сравнению с w_0). Для вычисления матричного элемента μ_{01} поступим следующим образом.

Собственная функция ψ системы нейтрон — протон зависит от пространственных и спиновых координат нейтрона и протона — x, y, z, s и X, Y, Z, S. В системе отсчета, где покоится центр масс нейтрона и протона, собственные функции состояний ^1S и ^3S будут зависеть, кроме спиновых координат s и S, еще только от расстояния r между нейтроном и протоном. Поскольку каждая из двух спиновых координат может принимать лишь два значения (+1 и —1), то, следовательно, каждая собственная функция будет ансамблем из четырех функций одних только пространственных координат. Их можно записать в виде квадратной таблицы

$$\psi = \begin{vmatrix} \psi_{1,1} & \psi_{1,-1} \\ \psi_{-1,1} & \psi_{-1,-1} \end{vmatrix},$$

помня, что первый и второй индексы относятся соответственно к значениям s и S. Легко видеть, что в такой записи единственная собственная функция терма ^1S записывается в форме

$$\psi(^1S) = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{v(r)}{\sqrt{2}\,r} \\ \frac{v(r)}{\sqrt{2}\,r} & 0 \end{vmatrix}, \tag{105}$$

где функция $v(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{4\pi^2M}{h^2}[w - g_1(r)]\,v(r) = 0. \tag{106}$$

Функция $g_1(r)$ описывает потенциальную энергию взаимодействия протон — нейтрон, когда спины этих частиц антипараллельны; $M/2$ — приведенная масса. В нашем случае, когда ^1S-состояние представляет медленный нейтрон, функция $v(r)$ для значений r, малых в сравнении с де-бройлевской длиной волны, относится к типу, показанному на рис. 1.

Подобным же образом три собственные функции основного состояния терма ^3S даются равенствами

$$\psi(^3S_1)=\begin{vmatrix}\frac{u(r)}{r} & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix},\quad \psi(^3S_0)=\begin{vmatrix}0 & \frac{u(r)}{\sqrt{2}\,r}\\ \frac{u(r)}{\sqrt{2}\,r} & 0\end{vmatrix},\quad \psi(^3S_{-1})=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & \frac{u(r)}{r}\end{vmatrix},\tag{107}$$

где $u(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{4\pi^2M}{h^2}\left[w_0-g_3(r)\right]u(r)=0.\tag{108}$$

Здесь $g_3(r)$ представляет потенциальную энергию взаимодействия, когда спины параллельны, причем $g_3(r)$, вообще говоря, отлична от $g_1(r)$ (см. раздел 9).

Для вычисления матричных элементов магнитного момента заметим, что последний представляет собой векторную сумму собственных магнитных моментов обеих частиц. Пусть μ_n и μ_p — магнитные моменты нейтрона и протона (взятые с положительным или отрицательным знаком соответственно тому, параллельны или антипараллельны соответствующему магнитному моменту собственные моменты импульса частиц; в действительности магнитный момент нейтрона отрицателен, а у протона он положителен). Компоненты векторов магнитного момента $\boldsymbol{\mu}_n$ и $\boldsymbol{\mu}_p$ получаются при умножении μ_n и μ_p на операторы Паули, которые действуют соответственно на координаты s и S. Таким образом, можно без труда написать операторы, представляющие компоненты μ_x, μ_y, μ_z полного магнитного момента $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}_p+\boldsymbol{\mu}_n$. Так, например, μ_z действует следующим образом:

$$\mu_z\begin{vmatrix}\psi_{1,1} & \psi_{1,-1}\\ \psi_{-1,1} & \psi_{-1,-1}\end{vmatrix}=\mu_n\begin{vmatrix}\psi_{1,1} & \psi_{1,-1}\\ -\psi_{-1,1} & -\psi_{-1,-1}\end{vmatrix}+\mu_p\begin{vmatrix}\psi_{1,1} & -\psi_{1,-1}\\ \psi_{-1,1} & -\psi_{-1,-1}\end{vmatrix}.$$

Из (105) и (107) находим, что матричные элементы μ_z равны

$$\mu_z(^1S,\,^3S_1)=\mu_z(^1S,\,^3S_{-1})=0;\qquad \mu_z(^1S,\,^3S_0)=4\pi(\mu_p-\mu_n)\int_0^\infty uv\,dr.$$

Аналогичным образом находим

$$-\mu_x(^1S,\,^3S_1)=\mu_x(^1S,\,^3S_{-1})=4\pi\frac{\mu_p-\mu_n}{\sqrt{2}}\int_0^\infty uv\,dr,\qquad \mu_x(^1S,\,^3S_0)=0,$$

$$\mu_y(^1S,\,^3S_1)=\mu_y(^1S,\,^3S_{-1})=4\pi i\,\frac{\mu_p-\mu_n}{\sqrt{2}}\int_0^\infty uv\,dr,\qquad \mu_y(^1S,\,^3S_0)=0.$$

Подставляя в выражение (104) вместо μ_{ij} сумму квадратов модулей этих матричных элементов, получаем вероятность перехода:

$$\frac{1024\pi^6\nu^3}{hc^3}(\mu_p - \mu_n)^2\left(\int\limits_0^\infty uv\,dr\right)^2. \qquad (109)$$

Для использования этой формулы при решении задачи о захвате медленного нейтрона функцию $u(r)$ нужно нормировать таким образом, чтобы

$$4\pi\int\limits_0^\infty u^2 dr = 1 \qquad (110)$$

(u/r — радиальная собственная функция основного состояния дейтрона). Что же касается функции $v(r)$ (v/r — радиальная собственная функция ^1S-состояния области непрерывного спектра, представляющего медленный нейтрон), то ее нормировка, выбранная в разделе 10 [ср. формулу (79) и рис. 1], отвечает случаю, когда плотность нейтронов в синглетном состоянии относительно протона равна единице. Поскольку статистические веса синглетного и триплетного состояний находятся в отношении 1 : 3, полная плотность медленных нейтронов, которая соответствует указанной нормировке, равна 4. Учитывая это обстоятельство и обозначая через V скорость медленных нейтронов, а через $\sigma_{захв}$ сечение захвата, получаем, что вероятность перехода для процесса захвата равна, очевидно, $4V\sigma_{захв}$. Сравнивая с выражением (109), находим, таким образом,

$$\sigma_{захв} = \frac{1}{V}\frac{256\pi^6\nu^3}{hc^3}(\mu_p - \mu_n)^2\left(\int\limits_0^\infty uv\,dr\right)^2. \qquad (111)$$

Заметим, в частности, что согласно этой формуле сечение захвата обратно пропорционально скорости. Если обозначить через τ среднее время жизни медленного нейтрона в среде, содержащей водород при концентрации n атомов в 1 *см*^{3}, то $\tau V n \sigma_{захв} = 1$, т. е.

$$\frac{1}{\tau} = n\frac{256\pi^6\nu^3}{hc^3}(\mu_p - \mu_n)^2\left(\int\limits_0^\infty uv\,dr\right)^2. \qquad (112)$$

Чтобы вычислить содержащийся в этих формулах интеграл, воспользуемся процедурой Бете и Пайерлса [6], которые пренебрегли нерегулярностями обеих функций u и v при $r < \rho$ (ρ — радиус действия) ввиду того, что вклад области $r < \rho$ в различные интегралы мало существен. Интегрирование уравнения (108) при $r > \rho$ с учетом условия нормировки (110) дает

$$u(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}}e^{-\frac{r}{b}}, \qquad b = \sqrt{\frac{h^2}{4\pi^2 M\,|w_0|}} = 0{,}43\cdot 10^{-12}. \qquad (113)$$

По указанным причинам нормировка вычислена в предположении, что формулы (113) справедливы вплоть до $r = 0$; численное значение длины b отвечает энергии связи $-w_0 = 2{,}2 \cdot 10^6$ *эв*.

Согласно (79), $v(r)$ при $r > \rho$ дается равенствами

$$v(r) = a + r, \qquad a = \pm \sqrt{\frac{h^2}{4\pi^2 M |w_1|}} = 1{,}88 \cdot 10^{-12}, \tag{114}$$

где w_1 означает энергию реального или виртуального состояния ^1S, упомянутого нами в разделе 9 (не путать с энергией w другого ^1S-состояния, которое представляет медленный нейтрон). Численное значение $|w_1|$ было взято равным $1{,}16 \cdot 10^5$ *эв* (ср. раздел 9). Вычислив в (112) интеграл в предположении, что формулы (113) и (114) справедливы до значения $r = 0$, сразу же находим

$$\frac{1}{\tau} = n \frac{128\pi^5 \nu^3}{hc^3} (\mu_p - \mu_n)^2 (a + b)^2 b. \tag{115}$$

Подставляя в это соотношение численные значения $n = 7{,}8 \cdot 10^{22}$, $\nu = -w_0/h = 5{,}38 \cdot 10^{29}$, получаем

$$\frac{1}{\tau} = 61 \left(\frac{\mu_p - \mu_n}{\mu_0}\right)^2 \quad \text{или} \quad \frac{1}{\tau} = 154 \left(\frac{\mu_p - \mu_n}{\mu_0}\right)^2, \tag{116}$$

соответственно тому, положительный или отрицательный знак выбран во втором равенстве (114); здесь μ_0 — ядерный магнетон. Первое выражение отвечает отрицательному значению a (реальный ^1S-уровень в смысле раздела 9), а второе — положительному a (виртуальный ^1S-уровень).

Для магнитного момента протона возьмем значение $\mu_p = 2{,}88\, \mu_0$ (среднее по результатам измерений Штерна, Эстермана и Фриша и Раби, Кэллога и Захариаса) [11]. Магнитный момент нейтрона определяется разностью моментов дейтрона и протона. Принимая для магнитного момента дейтрона $0{,}75\, \mu_0$, находим, что $\mu_n = -2{,}13\, \mu_0$ (отметим знак минус). Таким образом, из равенств (116) получаем

$$\tau = 6{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ сек} \quad \text{или} \quad \tau = 2{,}6 \cdot 10^{-4} \text{ сек}.$$

Второе из этих двух значений очень хорошо согласуется с результатами экспериментов для медленных нейтронов ($\tau = 1{,}7 \cdot 10^{-4}$). Это, по-видимому, указывает на то, что справедливым оказывается второе соотношение (116), т. е. ^1S-уровень дейтрона является виртуальным.

....

[11] O. Frisch, O. Stern. Z. Physik, 1933, 85, 4; I. Estermann, O. Stern. Z. Physik, 1933, 85, 17; 86, 132; I. I. Rabi, J. M. Kellogg, J. R. Zacharias. Phys. Rev., 1934, 46, 157; относительно знаков магнитных моментов протона и дейтрона см. работу тех же авторов в Nature (London), 1936, 137, 658.

К статье 75

Двадцать третьего января 1937 г. после очень короткой болезни скончался от воспаления легких проф. Корбино. Ему был всего 61 год. Сотрудники римского Института физики остро переживали утрату. Было такое чувство, словно закончилась целая эпоха; изменения в дирекции Института и ухудшение политической ситуации предвещали катастрофу.

В написанном Ферми кратком некрологе прежде всего подчеркивается — и это очень характерно — научная деятельность Корбино; но ясно видны также и обаяние его личности, и человеческие черты.

Э. Сегре

75

УЧИТЕЛЬ: ОРСО МАРИО КОРБИНО *

Я познакомился с сенатором Орсо Марио Корбино в 1922 г., когда я возвратился в Рим, только что защитив дипломную работу. Мне было тогда 20 лет, Корбино — 46. Он был сенатором, в прошлом занимал пост министра народного образования; кроме того, он был широко известен как выдающийся ученый. Поэтому понятно, с каким чувством стесненности я пришел к Корбино. Однако это чувство исчезло, как только он повел сердечную и в то же время поучительную беседу о моем научном будущем. В этот период мы встречались с Корбино почти каждый день, и в результате наших бесед у меня не только прояснился ряд до тех пор не ясно сформулированных идей, но и зародилось очень глубокое и сердечное почитание учителя, почитание, все больше и больше возраставшее с годами, которые мне посчастливилось провести в его лаборатории.

Я думаю, могу сказать, что эти чувства были общими для всех, знавших Корбино: его приветливость, тонкое умение высказать даже неприятную правду, не оскорбляя собеседника, его абсолютная искренность, его подлинный интерес к научным и человеческим проблемам сразу же вызывали симпатию и уважение.

Корбино часто не без некоторой гордости упоминал, что своим положением обязан только себе. Он родился в Аугуста 13 апреля 1876 г. в семье скромного ремесленника. Его тяга к знаниям и исключительные способности были замечены в семье, и отец Корбино ценой тяжелых лишений дал сыну возможность получить образование. Еще мальчиком он проявил большую страсть к физике и уже во время обучения в гимназии посещал лекции по физике профессора Страччати в лицее.

* *Un maestro*: *Orso Mario Corbino*. Nuova Antologia, 1937, **72**, 313—316.

После защиты дипломной работы в Палермо он в течение нескольких лет был одновременно профессором лицея и ассистентом профессора Макалузо в Физическом институте Университета в Палермо.

В этот период Корбино, будучи еще совсем юным, вместе со своим учителем Макалузо выполнил первоклассное исследование в области магнитооптики и открыл явление, которое впоследствии стало носить имя Макалузо — Корбино. Они обнаружили вращение плоскости поляризации света на очень большие углы при прохождении через помещенный в магнитное поле газ, когда частота света близка к частоте линии поглощения газа. После развития электромагнитной теории света физика пошла по пути интерпретации оптических явлений на основе электронных представлений. Эффект Макалузо — Корбино нашел естественное объяснение в рамках новых теорий и, таким образом, помог прояснению их основ.

В этот же период Корбино принимал участие в дискуссиях и полемике по различным вопросам магнитооптики, в которых показал тонкость и глубину своих воззрений; таким образом, уже с тех пор его заметили даже за пределами Италии как одного из самых обещающих исследователей. Именно в это время он завоевал уважение и дружбу Аугусто Риги [1], бывшего тогда в расцвете своих творческих сил.

Корбино интересовался не только физическими, но и электротехническими проблемами. Особенно остроумны в этой области его наблюдения свойств цепи, содержащей динамомашину с последовательным возбуждением. Он установил, что в некоторых условиях динамомашина обладает свойствами отрицательного омического сопротивления, так что в цепи образуются долговременные спонтанные электрические колебания. Он исследовал также поведение электролитического конденсатора, индукционной катушки, электрической дуги, внеся большую ясность в спорные вопросы, относящиеся к работе этих приборов.

В 1904 г. Корбино прошел одновременно по двум университетским конкурсам, по электротехнике и по физике, и выбрал пост профессора экспериментальной физики в Мессинском университете. Он и его семья чудом остались в живых при землетрясении 1908 г. (его дом был одним из очень немногих сохранившихся зданий), и по вызову Блазерна он переехал в Рим на освободившееся место профессора Селла по кафедре физики. После смерти Блазерна (в 1918 г.) он стал директором Института физики Римского университета и занимал этот пост до конца своей жизни. В Риме деятельность Корбино не ограничилась только университетскими занятиями, а распространилась в сферу промышленности и политики. Он был президентом Высшего ирригационного совета, а также Высшего совета общественных работ. В 1920 г. он был избран сенатором; в 1921 г. стал министром народного образования, а в 1923—1924 гг. — министром национальной экономики. Он был удостоен многочисленных академических и гражданских наград и званий: члена Академии Линчей и других

[1] А. Риги (1850—1920) — видный итальянский физик-экспериментатор.— *Прим. ред.*

академий, кавалера гражданского ордена Савойя, был награжден королевской премией Линчей в 1914 г. и государственной премией в 1933 г.

В Римском институте физики Корбино занимался самыми различными проблемами. Продолжая электротехническое направление, он придумал и реализовал вместе с профессором Трабакки, часто сотрудничавшим с ним, аппарат для создания высоких напряжений, предназначенный для питания рентгеновских трубок. Этот аппарат представлял значительный прогресс по сравнению с ранее использовавшимися. Важным достижением явилось также создание преобразователя переменного тока в пульсирующий, который нашел применение для зарядки аккумуляторов.

Одно из самых ценных качеств научной деятельности Корбино состоит в его умении достичь важных результатов, используя крайне простые средства. Яркий пример этому — его элегантное исследование теплоемкости металлов (вольфрам и платина) при очень высокой температуре, которое основывалось на наблюдении изменения электрического сопротивления спирали обычной электрической лампочки, питаемой переменным током. Эти исследования, результаты которых были впоследствии подтверждены рядом других ученых, привели Корбино к следующему выводу: при очень высокой температуре теплоемкость принимает значение гораздо выше величины, предсказываемой законом Дюлонга и Пти. Этот результат, важный с теоретической точки зрения, интерпретируется следующим образом: силы, действующие между атомами вещества, не являются строго упругими; отклонение от упругости особенно заметно тогда, когда вследствие высокой температуры колебания атомов приобретают относительно большую амплитуду.

Как в этом, так и в других исследованиях по общей и прикладной физике Корбино использовал брауновскую [2] трубку для того, чтобы следить за формой электрических колебаний. Можно сказать, что брауновская трубка была его любимым прибором; многочисленными и очень красивыми опытами он показал различные возможности применения этого прибора, который тогда был очень далек от современного совершенства. Многочисленная серия его работ посвящена изучению прохождения электрического тока в тонких металлических пластинках, помещенных в перпендикулярное к ним магнитное поле. Среди них следует обратить внимание на изучение линий тока в висмутовом диске, через который проходит радиальный ток. Корбино установил, что линии тока, прямолинейные в отсутствие магнитного поля, принимают спиральную форму под действием поля. Это явление известно как «эффект Корбино», хотя сам он из скромности не любил этого названия и предпочитал рассматривать этот эффект как вариант эффекта Холла. Предметом его экспериментальных и теоретических исследований были и другие аспекты взаимозависимости электрических, тепловых и магнитных явлений.

---

[2] Прототип электронно-лучевого осциллографа.— *Прим. ред.*

В течение некоторого времени Корбино занимался (не без некоторого риска) изучением физических свойств взрывоопасных веществ, в частности, определением упругости паров нитроглицерина.

С момента появления радио Корбино живо интересовался этой проблемой и, в частности, одним из первых интуитивно предчувствовал великие возможности применения электронных ламп. Он с любовью следил за первыми шагами радиопередач, которыми интересовался не только как физик, но и как страстный любитель музыки.

На Международный конгресс физиков в Комо в 1927 г. он представил всестороннее исследование теории гальванического элемента, в котором анализировал природу электродвижущей силы. Эта работа Корбино разрешила все споры по этому вопросу; он пришел к выводу, что разность потенциалов в основном обусловлена контактом между двумя металлами, вновь приходя, хотя и в новой форме, к интуитивному заключению Алессандро Вольта столетней давности.

В последние годы Корбино посвятил себя увлеченному изучению электроакустики и создал Институт электроакустики Национального совета исследований. Институт находился на улице Панисперна в помещениях, освободившихся с переездом Института физики Римского университета в университетский городок; как раз в этих помещениях в течение многих лет протекала ранее деятельность Корбино — исследователя и учителя.

Последняя научная работа Корбино написана за несколько дней до его безвременной кончины. Она представляет собой очень элегантное исследование нового метода калибровки конденсаторных микрофонов, основанного на анализе гармоник, связанных с изменениями емкости при колебаниях микрофона.

Корбино всегда был не только ученым, но и учителем. Он любил быть окруженным молодежью и не скупился на советы, продиктованные его опытом и знаниями. Он умел внушать ей не только свой острый критический подход и свою глубокую научную честность, но также искренний энтузиазм, сопутствовавший любому его исследованию. Он любил обсуждать с ней новые опыты, как проектируемые, так и уже выполненные; он всегда находил самое существенное в опытах, освобождая их от ненужных деталей. Он любил под сложной аналитической трактовкой вскрывать физическое содержание рассматриваемых фактов, которое всегда умел пояснить простыми и выразительными моделями.

Он был в постоянной готовности усвоить и углубить любой аргумент, так что часто человек, изложивший ему теорию или исследование, в конце беседы обнаруживал, что он сам получил удивительное разъяснение своих идей. Будучи блестящим и тонким лектором, он в своих лекциях и докладах делал легко понимаемыми самые запутанные вопросы.

Оплакивая ученого, ставшего честью своей родины, все мы, которым посчастливилось жить рядом с ним, скорбим по кончине друга и верного наставника и преисполнены чувства неизгладимой признательности за все то, чему он нас научил в науке и жизни.

К статье 76

Значительные усилия, которые направлялись в предшествовавшие годы на изучение наведенной нейтронами искусственной радиоактивности, выявили недостаток экспериментального оборудования в Институте, по крайней мере в отношении искусственных нейтронных источников. К тому времени другие институты уже имели линейные ускорители и циклотроны, которые обеспечивали гораздо большие интенсивности, чем это можно было достигнуть со смесью максимум 800 *мкюри* радона с бериллием.

Поэтому в качестве первого шага мы начали думать о сооружении такого ускорителя, который, используя реакцию D + D, позволил бы нам получить большие интенсивности нейтронов даже при весьма скромном ускоряющем напряжении (200 *кв*). Однако по окончании сооружения эта установка использовалась очень мало, так как вскоре после этого в Высшем институте здравоохранения началось строительство ускорителя на 1,1 млн. *в*. Ферми никогда не пользовался этим ускорителем, поскольку покинул Италию вскоре после начала строительства.

Э. Амальди

76

ИСКУССТВЕННЫЙ ГЕНЕРАТОР НЕЙТРОНОВ *

(Совместно с Э. Амальди и Ф. Разетти)

Описывается установка для получения нейтронов с помощью ускоренных до 200 *кв* ионов дейтерия, которые бомбардируют вещество, обогащенное дейтерием. Число нейтронов, получаемых на этой установке, равно числу нейтронов, испускаемых источником Rn + Be интенсивностью 2,5 *кюри*.

Происходящее в последние годы бурное развитие исследований ядерных реакций под действием нейтронов сделало весьма актуальной задачу получения сильных источников этих частиц.

В своих прежних работах мы пользовались для получения нейтронов трубочками, содержавшими радон и порошок бериллия. Они излучали около 20 тысяч нейтронов в секунду на *мкюри*. Располагая количеством радона максимум до 800 *мкюри*, можно получить $1{,}6 \cdot 10^7$ нейтронов в секунду. Если для образования искусственного радиоактивного вещества удается использовать 50% нейтронов (что отвечает исключительно благоприятным условиям), то при этом можно приготовить активность самое большее 1/6 *мкюри*.

При использовании искусственных источников нейтронов можно получить гораздо более высокие активности. Многие легкие элементы при

---

* *Un generatore artificiale di neutroni.* (Con E. Amaldi e F. Rasetti). Ric. Scientifica, 1937, 8 (2), 40—43

бомбардировке искусственно ускоренными дейтронами испускают нейтроны. От величины напряжения, ускоряющего дейтроны, зависит то, насколько целесообразно бомбардировать тот или иной элемент. При низких напряжениях (несколько выше 600 *кв*) удобнее пользоваться веществом с повышенным содержанием дейтерия. При более высоких напряжениях получаются бóльшие выходы, если использовать Li или Be (на практике удобнее пользоваться последним ввиду его большей механической и термической прочности).

Мы хотим сообщить здесь о предварительных результатах относительно созданного в нашей лаборатории искусственного источника нейтронов. Располагая генератором напряжения всего в 200 *кв*, мы воспользовались ядерной реакцией [1]



$$D_1^2 + D_1^2 = H_2^3 + n_0^1.$$

Генератор напряжения состоит из трехфазного выпрямителя, в котором используются обе полуволны, заряжающие две емкости соответственно до +100 и −100 *кв* относительно земли. По этой причине мы сочли целесообразным сделать нашу трубку из двух секций, проходя вдоль которых ионы подвергаются последовательному действию ускоряющих напряжений по 100 *кв*. Схема трубки представлена на рис. 1; рис. 2 демонстрирует общий вид установки. Не получив после многократных попыток хороших результатов на ионных источниках с дугой низкого давления и горячим катодом, мы обратились к источнику с каналовыми лучами — типа, разработанного Олифантом. Отверстие *F* в катоде источника, через которое выходит пучок положительных ионов, имеет 3 *мм* в диаметре и 7 *мм* в длину. В двух электрических линзах L_1 и L_2 ионы испытывают два последовательных ускорения и фокусируются в трубке на нижнем конце установки. Этот конец, находящийся под напряжением 100 *кв*, фиксируется на раме, изолированной от земли с помощью фарфоровых изоляторов. Нижний конец трубки, в котором фокусируются ионы, благодаря

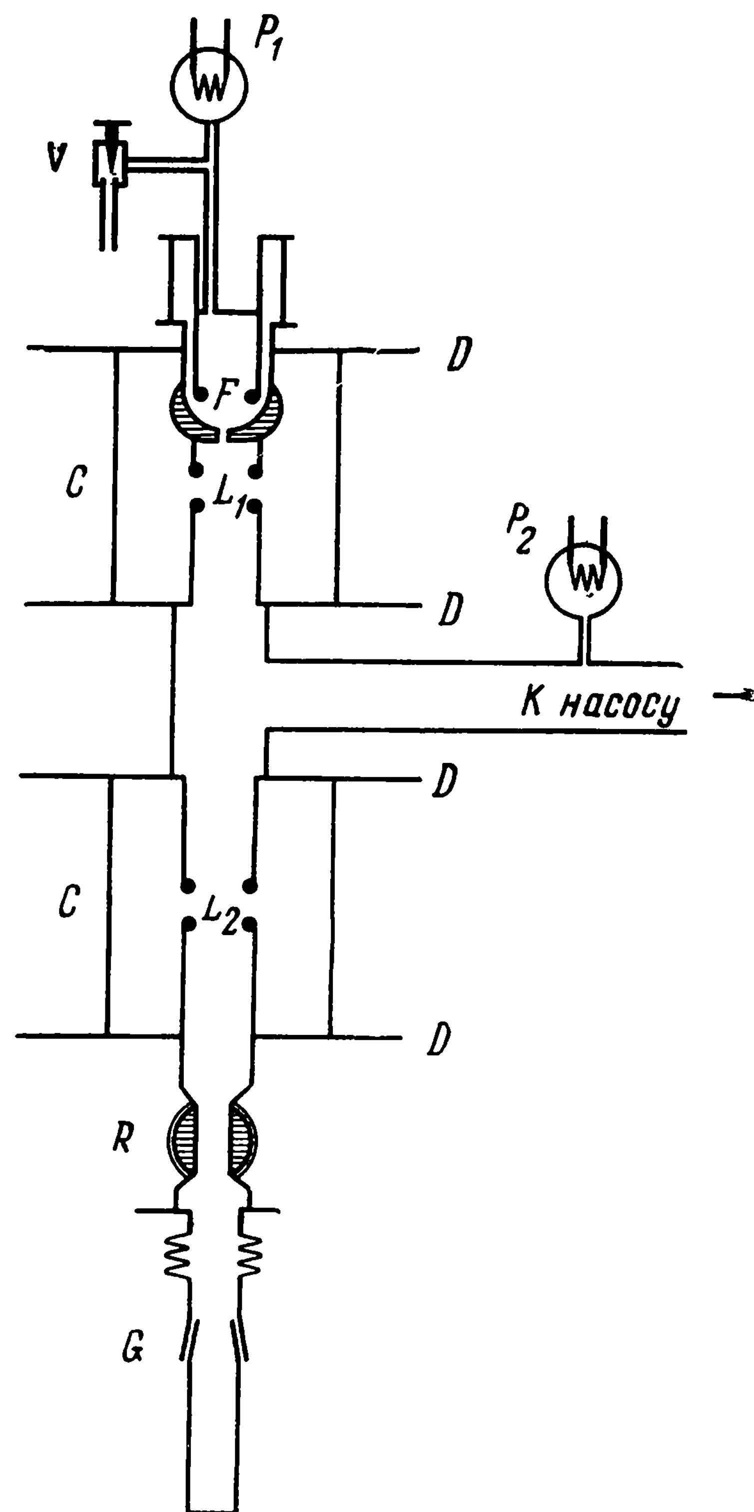


Рис. 1

---

[1] M. L. E. Oliphant, P. Harteck, E. Rutherford. Proc. Roy. Soc., 1934, A144, 692.

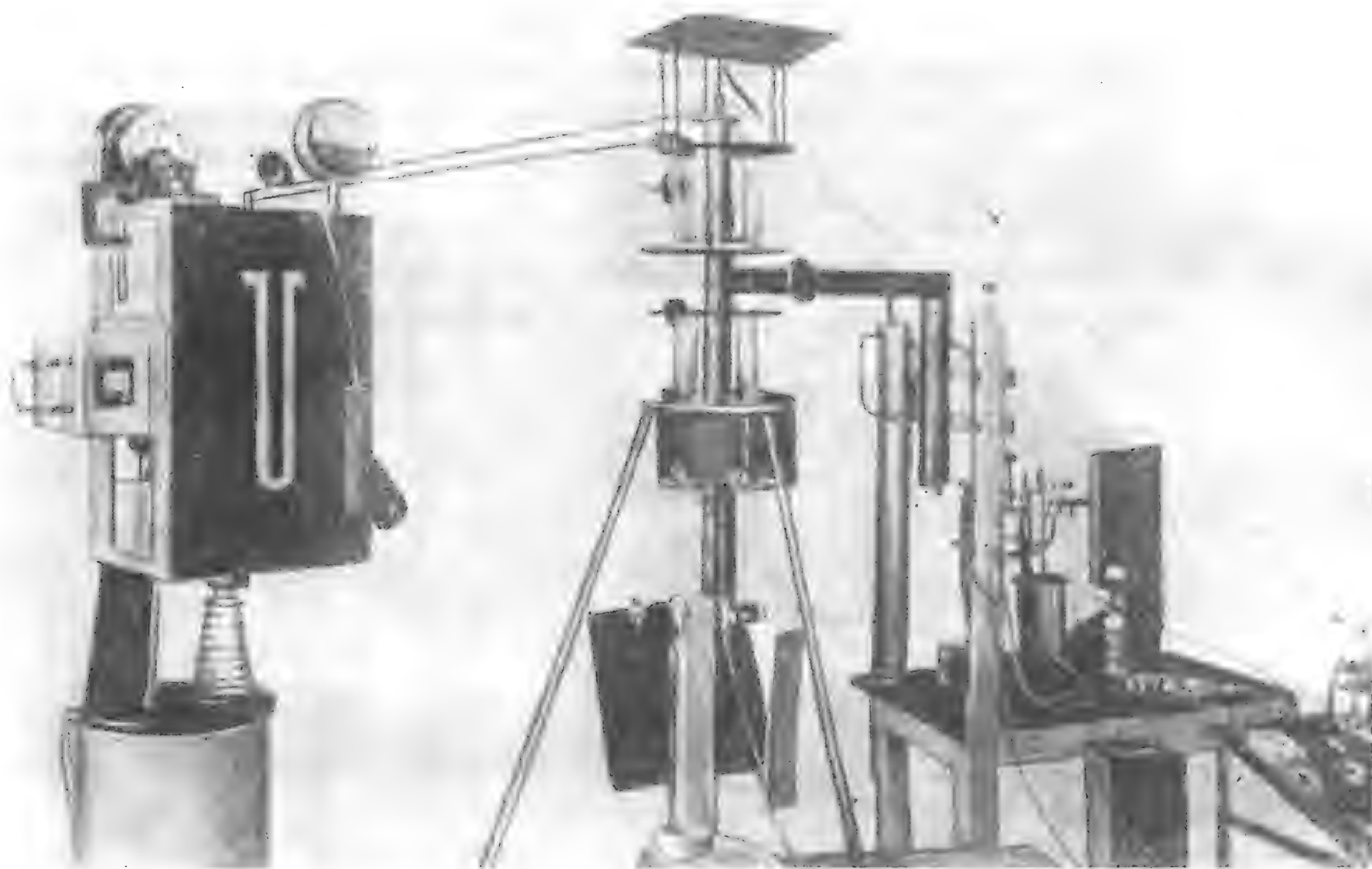


Рис. 2

большому крану R и коническому переходнику G может отсоединяться от самой трубки (например, для смены бомбардируемого вещества) без напуска в нее воздуха. Различные части трубки соединяются металлическими фланцами с резиновыми прокладками, что обеспечивает превосходную герметичность и допускает быструю разборку трубки. Два стеклянных цилиндра C крепятся пицеином на соответствующие железные диски D. Трубка откачивается масляным диффузионным насосом (диаметр которого 100 *мм*), изготовленным в нашей лаборатории по чертежам Слоана. Производительность насоса, измеренная на его входе, равна 50 *л/сек*, тогда как эффективная производительность при откачке трубки, вследствие сопротивления трубопроводов, составляет 28 *л/сек*. Такой производительности вполне достаточно для поддержания хорошего вакуума, несмотря на непрерывное поступление дейтерия через отверстие в источнике (около $^1/_{20}$ *см*^{3}*/сек*). Два вакуумметра Пирани P_1 и P_2 позволяют измерять давление как внутри источника, так и в трубке. Для питания источника мы сконструировали масляный трансформатор, вторичная обмотка которого изолируется (на 100 *кв*) от первичной и обеспечивает напряжение 25 *кв*. Это напряжение, выпрямленное с помощью диода и сглаженное емкостью, через охранные сопротивления подается на два электрода источника и создает между ними ток около 5 *ма*. Чтобы

поддерживать в источнике давление, наиболее подходящее для разряда, дейтерий вводится в него через игольчатый клапан *V* (с точной регулировкой и дистанционным управлением), благодаря которому устанавливается надлежащее равновесие с утечкой дейтерия через отверстие для каналовых лучей. Источник охлаждается током масла.

При значительном токе дейтерия через установку становится необходимой система рекуперации. С этой целью после прохождения через насосы газ не выбрасывается в атмосферу, а собирается в газометре; из газометра газ фильтруется сквозь палладиевую стенку, нагреваемую для того, чтобы очистить его от примесей, с которыми он может быть смешан.

Очищенный таким путем газ подается трубопроводом в игольчатый клапан и снова вводится в источник.

Бомбардируемое вещество должно содержать высокий процент дейтерия, а также быть стабильным при бомбардировке ионами. Мы нашли удобным использовать лед из тяжелой воды, который поддерживается при очень низкой температуре благодаря охлаждению жидким воздухом.

Сообщим коротко о полученных к настоящему времени результатах, которые, правда, носят совершенно предварительный характер.

При работе только что описанного источника максимальный ионный ток, который нам удалось собрать, составил 40 *мка*. Даже при столь малом токе и при сравнительно низком напряжении, которое использовалось нами, источник нейтронов получился эквивалентным около 2,5 *кюри* Rn + Be; это примерно втрое превышает самые сильные источники из использовавшихся нами ранее. Мы считаем, что после несущественных изменений ионный ток, а следовательно, и количество нейтронов можно будет увеличить в 10 раз. Этого можно будет достигнуть, повысив напряжение питания источника [2] до 40—50 *кв*. Такое усовершенствование приведет к необходимости переделки источника и его системы питания.

Если такая модификация даст ожидаемые результаты, то наша трубка сможет генерировать $5 \cdot 10^8$ нейтронов в секунду, а это позволит в наиболее благоприятных случаях получать искусственные радиоэлементы с активностью в несколько *мкюри*. В этом случае станут возможными многие исследования, для выполнения которых совершенно недостаточны источники, имевшиеся до сих пор.

Естественно, что активность получалась бы во много раз большей, если бы мы располагали напряжениями порядка 1000 *кв*. Ощутимое преимущество достигалось бы также и в том случае, если бы вместо тяжелого льда в качестве бомбардируемого вещества использовался бериллий. При этом стало бы ненужным охлаждение жидким воздухом и, как следствие, можно было бы лучше использовать нейтронный источник, освободив его от загромождающих конструкций.

Институт физики университета, Рим

[2] A. Bouwers, F. A. Heyn, A. Kuntke. Physica, 1937, 4, 153.

77

ПАМЯТИ ЛОРДА РЕЗЕРФОРДА*

Неожиданное известие о смерти лорда Резерфорда застало меня в Болонье, когда я был на собрании по поводу празднования двухсотлетия со дня рождения Гальвани. Там собралась большая группа физиков из многих стран, и было ясно видно, как глубоко каждый ощутил утрату, которую понесла наука с уходом человека, чьи усилия открыли физикам необъятные области исследования.

Лорд Резерфорд безусловно принадлежал к экспериментаторам высочайшего класса — немногим в истории человеческой мысли,— предстающими перед своими почитателями как люди, которых какой-то инстинкт всегда приводил к успешному наступлению на фундаментальные проблемы. Если обратиться к большинству его опытов, то поражает, как просто они задуманы, будто для того, чтобы профан мог легко понять и оценить их: их выполнение не требует сложной аппаратуры, а зачастую даже не требует исключительного экспериментального мастерства. Но не будет преувеличением сказать, что такие простые опыты, как обнаружение положительного ядра внутри электронного облака атома или осуществление искусственного расщепления ядра при бомбардировке α-частицами, являются вехами на нашем пути познания Природы.

История науки будет помнить лорда Резерфорда не только за его личный вклад, но и как учителя — в высшем понимании этого слова. Вокруг него выросла одна из крупнейших и плодотворнейших групп исследователей, которые учились у него не только принципам и методам исследования, но также стойкости и трезвости — этим главным качествам ученого.

....

* *Tribute to Lord Rutherford*. Nature (London), 1937, 140, 1052.

1938

К статье 78

В этой статье описан последний эксперимент, выполненный Ферми в Риме. Может быть, стоит отметить, что здесь впервые подробно обсуждаются опыты, в которых упругое рассеяние на ядре тяжелее водорода (но все-таки относительно легком) привело к заметному замедлению нейтронов. Очень скоро именно этот эффект (только на графите) был использован Ферми для создания первого ядерного реактора.

Б. Понтекорво

78

ВОЗДЕЙСТВИЕ БОРА НА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ НЕЙТРОНЫ ИОДА *

(Совместно с Ф Разетти)

Недавно Дж. Л. Микаэлс [1] описал несколько опытов по активации иода медленными нейтронами, отфильтрованными кадмиевым экраном для исключения тепловых нейтронов. В этом случае активация обусловлена нейтронами с характеристическими энергиями, которые по оценкам для иода не превышают 100 *эв* [2].

Микаэлс измеряет уменьшение активности иодного детектора, когда на пути нейтронов помещаются экраны из иода и кадмия в следующем порядке: а) сначала иодный фильтр, затем борный; б) сначала борный фильтр, потом иодный. Микаэлс находит, что в случае «б» активность меньше (около 75%), чем в случае «а».

Ниже следует описание ряда опытов, которые позволили нам проверить эти результаты и предложить объяснение для них.

Прежде всего мы повторили опыты в условиях, очень близких к тому, что было описано Микаэлсом. Нейтронный источник, состоящий из трубки с радоном и бериллием, располагался внутри парафинового цилиндра (диаметром около 25 *см* и высотой 15 *см*) в 3 *см* от его верхнего торца. Этот цилиндр со всех сторон покрывался кадмиевой фольгой толщиною 0,3 *мм*; но со стороны верхнего торца фольга была вдвое толще. Поглотители из бора и иода, а также детектор укладывались друг на друга на

---

* *Azione del boro sui neutroni caratteristici dello iodio.* (Con F. Rasetti). Ric. Scientifica, 1938, 9 (2), 472, 473.

[1] J. L. Michiels. Nature, 1936, 142, 431.

[2] См., например: E. Amaldi, E. Fermi. Ric. Scientifica, 1936, 7 (1), 454. [Б118а]. (См. статью 73.)

этом торце. В специальных опытах мы убедились, что размеры поглотителей в достаточной мере превышают размеры детектора, чтобы активация, обусловленная нейтронами, которые не прошли через поглотители, была ничтожна.

Борный поглотитель представлял собой пластинку борного ангидрида толщиной 13 *мм*, содержащую 0,76 *г/см*^{2} бора. Иодным поглотителем служил слой PbI_2, который содержал 0,72 *г/см*^{2} иода. Детектором являлся чистый иод, находившийся в пергаментном пакетике.

Измерения проводились с помощью ионизационной камеры под давлением и электрометра Эдельмана, как это было описано в предыдущих работах.

Измерения активности в случае «а» дали величину 24,3 (в произвольных единицах), тогда как в случае «б» активность оказалась меньше — в согласии с результатами Микаэлса,— а именно 19,1. Отношение равно 0,79.

Подтвердив, таким образом, этот результат, мы подумали, что он может вызываться изменением энергии нейтронов, которое могло бы происходить вследствие упругих столкновений при прохождении нейтронов через бор. Обычно рассеяние медленных нейтронов бором не наблюдается, поскольку оно маскируется очень сильным поглощением, которое (для тепловых нейтронов) оказывается примерно в сто раз более существенным. Для нейтронов бóльших энергий отношение изменяется в пользу рассеяния, поскольку коэффициент рассеяния остается приблизительно постоянным, в то время как коэффициент поглощения обратно пропорционален скорости нейтронов. Среди элементов, обнаруживающих селективное поглощение, иод несомненно обладает одной из самых высоких резонансных энергий (порядка 100 *эв*); по этой причине резонно предположить, что при такой энергии сечения упругого рассеяния и захвата будут одинаковы по порядку величины. Это тем более справедливо для борного ангидрида, в котором рассеивающее действие бора должно дополняться рассеянием на кислороде. Поэтому наблюдаемые факты можно объяснить следующим образом.

Первый фильтр (иод) исключает из непрерывного спектра нейтронов полосу (одну или более), отвечающую характеристическому спектру этого элемента. В следующем фильтре (бор) происходит истинное поглощение нейтронов, которое ведет к уменьшению интенсивности. Но вместе с этим имеют место и упругие столкновения нейтронов с атомами бора. Если бы последние обладали практически бесконечной массой, энергия нейтронов не изменилась бы при таком рассеянии и, следовательно, спектральное распределение осталось бы неизменным. Но масса атома бора всего в десять раз больше массы нейтрона, так что заметное уменьшение энергии нейтрона происходит и при упругом соударении. Этот эффект приводит к тому, что некоторые нейтроны с энергией, немного большей энергии полосы иода и потому прошедшие сквозь первый фильтр, не поглотившись, попадают в упомянутую полосу (благодаря упругому столкновению) и,

таким образом, дают вклад в активацию детектора. Но этого, очевидно, не происходит, когда борный и иодный поглотители расположены в обратном порядке (случай «б»), что качественно подтверждает, почему наблюдаемая интенсивность в случае «а» больше, чем в случае «б».

Чтобы проверить допустимость этой гипотезы, мы выполнили опыт, в котором проверялось, действительно ли бор вызывает заметное рассеяние нейтронов с энергиями, характерными для иода. С этой целью сравнивались активности, измеренные одним только иодным поглотителем с положенной поверх детектора пластинкой B_2O_3 или без нее. Измеренные активности были равны 44,9 и 37,7 соответственно. Разность обусловлена обратным рассеянием от пластинки борного ангидрида. Все это делает предлагаемое объяснение весьма правдоподобным.

Мы глубоко благодарны проф. Дж. К. Трабакки, заведующему Физической лабораторией Института здравоохранения, предоставившему нам нейтронный источник. Мы признательны также Национальному совету по исследованиям за финансирование этой работы.

Институт физики Римского университета
Рим, 17 октября 1938 г.

К статье 79

В этом письме редактору «Physical Review» указывается, что у разных авторов под словом альбедо подразумеваются различные понятия. Согласно определению Халперна, Люнебурга и Кларка, альбедо обозначает соотношение между током, отраженным и падающим на поверхность среды (парафин). Таким определением обычно пользуются, чтобы (в теории диффузии) поставить граничные условия на поверхности раздела двух сред. Другое определение принято Ферми (в статье 74) и Ферми и Амальди (в статье 73 и в предшествовавших ей); оно отвечает так называемому экспериментальному альбедо и относится к практическому случаю измерений, проводимых с помощью тонкого детектора, сечение столкновения для которого обратно пропорционально скорости нейтронов. В этом случае связанный с чувствительностью детектора множитель $1/v$ компенсирует фактор v, на который умножается плотность нейтронов в выражении для потока.

Э. Амальди

79

АЛЬБЕДО МЕДЛЕННЫХ НЕЙТРОНОВ *

(Совместно с Э. Амальди и Дж. Виком)

Недавно Халперн, Люнебург и Кларк [1] получили точное решение интегро-дифференциального уравнения, описывающего диффузию тепловых нейтронов в парафине. Несмотря на то, что использованный этими авторами метод весьма элегантен и обеспечивает преодоление серьезных математических трудностей, их критика нашей интерпретации [2] экспериментальных результатов не представляется правильной.

Определение альбедо как «коэффициента отражения нейтронов, падающих на ограничивающую большой блок парафина плоскую поверхность», не единственно. Поэтому с помощью формулы (10) из нашей статьи в «Physical Review» [3] и было введено то, что мы назвали «экспериментальным альбедо». Все измерения альбедо нужно сравнивать с этим определением, и, как показано в статье Ферми, к этому определению относится

---

* *On the Albedo of Slow Neutrons* (With E. Amaldi and G. C. Wick). Phys. Rev., 1938, 53, 493.

[1] O. Halpern, R. Lüneburg, O. Clark. Phys. Rev., 1938, 53, 173.

[2] E. Amaldi, E. Fermi. Phys. Rev., 1936, 50, 899 (статья 73); E. Fermi. Ric. Scientifica, 1936, 7, 13 (статья 74).

[3] См., например, первую работу в примечании 2, стр. 910, 2-я колонка, строка 11. (Статья 73, стр. 710 настоящего издания.— *Ред.*)

соотношение

$$\beta = 1 - 2/(N)^{1/2}.$$

Но Халперн, Люнебург и Кларк вычислили другую величину, а именно — коэффициент отражения, который определен как отношение числа отраженных нейтронов к числу падающих. Наше определение опирается на измерение активности тонкого детектора. Далее, эта активность является не просто мерой числа падающих нейтронов, но она зависит, кроме того, от их углового распределения, причем нейтроны, падающие на детектор нормально, менее эффективны, чем нейтроны, падающие под большими углами (вероятность захвата пропорциональна $1/\cos\vartheta$). Поскольку угловые распределения падающих и отраженных нейтронов неодинаковы, отличие результатов Халперна от нашего легко объясняется [4].

Таким образом, мы должны подтвердить, что среднее число столкновений теплового нейтрона в парафине, приведенное в наших статьях, является верным с точностью до погрешностей в экспериментальных данных.

Институт физики университета, Рим, Италия
Институт физики университета, Палермо, Италия
14 января 1938 г.

[4] Можно отметить, что в статье Вика (Rend. Lincei, 1936, 23, 775) вся задача в целом основывается на том же (как и в статье Халперна) интегро-дифференциальном уравнении, а согласующийся с Ферми результат был получен численным методом. Определенный Халперном и другими коэффициент отражения также рассматривался в предположении распределения падающих нейтронов по закону косинуса; при этом был получен результат, полностью согласующийся с Халперном.

К статье 80

Нобелевская премия по физике за 1938 г. была присуждена Ферми. Официальная формулировка гласила: «За доказательство существования новых радиоактивных элементов, образующихся при облучении нейтронами, и связанное с этим открытие ядерных реакций, вызываемых медленными нейтронами».

Он получил премию в Стокгольме 10-го декабря 1938 г. от короля Швеции на традиционной торжественной церемонии.

Официальную речь о присуждении премии профессор Г. Плейель из Шведской академии закончил следующими словами по-итальянски:

«Профессор Ферми,

Королевская Академия наук Швеции присудила Вам Нобелевскую премию по физике 1938 года за Ваше открытие новых радиоактивных веществ, которые относятся к целой области элементов, и за открытие селективности медленных нейтронов, сделанное Вами во время этих исследований.

Мы приносим Вам свои поздравления и выражаем самое искреннее восхищение Вашими гениальными исследованиями, которые проливают новый свет на строение атомных ядер и открывают новые горизонты последующему развитию атомных исследований.

Теперь я прошу Вас принять Нобелевскую премию из рук Его Величества короля».

Отправляясь по этому поводу в Стокгольм, Ферми решил не возвращаться в Италию. К такому решению его вынудила политическая ситуация; о нем он сообщил лишь немногим близким друзьям. Из Стокгольма он отплыл в Нью-Йорк, куда прибыл 2-го января 1939 г.

Как можно будет заметить, в Нобелевской речи, которая была написана до открытия деления, для элементов 93 и 94 используются названия авсоний («ausonium») и гесперий («hesperium») (по древним названиям Италии.— *Ред.*). Деление было открыто в период между 10 декабря 1938 г. и публикацией речи. Об этом упоминается в подстрочном примечании; как известно, открытие деления потребовало пересмотра работы по изучению активностей, наведенных в уране.

Э. Сегре

80

ИСКУССТВЕННАЯ РАДИОАКТИВНОСТЬ, ВОЗНИКАЮЩАЯ ПРИ БОМБАРДИРОВКЕ НЕЙТРОНАМИ *

Задача превращения одних химических элементов в другие гораздо старше сколь-нибудь удовлетворительного определения самого понятия химического элемента; и все же, как известно, первый и важнейший шаг на пути к ее решению был сделан всего девятнадцать лет назад покойным лордом Резерфордом, положившим начало методу бомбардировки ядер. На нескольких примерах он показал, что при соударении быстрой α-частицы с ядром легкого элемента происходит некий процесс расщепления последнего, при котором α-частица захватывается и остается внутри ядра, а вместо нее испускается какая-то другая частица, в большинстве случаев протон. В результате этого процесса получается ядро, отличающееся от начального, вообще говоря, как электрическим зарядом, так и атомным весом.

Иногда остаточное ядро — продукт расщепления — совпадает с одним из стабильных ядер, известных из изотопного анализа; однако очень часто это не так. Ядро-продукт отличается при этом от всех встречающихся в природе ядер тем, что оно нестабильно. Впоследствии оно распадается с характерным для него средним временем жизни, испуская электрон (положительный или отрицательный), и, наконец, достигает устойчивой формы. Испускание электронов, которое с некоторым запаздыванием во времени следует за первоначальным, практически мгновенным расщеплением, представляет собой так называемую искусственную радиоактивность, открытую Жолио и Ирэн Кюри в конце 1933 г.

Первые случаи искусственной радиоактивности эти авторы наблюдали, бомбардируя α-частицами полониевого источника бор, магний и алюминий. Таким образом они получили три радиоактивных изотопа — азота, кремния и фосфора — и сумели, кроме того, химически отделить эти активности от всей массы исходных атомов облученного вещества.

Нейтронная бомбардировка

После этого открытия сразу же стало ясно, что α-частицы, по всей вероятности, не являются единственным типом бомбардирующих снарядов, которые создают искусственную радиоактивность. По этой причине я ре-

---

* *Artificial Radioactivity Produced by Neutron Bombardment*, Les Prix Nobel en 1938. Les Conférences Nobel, Stockholm, 1939, 1—8.

шил изучить с этой точки зрения последствия бомбардировки ядер нейтронами.

По сравнению с α-частицами у нейтронов есть очевидный недостаток: существующие источники нейтронов излучают их довольно мало. Действительно, нейтроны испускаются как продукты ядерных реакций, выход которых лишь в редких случаях оказывается больше 10^{-4}. Однако этот недостаток компенсируется тем, что у нейтронов нет электрического заряда и они могут доходить до ядер всех атомов, поскольку им не приходится преодолевать потенциальный барьер, обусловленный окружающим ядро кулоновским полем. Более того, так как нейтроны практически не взаимодействуют с электронами, их пробег оказывается очень большим, а вероятность ядерного столкновения соответственно больше, чем при бомбардировке α-частицами или протонами. Фактически нейтроны уже ранее были известны как эффективный агент, вызывающий некоторые ядерные расщепления.

В качестве источника нейтронов я пользовался в этих исследованиях небольшой стеклянной ампулой, содержавшей порошок бериллия и радон. При количестве радона до 800 *мкюри* подобный источник излучает около $2 \cdot 10^7$ нейтронов в секунду. Это число очень мало́, конечно, по сравнению с выходом нейтронов на циклотронах или высоковольтных трубках, однако малые размеры, превосходная стабильность и крайняя простота иногда становятся очень полезными качествами источников радон + + бериллий.

Ядерные реакции, вызываемые нейтронами

После первых опытов я мог удостовериться, что большинство опробованных элементов становится активным под воздействием нейтронного облучения. В некоторых случаях распад активности во времени соответствовал одному среднему времени жизни, в других — суперпозиции более чем одной экспоненциальной кривой распада.

Систематическое изучение поведения элементов по всей периодической таблице было выполнено мною с помощью нескольких сотрудников, а именно Амальди, Д'Агостино, Понтекорво, Разетти и Сегре. В большинстве случаев для идентификации химического элемента — носителя активности — мы проводили также и химический анализ. Для короткоживущих веществ такой анализ следует проводить очень быстро — за время порядка одной минуты.

Результаты первого такого изучения радиоактивности, вызванной нейтронами, можно резюмировать следующим образом: из 63 изученных элементов 37 обнаружили легко регистрируемую активность; не было обнаружено сколько-нибудь заметной зависимости того, активируется ли элемент от его атомного веса. Химический анализ и другие соображения, опиравшиеся главным образом на изотопный состав, позволили, кроме того, установить следующие три типа ядерных реакций, приводящих к искус-

ственной радиоактивности:

$$A_Z^M + n_0^1 = A_{Z-2}^{M-3} + He_2^4, \quad (1)$$

$$A_Z^M + n_0^1 = A_{Z-1}^{M} + H_1^1, \quad (2)$$

$$A_Z^M + n_0^1 = A_Z^{M+1}, \quad (3)$$

где A_Z^M — символ элемента с атомным номером Z и массовым числом M, а n — символ нейтрона.

Реакции типа (1) и (2) происходят в основном на легких элементах, тогда как для тяжелых очень часто наблюдаются реакции типа (3). Во многих случаях на одном элементе происходят все три процесса сразу. Например, бомбардировка нейтронами алюминия, имеющего единственный изотоп Al^{27}, приводит к трем радиоактивным продуктам: Na^{24} с перидом 15 *час* за счет процесса (1), Mg^{27} с периодом 10 *мин* за счет процесса (2) и Al^{28} с периодом 2,3 *мин* за счет процесса (3).

Как упоминалось выше, тяжелые элементы обычно реагируют лишь по схеме (3) и по этой причине они дают одну экспоненциально распадающуюся активность, исключая некоторые осложнения, обсуждаемые ниже, и случай, когда у исходного элемента имеется более одного стабильного изотопа. Весьма поразительное исключение из такого поведения обнаруживают активности, наведенные нейтронами в естественно-радиоактивных элементах — тории и уране. Для их исследования необходимо прежде всего как можно тщательнее очищать элемент от дочерних веществ, испускающих β-частицы. После такой очистки как торий, так и уран спонтанно излучают лишь α-частицы, которые можно легко отличить по поглощению от β-активности, наведенной нейтронами.

После облучения нейтронами оба элемента обнаруживают довольно сильную наведенную активность, и в обоих случаях кривая ее распада указывает на образование нескольких активных объектов с различными средними временами жизни. С весны 1934 г. мы начали попытки выделить химически носители этих активностей и получили в результате, что носители некоторых активностей урана не являются ни изотопами самого урана, ни элементами легче его вплоть до атомного номера 86. Мы пришли к выводу, что носителем был один или более элементов с атомным номером больше 92; элементы 93 и 94 у себя в Риме мы называли авсонием и гесперием соответственно. Известно, что О. Ган и Л. Мейтнер провели очень тщательное и обширное изучение продуктов распада облученного урана и сумели отыскать среди них элементы вплоть до атомного номера 96 [1].

[1] Открытие Ганом и Штрассманом бария среди продуктов облученного урана — как следствие процесса, при котором уран расщепляется на две примерно равные части,— делает необходимым пересмотр всей проблемы трансурановых элементов, поскольку многие из них могут оказаться продуктами расщепления урана.

Здесь следует заметить, что помимо процессов (1), (2) и (3), ведущих к образованию искусственной радиоактивности под действием нейтронов, нейтроны достаточно высокой энергии могут реагировать также и следующим путем, на который впервые указал Хейн: первичный нейтрон не остается связанным внутри ядра, а выбивает один из ядерных нейтронов. В результате возникает новое ядро, которое является изотопом исходного и обладает атомным весом на единицу меньшим. Конечный результат идентичен продуктам, получающимся путем ядерного фотоэффекта (Боте) или путем бомбардировки быстрыми дейтронами. Один из важнейших результатов сравнения активных продуктов, которые получаются в этих процессах, состоит в доказательстве — его впервые дал Боте — существования изомерных ядер, аналогичных изомерам UX_2 и UZ, уже давно обнаруженным О. Ганом в его исследованиях семейства урана.

Число надежно установленных случаев изомерии возрастает как будто довольно быстро по мере продолжения исследований и представляет заманчивую область для изучения.

Медленные нейтроны

Интенсивность активации, как функция расстояния до нейтронного источника, в ряде случаев обнаруживала аномалии, зависевшие, казалось, от предметов, которые окружают источник. Тщательное исследование этих эффектов привело к неожиданному результату: окружение большим количеством парафина как источника, так и активируемого тела увеличивает в ряде случаев интенсивность активации во много (до 100) раз. Подобный же эффект создает вода и вообще вещества с большой концентрацией водорода. Вещества, которые не содержат водород, иногда проявляют такие же свойства, хотя и гораздо менее ярко выраженные.

Объяснение этих результатов состояло в следующем. Поскольку нейтрон и протон обладают примерно одинаковыми массами, любое упругое столкновение быстрого нейтрона с первоначально покоившимся протоном приводит к распределению между ними имеющейся кинетической энергии; можно показать, что нейтрон с начальной энергией 10^6 *эв* после примерно 20 соударений с атомами водорода уменьшает свою энергию до величины, близкой энергии теплового движения. Это означает, что после того, как нейтроны высокой энергии испускаются источником, находящимся внутри большого объема парафина или воды, они очень быстро теряют бóльшую часть своей энергии и превращаются в «медленные нейтроны». Как теория, так и эксперимент показывают, что определенные типы реакций под действием нейтронов — особенно реакции типа (3) — для медленных нейтронов осуществляются с гораздо бóльшими сечениями, чем для быстрых; это оказывается причиной бóльших интенсивностей активации при облучении внутри большого количества парафина или воды.

Кроме того, следует заметить, что средняя длина свободного пробега нейтронов относительно упругих столкновений с атомами водорода в парафине вполне заметно убывает с энергией. И поэтому, когда уже после трех-четырех соударений энергия нейтрона существенно уменьшится, вероятность его диффузии за пределы парафина (прежде, чем закончится процесс замедления) становится очень малой.

Большому сечению захвата медленных нейтронов некоторыми атомами должно, очевидно, отвечать и очень сильное поглощение этими атомами медленных нейтронов. Мы провели систематическое исследование подобного поглощения и обнаружили, что в этом отношении различные элементы ведут себя совершенно по-разному. Сечение захвата медленных нейтронов меняется без какой бы то ни было видимой регулярности для разных элементов от 10^{-24} *см*^{2} до величины примерно в тысячу раз большей. Прежде чем обсуждать это обстоятельство, а равно и зависимость сечения захвата от энергии нейтронов, рассмотрим сначала, насколько может быть снижена энергия первичных нейтронов за счет столкновений с протонами.

Тепловые нейтроны

Если бы нейтроны могли бесконечно диффундировать внутри парафина, то их энергия, очевидно, достигла бы в конце концов некоторого среднего значения, соответствующего тепловому движению. Возможно, однако, что еще до того, как нейтроны достигнут этого наинизшего энергетического предела, они либо покинут парафин вследствие диффузии, либо окажутся захваченными некоторыми ядрами. Если же энергия нейтрона достигает теплового значения, то нужно ожидать, что интенсивность активации медленными нейтронами будет зависеть от температуры парафина.

Вскоре после открытия медленных нейтронов мы попытались обнаружить температурную зависимость активации, но ввиду недостаточной точности эксперимента успеха не имели. Несколько месяцев спустя Мун и Тилман в Лондоне доказали, что интенсивность активации зависит от температуры; они показали, что наблюдается значительное возрастание активации ряда детекторов, когда парафин, в котором замедляются нейтроны, охлаждается от комнатной температуры до температуры жидкого воздуха. Этот опыт безусловно доказывает, что существенная доля нейтронов действительно достигает энергии теплового движения. Другим следствием этого опыта является то, что внутри парафина процесс диффузии должен продолжаться сравнительно долго.

Для непосредственного измерения, по крайней мере, порядка величины этого времени, мною и моими сотрудниками был поставлен эксперимент. На ободе вращающегося колеса закреплялся источник нейтронов, а на равных расстояниях от него на том же самом ободе располагались два одинаковых детектора — один перед источником, другой — по-

зади него (относительно направления вращения). Затем колесо начинало с высокой скоростью вращаться внутри зазора, сделанного в большом блоке парафина. Мы нашли, что оба детектора одинаково активны, если колесо покоится, но когда оно во время активации движется, детектор позади источника становится существенно более активным, чем передний детектор. Анализируя этот опыт, мы пришли к выводу, что нейтроны остаются внутри парафина на время порядка 10^{-4} *сек.*

В нескольких лабораториях были поставлены другие эксперименты с иными механическими устройствами. Например, в Нью-Йорке Даннинг, Финк, Митчелл, Пеграм и Сегре построили механический селектор скоростей и непосредственным измерением показали, что большая часть нейтронов, диффундирующих за пределы парафинового блока, действительно обладает скоростями, которые отвечают тепловому движению.

После уменьшения их энергии до величины, соответствующей тепловому движению, нейтроны продолжают диффундировать без дальнейшего изменения своей средней энергии. Изучение этого процесса диффузии Амальди и мною показало, что в парафине или воде тепловые нейтроны до захвата испытывают примерно 100 столкновений. Однако, поскольку средняя длина свободного пробега тепловых нейтронов в парафине или воде очень мала (около 0,3 *см*), их полное смещение за время процесса диффузии весьма невелико (порядка 2 или 3 *см*). Диффузия прекращается, когда тепловой нейтрон захватывается, обычно одним из протонов, с образованием дейтрона. Порядок величины вероятности такого захвата можно вычислить (в хорошем согласии с экспериментальным значением), предположив, что переход из состояния свободного нейтрона в состояние, в котором нейтрон связан в дейтроне, обусловлен магнитными дипольными моментами протона и нейтрона. Высвобождающаяся в этом процессе энергия связи излучается в виде γ-лучей, впервые наблюдавшихся Ли.

Испусканием γ-лучей сопровождаются обычно все процессы захвата медленных нейтронов любым ядром. Сразу же после захвата нейтрона ядро оказывается в состоянии высокого возбуждения и излучает один или более γ-квантов, прежде чем достигнет основного состояния. Испускаемые в таком процессе γ-лучи изучались Разетти и Флайшманом.

Аномалии поглощения

Теоретический анализ вероятности захвата нейтрона ядром — в предположении, что энергия нейтрона мала по сравнению с разностью близлежащих энергетических уровней в ядре,— приводит к результату, согласно которому сечение процесса захвата должно быть обратно пропорционально скорости нейтрона. В то время как этот результат качественно согласуется с высокой эффективностью бомбардировки медленными нейтронами, наблюдавшейся экспериментально, с его помощью не удается объяснить

ряд особенностей процесса поглощения, которые мы будем рассматривать дальше.

Если бы вероятность захвата нейтрона была обратно пропорциональна его скорости, то можно было бы ожидать, что два разных элемента будут вести себя совершенно одинаково как поглотители медленных нейтронов при условии, что толщины обоих поглотителей выбраны надлежащим образом, т. е. так, чтобы они одинаково поглощали нейтроны данной энергии. На самом же деле поглощение подчиняется более сложным законам — это вскоре было замечено Муном и Тилманом и другими авторами, которые показали, что поглощение данным элементом, как правило, оказывается больше, когда медленные нейтроны детектируются по активности, наведенной в том же самом элементе. То, что простой закон обратной пропорциональности не имеет силы, доказали также в Нью-Йорке Даннинг, Пеграм, Разетти и другие в прямом опыте на механическом селекторе.

Зимой 1935—1936 гг. мы с Амальди провели систематическое изучение этих явлений. В результате оказалось, что у каждого поглотителя медленных нейтронов имеется одна или несколько характеристических полос поглощения, обычно при энергиях ниже 100 *эв*. Коэффициент поглощения велик не только в такой (или таких) полосе, но также всегда и для нейтронов тепловой энергии. У некоторых элементов, особенно у кадмия, характеристическая полоса поглощения перекрывается с поглощением в тепловой области. Таким образом, этот элемент очень сильно поглощает тепловые нейтроны, тогда как для нейтронов более высоких энергий он почти прозрачен. По этой причине тонким листом кадмия пользуются для отфильтровывания тепловых нейтронов из сложного излучения, которое выходит из парафинового блока, содержащего внутри источник нейтронов.

Бор, а также Брейт и Вигнер независимо предложили объяснить упомянутые выше аномалии резонансом с виртуальным энергетическим уровнем компаунд-ядра (т. е. ядра, составленного из бомбардируемого ядра и нейтрона). Бор пошел еще дальше, дав также и качественное объяснение большой вероятности существования, по меньшей мере, одного такого уровня в пределах энергетического интервала шириной порядка 100 *эв*, отвечающего энергетической полосе медленных нейтронов. Но эта полоса соответствует энергии возбуждения компаунд-ядра, равной многим миллионам *эв* и представляющей энергию связи нейтрона. Бор сумел показать, что, поскольку ядра, особенно тяжелые, являются системами с очень большим числом степеней свободы, расстояние между соседними энергетическими уровнями очень быстро уменьшается с ростом энергии возбуждения. Вычисление этого расстояния показывает, что при низких энергиях возбуждения оно составляет по порядку величины 10^5 *эв*, тогда как при высоких — порядка десятка миллионов *эв* — оно сокращается (для элементов среднего атомного веса) до 1 *эв* и менее. Весьма вероятным поэтому является предположение, что один такой уровень (или более) ле-

жит в пределах полосы медленных нейтронов, а это объясняет, таким образом, большую частоту случаев, когда наблюдаются аномалии в поглощении.

Прежде чем закончить этот обзор работ по искусственной радиоактивности, созданной нейтронами, я считаю своим долгом поблагодарить тех, кто способствовал успеху этих исследований. Особенно я должен поблагодарить всех моих сотрудников, которые уже были названы, а также Институт здравоохранения в Риме, в особенности проф. Дж. К. Трабакки, — за предоставление всего множества использовавшихся радоновых источников и Национальный совет по исследованиям — за ряд субсидий.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абрагам М. (Abraham M.) 72, 73, 108
Агрусс (Agruss) 669, 670
Аллисон С. 38, 40
Альварец 480
Альфер 6
Амальди Э. (Amaldi E.) 5, 25, 26, 38, 302, 426, 473, 509, 513, 542, 592—596, 598—600, 604, 605, 609, 611—614, 618—620, 639, 643, 675, 679, 684, 685, 689, 690—692, 697, 699, 706, 711, 718, 721, 726, 732, 740, 741, 777, 786, 791, 794, 798, 802, 803
Амидей 9, 10, 12—14
Андерсон Г. 5, 34, 38—40,
Андраде (Andrade N. da C.) 515
Аппель 16, 17
Армеллини Дж. 64, 90

Баба́ 27, 610
Бак (Back E.) 215, 260, 486, 509
Баркер (Barker E. F.) 475
Бекер 161
Беккер 471, 513
Берлаж (Berlage H. P.) 484
Бернардини Дж. 14, 25, 27
Бертран 689
Бете Г. (Bethe H. A.) 27, 278, 428, 438, 610, 678, 684, 685, 691, 725, 736, 767, 768, 780
Бечер (Bacher R.) 499, 509
Бианки Л. 11, 14
Блок 267
Блох (Bloch F.) 278, 426, 610
Блэккет (Blackett) 465, 510, 521, 522
Бозе 199, 202, 589, 590
Больцман Л. (Boltzmann L.) 16, 142, 575, 582, 589—591, 689
Бор Н. (Bohr N.) 16, 19, 111, 114, 146, 165, 167, 169, 184, 201, 214, 220, 221, 254, 255, 258, 268, 284, 291, 299, 521, 522, 599, 688, 689, 701, 737, 803
Борн М. (Born M.) 19, 74, 75, 78, 146, 147, 180, 217, 227, 229, 439, 771
Боте 457, 470—472, 513, 521, 522, 800
Бредберн 439
Брейт (Breit G.) 155, 426, 428, 489, 491, 495, 501, 504, 509, 701, 737, 803
Бриллюэн (Brillouin L.) 146, 503, 504, 548, 551, 591
Броди 156
Бройль Л. де (Broglie L. de) 136, 227, 522
Брунетти 270
Бургер (Burger H. C.) 178, 181, 182, 315
Бухерер 73
Бэджер (Badger P. M.) 475
Бюргерс (Burgers) 112, 125
Бьердж (Bjerge T.) 594, 595, 640, 643, 660, 661, 664, 680, 686, 692, 711

Вайцель В. (Weizel W.) 312
Валларта (Vallarta) 482
Валлер (Waller I.) 364, 427
Ваттенберг 5
Вейль (Weyl) 17, 64, 65, 69, 72, 77
Вейцзекер 20, 165
Вентцель (Wentzel G.) 296, 503, 504, 548, 551, 617
Вертенштейн (Wertenstein) 457, 620
Вигнер (Wigner E.) 427, 524, 701, 737, 803
Вик Дж. (Wick G. C.) 25, 27, 614, 619, 686, 690, 758, 759, 761, 764 797, 795
Вильсон 44
Вильямс Э. Дж. 20, 165
Вин 137
Винтер 202
Витт (Witt H.) 187
Вольта А. 38, 43, 251, 344, 350, 785
Вольтерра 14, 21, 33
Вольф (Wolff H. W.) 316
Вольфенштейн 34
Вуд (Wood R. W.) 150, 188, 190, 262, 263, 509
Вустер 468

Галилей 13, 23, 344
Гальвани 791
Гамильтон 16, 69

Гамов (Gamov G.) 321, 461, 465—467, 522, 524, 632, 637, 638
Ган О. (Hahn O.) 38, 599, 670, 799, 800
Гарбассо А. 186, 189, 195, 214
Гарвин 34
Гаудсмит (Goudsmit S.) 115, 216, 220, 222, 223, 260, 486, 499, 504, 508, 509, 521
Гаусс 21
Гейгер Г. 466, 521
Гейзенберг (Heisenberg W.) 19, 21, 179, 180, 182, 200, 202, 215, 217—219, 222, 259, 302, 337, 359, 365, 369, 389, 418, 419, 426, 428, 457, 461 484, 521, 522, 525, 526, 589, 637, 767
Гелл-Манн М. 34, 42—44, 524
Гепперт-Майер (Göppert-Mayer M.) 42, 278, 426
Герлах 261, 262
Герман 6
Герц 346
Герц П. (Herz P.) 127
Герцен 465
Герцфельд (Herzfeld K.) 146, 147
Гершель 252
Гетц (Goetz A.) 516
Гиббс Дж. У. 573
Гилберт 605, 620
Голдсмит Г. Г. (Goldsmith H. H.) 690, 725
Голдхабер (Goldhaber M.) 659, 660, 767, 768
Гольдбергер 34
Грассман Г. 11
Грей (Gray) 510, 512
Гриммет (Grimmet) 665, 667, 668
Гроссе фон (Grosse von) 669, 670
Гротриан (Grotrian W.) 247, 358
Гуи (Gouy C. R.) 85, 86
Гюттингер (Güttinger P.) 495, 509

Д'Агостино О. (D' Agostino O. 593, 598, 604—606, 620, 643, 679, 684—686, 691, 721, 740, 741, 777, 798
Дадор (Dadord M. R.) 85
Даннинг (Dunning J. R.) 647, 692, 736, 802, 803
Дарвин (Darwin C. G.) 324, 329, 509, 547
Дебай П. 258, 288, 585, 592
Деннисон (Dennison D. M.) 473—475
Джексон (Jackson D. A.) 323, 324, 327, 496, 497, 509
Джентиле Дж. (Gentile G.) 27, 288, 297, 298, 321, 351
Джермер 349
Джинс (Jeans J. H.) 584, 591
Джонс (Jones E. J.) 493, 509
Джонсон 480

Дике Г. (Dieke G. H.) 312
Дини У. 11, 23
Дирак П. А. М. (Dirac P. A. M.) 165, 200 202, 293, 302, 303, 316, 322, 324, 328 331, 337, 339, 359, 362, 375, 376, 404, 411, 412, 416, 418, 422, 426, 462, 512, 522, 526, 589, 594
Доргело (Dorgelo H. B.) 178, 181, 182, 315
Дэвиссон 349
Дюлонг 583
Дюмонд 514

Жолио-Кюри И. (Joliot-Curie) 33, 457, 471, 472, 513, 514, 522, 592, 601, 602, 605, 620, 625, 662, 797
Жолио Ф. (Joliot) 33, 38, 457, 471, 472, 513, 514, 522, 592, 601, 602, 605, 620, 625, 662, 686, 797

Захариас (Zacharias J. R.) 685, 781
Зееман (Zeeman P.) 252, 256, 257, 267, 509, 592
Зоммерфельд А. (Sommerfeld A.) 19, 111, 125, 154, 179, 180, 182, 186, 200 — 202, 215, 217, 218, 223, 227, 521, 590

Иваненко Д. Д. 457, 522

Йордан (Jordan P.) 19, 188, 303, 427, 522, 526

Казимир (Casimir H.) 469, 509
Карно 345
Каррара Н. 84
Кастельнуово 14, 21, 31, 337
Кауфман 73, 74
Керр 252, 266
Кларк (Clark O.) 794, 795
Клей (Clay J.) 480, 484
Клейн (Klein O.) 416, 522, 526
Кокконн 25
Кокрофт (Cockroft) 472, 522, 605, 620
Кольрауш (Kohlrausch K. W. F.) 452
Комптон (Compton A. H.) 39, 135, 155, 480, 484
Конверси 25
Копферман (Kopfermann H.) 493, 496, 497, 509
Корбино О. М. (Corbino O. M.) 18, 24—26, 31, 36, 37, 108, 142, 150, 178, 183, 200, 231, 252, 265, 271, 279, 284, 302, 312, 337, 359, 457, 598, 611, 782—785
Коттон 252, 266
Крейн (Crane) 605, 620
Крониг (Kronig R. de L.) 224

Курчатов И. В. (Kourtchatow I.) 39, 679, 692
Кэллог (Kellog J. M. B.) 685, 781
Кэмпбелл (Campbell J. S.) 496, 509
Кюри И. см. Жолио-Кюри И.
Кюри М. 458, 521, 522, 593, 686

Ландау (Landau L.) 44, 427
Ланде (Landè A.) 178, 179, 215—217, 221, 222, 259—261, 504
Ланденбург 270
Ланжевен 19, 266
Лармор 252, 382
Лауритсен (Lauritsen) 605, 620
Лауэ М. 72
Леви-Чивита Т. (Levi-Civita Т.) 14, 21, 33, 55, 64, 65, 90, 91, 309, 337
Лемэтр (Lemaitre) 482
Ли (Lea D. E.) 640, 648, 802
Ли Цзун-дао 34, 44
Ливингстон (Livingston M. S.) 605, 725, 736
Ло Сурдо 267, 268
Лондон 27, 294, 610
Лоренц Г. А. (Lorentz H. A.) 19, 46, 72—75, 200, 252, 255, 257
Лоуренс (Lawrence) 39, 522, 605, 661
Люнебург (Lüneburg R.) 794, 795

Майер 345
Майорана (Majorana E.) 20, 25, 27, 267, 278, 288, 297, 298, 302, 312, 321, 351, 457, 505, 522, 690, 767
Макалузо 252, 265, 783
Маккей (MacKay H. A. C.) 701
Макленнан (MacLennan J. C.) 250, 501, 509, 665, 667, 668
Максвелл 346, 575
Маркони 346
Маршак 524, 748
Маршалл 34
Мейтнер Л. (Meitner) 468, 470, 513, 521, 522, 592, 656, 670, 799
Мёллер (Møller C.) 428, 429, 438
Микаэлс Дж. Л. (Michiels J. L.) 791, 792
Милликен 439, 592
Минковский 277
Митчелл (Mitchell D. P.) 692, 736, 802
Мотт 465
Мун (Moon P. B.) 597, 679, 680, 686, 692, 697, 801, 803

Нейман Дж. фон 22, 38, 39
Нернст 17
Нобиле 72
Ноддак И. 594
Ньютон 344
Нэттол 466

Оккиалини (Occhialini) 510
Оппенгеймер (Oppenheimer J. R.) 38, 39, 364, 416, 427, 510, 511
Орир 34
Ортман 468
Оствальд 17

Пайерлс (Peierls R.) 27, 427, 610, 678, 684, 685, 767, 768, 780
Парравано Н. 634
Паули (Pauli W.) 19, 32 154, 199, 200, 202—204, 217, 223, 280, 302, 303, 315—317, 322, 324, 328, 331, 332, 359, 418, 419, 426, 427, 457, 458, 468, 495, 509, 521, 522, 525
Пачинотти 344
Пашен (Pashen F.) 215, 260
Пеано Дж. 11
Пеграм (Pegram G. B.) 692, 736, 802, 803
Пенсиас 44
Перрен Ф. (Perrin F.) 535, 691
Персико Э. (Persico E.) 5, 9, 11, 13, 15, 17, 20, 21, 24, 45, 46, 64, 72, 165, 227, 231, 271
Пиччиони 25
Планк М. (Plank M.) 19, 108, 203, 582, 584
Планшерель 115
Плачек Г. (Placzek G.) 27, 441, 473, 610, 689, 725, 736
Плессет (Plesset) 510, 511
Позе 471
Полвани Дж. 72, 135, 237, 239
Понтекорво Б. (Pontecorvo B.) 7, 45, 82, 85, 111, 183, 251, 343, 375, 458, 510, 519, 524, 571, 595, 596, 600, 605, 611, 639, 641, 643, 675, 678, 679, 684—686, 690—692, 697, 721, 740, 741, 777, 791, 798
Понтремоли А. (Pontremoli A.) 72, 108, 231
Попов А. С. 346
Прайсверк (Preiswerk P.) 625, 662, 688, 689, 728, 736
Престон 257
Пти 583
Пуанкаре (Poincaré H.) 16, 17, 116, 118, 119
Пуассон 11
Пуччанти Л. 72, 84, 104, 247, 315

Раби (Rabi I. I.) 685, 781
Разетти Ф. (Rasetti F.) 5, 9, 15, 17, 23,

25, 32, 33, 35, 45, 84, 85, 146, 150, 154, 160, 178, 186, 188, 189, 195, 199, 202, 214, 220, 243, 246, 279, 288, 295, 302, 312, 315, 316, 321, 351, 439, 440, 443, 450, 464, 473, 513—515, 524, 592, 593, 596, 600, 605, 606, 609, 610, 620, 639, 641, 643, 675, 685, 686, 689, 691, 692, 721, 725, 736, 741, 786, 791, 798, 802, 803
Рака Д. (Racah G.) 25, 27, 302, 389, 427, 489, 504, 509
Раман 439
Регенер (Regener E.) 483, 484
Резерфорд Э. (Rutherford E.) 16, 32, 40, 258, 466, 467, 469, 515, 521, 522, 541, 594, 598, 610, 620, 643, 787, 790, 797
Релей 584
Риги А. 265, 783
Рид (Read) 665, 667, 668
Ричардсон (Richardson) 16, 17, 46, 47, 73, 78, 135—137
Ричль (Ritschl R.) 495, 509
Риччи 90
Розенблюм 466
Розенталь 115
Розенфельд А. 34
Розенфельд (Rosenfeld L.) 427, 428
Ролла Л. 630, 634, 667, 670
Росси Б. (Rossi B.) 25, 27, 480, 481
Рунге 259

Сакур (Sackur O.) 142
Салам 44
Сарджент (Sargent B. W.) 539, 541
Саха М. Н. (Saha M. N.) 160—163
Сегре Э. (Segrè E.) 5, 9, 10, 16, 20, 25, 30, 31, 36, 38, 39, 43—45, 104, 115, 142, 199, 302, 309, 315, 322, 337, 351, 427, 458, 485, 571, 592, 593, 595, 596, 598—600, 604, 605, 609, 611—614, 618—620, 639, 643, 675, 679, 684—686, 690—692, 706, 721, 736, 740, 741, 777, 782, 796, 798, 802
Синг Дж. (Singe J.) 64
Смит С. 5
Стонер (Stoner E. C.) 204, 223, 284, 291, 292
Сударшан 524
Сцилард (Szilard L.) 39, 650, 656, 657, 666, 679, 692, 699
Сэрре 11

Тамм (Tamm I.) 416, 427
Таррант (Tarrant) 510, 512
Таунсенд 16
Тейлор (Taylor) 660
Теллер Э. 27, 473, 524, 610
Тетроде (Tetrode H.) 142, 213
Тибо (Thibaud J.) 515, 623
Тилман (Tillman J. R.) 597, 679, 680, 686, 692, 697, 711, 801, 803
Томас (Thomas L. H.) 31, 278, 542, 543
Томсон Дж. Дж. (Thomson J. J.) 104, 167, 403
Торричелли Э. 30
Трабакки Дж. К. 514, 517, 592, 598, 601, 634, 670, 740, 784, 793, 804
Туркевич 6

Уикс (Weekes D. F.) 725, 736
Уленбек Дж. (Uhlenbeck G.) 27, 115, 216, 220, 222, 223, 260, 510, 610
Уолтон (Walton) 472, 605, 620
Урбанский В. 123, 124
Уэсткот (Westcott C. H.) 594, 595, 640, 643, 661, 664, 680, 686, 692, 711

Фано У. 25, 27
Фарадей 252
Фаулер (Fowler R. H.) 469, 591
Феа Л. 670
Фейнман 44, 524
Ферми Л. 9, 20, 35, 45
Феррети 25
Финк (Fink G. A.) 692, 736, 802
Фицджеральд 73
Флайшман (Fleischmann) 627, 802
Фогт 258
Фок (Fock V.) 244, 543
Франк Дж. (Frank J.) 39, 183
Фрийе (Frilley M.) 515, 518
Фриш О. (Frish O. R.) 620, 681, 685, 689, 701, 725, 736, 781
Фюхтбауэр (Füchtbauer C.) 171, 315, 316

Халбан фон (Halban H. von) 688, 689, 728, 736
Халперн (Halpern O.) 794, 795
Ханле (Hanle W.) 190, 191
Харгривс (Hargreaves J.) 322, 324, 332, 509
Харди (Hardy J. D.) 473, 474
Хартри (Hartree D. R.) 325, 336, 543
Хвольсон 11
Хевеши фон (Hevesy von) 662, 701
Хейн (Heyn F. A.) 789, 800
Хендерсон 605
Хупфельд 470

Чалмерс (Chalmers) 650, 656, 657, 666, 679
Чандрасекар 41
Чао 470

Чезаро 11
Чу 34
Чэдвик (Chadwick J.) 465, 472, 513, 521, 522, 541, 610, 659, 660

Шварцшильд 268
Шиндлер 472
Шпонер (Sponer H.) 171
Шредингер (Schrödinger E.) 21, 30, 227, 228, 231—235, 243, 271, 272, 276, 337, 411
Штарк 267, 270
Штейнбергер 34
Штейнке 472
Штёрмер 480, 481
Штерн О. (Stern O.) 142—144, 213, 260, 262, 592, 685, 781
Штрассман 38, 599, 799
Шюлер (Schüler H.) 323, 324, 327, 493, 495, 509

Эйнштейн (Einstein A.) 19, 75, 82, 199, 202, 203, 348, 585, 589, 590
Эллетт (Ellet A.) 190
Эллис (Ellis B.) 468, 469, 521, 522, 541, 610, 637
Энрикуез 21, 337
Эпштейн 268
Эренфест П. (Ehrenfest P.) 19, 111, 112, 115, 125, 178, 179, 521
Эстерман (Estermann I.) 685, 781

Якоби 16
Янг 28, 34, 43, 44

Allin E. A. 509
Anderson 620
Artsimovich L. 692
Arvidsson G. 509

Beck 510
Bouwers A. 789
Brück H. 509

Crawford M. F. 509

Dunoyer 150

Elsasser W. M. 691

Filippov 321, 336
Fisher R. 509

Gaunt J. A. 426
Gibbs R. C. 509
Granatn L. P. 509
Gross 336
Gray 169

Harper 620
Harteck P. 787
Hasenöhrl F. 108
Hulme R. H. 536
Hund B. F. 205

Jaeckel 735
Joos 171

Kallman H. 509
Kennard E. H. 341
Keyston J. E. 509
Kikuchi S. 427
Kopff A. 82
Kramers H. A. 172
Kruger P. Gerald 509
Kuntke A. 790

Leppard L. B. 509
Loleit H. 735
Loomis F. W. 509

MacCre W. H. 426
MacLay A. B. 509
MacRobert 169
Mathews 169
Mosengeil K. von 108
Myssowsky L. 679, 692

Neddermeyer 620
Nettleton 172

Oliphant M. L. E. 787

Palibin P. 692
Paneth F. A. 735
Pauling L. 509
Prokofjew W. 321

Ridenour L. N. 692
Rose J. L. 509
Rosseland S. 167
Roussinov 679
Russell H. N. 215, 222

Saunders F. A. 215, 222
Siegel C. L. 115

Tolman R. C. 191
Turner L. A. 191

Unsöld A. 223

Weber G. 127
Weisskopf V. 427
Williams R. C. 509

Yost Don M. 692

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Адиабатический принцип Эренфеста 111—114, 125, 127, 133—134, 231—234

Аномальная дисперсия, использование для определения h/k 246—250

Атомные спектры (см. также Сверхтонкая структура спектров, Смещение высших линий в атмосфере постороннего газа)

— —, аномалии интенсивности в дублетах щелочных металлов 315—321

— —, гипотеза о спине электрона 220—224

— —, — — — —, трудности 224—226

— —, запрещенные линии в магнитных полях 214—219

— —, интенсивность линий мультиплета 178—182

Аналитическая механика и квантовая теория Бора — Зоммерфельда 125—143

— —, квазиэргодичность механических систем 115—123

— —, существование квазиэргодичных систем 123—124

Больцмановское распределение, экспериментальная проверка 246—250

Взаимодействие нейтронов с протонами (теория)

— — — —, историческая справка 689—690

— — — —, процесс $n + p \to d + \gamma$ 684—685, 777—781

— — — —, рассеяние без учета влияния химической связи 766—768

— — — —, —, влияние химической связи 768—773

— — — —, —, — — —, метод квазипотенциала 769—772

— — — —, уровень ^1S дейтрона 740, 768, 781

Взаимодействие нейтронов с ядрами (см. также Взаимодействие нейтронов с протонами; Возраст нейтронов; Время жизни нейтрона в парафине; Движение нейтронов в водородсодержащих веществах; Длина диффузии нейтронов; Медленные нейтроны; Тепловые нейтроны)

— — — — —, возможное образование трансурановых элементов 605—608, 631—632, 668—670, 799

— — — —, данные для отдельных элементов 623—632, 634—636, 659—674

— — — —, замедление нейтронов в веществах, не содержащих водород 652—653, 791—793

— — — —, замедление нейтронов в водородсодержащих веществах 639—641, 644—646

— — — —, испускание γ-лучей при захвате нейтрона 648—649

— — — —, историческая справка 514, 592—600

— — — —, методика опытов 621—623, 658

— — — —, обнаружение влияния водородсодержащих веществ на активацию 639

— — — —, обнаружение гигантского поглощения медленных нейтронов 642

— — — —, обнаружение наведенной радиоактивности 601—604

— — — —, обнаружение реакции (n, α) на ядрах Li^6 и B^{10} 659—660

— — — —, объяснение механизма активации 632—634, 653—656

— — — —, химическое выделение радиоактивных изотопов 607—608, 624—632, 656—658, 661—670

Влияние падающих метеоритов на уравнение движения планет 309—311

Возбуждение и ионизация атома заряженными частицами, расчет методом эквивалентных фотонов 165—177

— — — — водорода медленными протонами 183—185

Возраст нейтронов 689, 721—724, 744—749
Время жизни нейтрона в парафине, теория 684—685, 777—781
— — — — —, экспериментальное определение диффузионными опытами 712—714, 740
— — — — —, — — механическим устройством 680

β-распад, векторный вариант взаимодействия 527—531, 637
—, вероятность перехода 531—534
—, историческая справка 521—524
—, масса нейтрино 534—535
—, основные положения теории 525—526
—, разрешенные и запрещенные переходы 535—538

Движение нейтронов в водородсодержащих веществах (теория) (см. также Взаимодействие нейтронов с протонами)
— — — — —, альбедо 756—759, 761—764
— — — — —, логарифмическая ширина групп 764—766
— — — — —, распределение по скоростям 675—677
— — — — —, стадия диффузии 750—752
— — — — — —, — —, одномерный случай 752—756
— — — — — —, — —, трехмерный случай 756—759
— — — — —, стадия замедления 742—749
— — — — —, угловое распределение 760—761

Длина диффузии нейтронов 711—714, 739, 750—757

История физики, некоторые факты (хронолог.)
Критика Дж. Дж. Томсона двадцатидвухлетним Ферми 104
Ферми (1923) о возможности использования эйнштейновского соотношения $E = mc^2$ 82—83
«Инкубационный» период (1924) фермиевской статистики 154—159
Предложение (1924) метода эквивалентных фотонов 165—177
Первые исследования (1925) атомных спектров радиочастотными методами 191, 195—196
Открытие (1926) фермиевской статистики и первые ее приложения 199—202
Предложение (1927) метода Томаса — Ферми 278—279
Переформулировка (1929) квантовой электродинамики 302, 375
Ферми (1930) об истории физики XIX—XX вв. 343—349
Ферми (1930) о техническом прогрессе и фундаментальной науке 349—350
Модель ядра по Майоране 457
Нейтрино и нейтроны 457—458, 468
Ферми (1932) о проблемах ядерной физики 458—472
Подготовка к ядерным исследованиям в Риме 513—514, 592
Гипотеза нейтрино Паули 521—522
Ферми (1933) об отсутствии легких частиц внутри ядра 522, 525
Создание (1933) теории β-распада 522—524
Введение (1934) понятий длины рассеяния и псевдопотенциала 609, 616—617
Первые опыты (1934) по обнаружению радиоактивности под действием нейтронов 514, 592—593
Письмо Резерфорда Ферми 594
Предсказание деления Идой Ноддак 594
Трансурановые элементы и деление урана 593—594, 599, 799
Открытие (1934) замедления нейтронов 596—597
Ферми (1935) упускает открытие деления 600
Патент на метод замедления нейтронов 598
Первое использование Ферми (1935) метода Монте-Карло 599
Работы (1935—1936) над медленными нейтронами 686—690

Квантовая механика, адиабатический принцип и кинетическая энергия 231—236
— —, интерпретация принципа причинности 337—342
— —, магнитный момент атома 243—245
— —, механизм излучения 271—277
— —, процесс столкновения, аналогия с теорией дифракционных решеток 227—230

Квантовая теория излучения, идея Дирака 376
— — —, излучение возбужденного атома 387—389

— — —, переформулировка теории Дирака 377—387
— — —, распространение света в вакууме 389—393
— — —, рассеяние на свободных электронах 400—403
— — —, — — — — — и уравнение Дирака 412—418
— — —, теория излучения в нерелятивистском приближении 409—412
— — —, теорияполос Липпмана 394 — 396
— — —, — эффекта Допплера 396—399
— — —, уравнение Дирака 404—409

Квантовая электродинамика (см. также Квантовая теория излучения; Электромагнитная масса)
— —, аннигиляция электронов и позитронов 510—512
— —, взаимодействие двух электронов 428—438
— —, трудности 425—426
— —, уравнения в присутствии электрических зарядов, нерелятивистский случай 302—308
— —, — — — — —, релятивистский случай 359—363, 418—425

Комбинационное рассеяние в кристаллах NaCl 449—452
— — — — $Ca(CO_3)_2$ и $NaNO_3$ 452—456
— — в CO_2, CCl_4 442—449
— — и молекулярная симметрия 441—442
— —, историческая справка 439
— —, случайное вырождение (резонанс Ферми) 443—449

Космическое излучение, действие магнитного поля Земли 481—484
— — и теорема Лиувилля 480, 482

Магнитные моменты атомов 243—245
— — ядер 323—336, 485—486, 495—501

Масса излучения в пустоте 108—110
Медленные нейтроны (см. также Тепловые нейтроны; Возраст нейтронов: Время жизни нейтронов в парафине· Длина диффузии нейтронов)
— —, альбедо 707—711, 739
— —, группы 700—701
— —, диффузия различных групп 711—717
— —, историческая справка 686—690
— —, логарифмическая ширина групп 732—735
— —, метод «кадмиевой разности» 702
— —, методика опытов 693—697
— —, переход нейтронов из одной группы в другую 726—728
— —, поведение групп вблизи поверхности парафина 729—732, 739
— —, поглощение 646—647, 697—700
— —, — различных групп 702—705
— —, пространственное распределение 651—652, 721—725
— —, средняя длина свободного пробега 713—715, 736—740
— —, энергия 649—650
— —, — групп 723—725, 737

Метод Томаса — Ферми, вычисление поправок Ридберга к s-термам 295—297
— — —, — — — — — — — трехкратно ионизованных атомов 356—358
— — —, вычисление рентгеновских термов 293—295
— — —, вычисление собственных функций атомов с использованием релятивистских уравнений 542—553
— — —, — — — — — — — — — —, таблицы 554—570
— — —, идея 279, 288
— — —, историческая справка 278—279, 288, 452
— — —, приложение к теории периодической системы 284—287, 291—293
— — —, полная энергия атома 282—283
— — —, средний электрический потенциал в атоме 280—282, 289—291
— — —, — — — в ионе 352—356
— — —, теория группы редких земель 298—299
— — —, теория сродства галогенов с электроном 299—300

Механика статистическая (основные понятия)
— —, абсолютная температура 580
— —, вырождение 590—591
— —, давление и энергия при абсолютном нуле 591
— —, закон Дюлонга и Пти 583
— —, обобщенные координаты 573
— —, принцип Нернста 585—586
— —, принцип равномерного распределения энергии по степеням свободы 577—578
— —, распределение Больцмана 575—582
— —, распределение Максвелла 577
— —, соотношение неопределенности 587

— —, средние свойства систем 571—572
— —, статистики Бозе — Эйнштейна и Ферми — Дирака 588—591
— —, теорема Лиувилля 575
— —, теплоемкость твердых тел 585
— —, фазовое пространство 572—575
— —, формула Планка 585
— —, энтропия 582
— —, эргодические и квазиэргодические системы 574—575
— —, ячейки в фазовом пространстве и теория квантов 587

Механические моменты атомных ядер 461—463

Общая теория относительности, вес упругих тел 91—103
— — —, влияние гравитационного поля на электростатические явления 54—60
— — —, координаты Ферми 64—71

Оптическое резонансное излучение, влияние давления на рассеяние 150—153
— — —, влияние переменного магнитного поля на поляризацию (теория) 189—194
— — —, — — — — — — — (эксперимент) 195—198

Плоскость поляризации, увлечение вращающейся средой 104—107

Реакции (α, n) на разных ядрах 681—682
— (γ, n) на Be и D 682—683

Рентгеновские изображения предметов 86—89

Сверхтонкая структура спектров (см. также Магнитные моменты ядер)
— — —, влияние возмущений электронных конфигураций 491—495, 505—508
— — —, данные для отдельных элементов 495—502
— — —, историческая справка 322
— — — , константы связи отдельных электронов 488—491
— — —, природа явления 323—324, 461,—463, 485—487
— — — щелочных металлов 324—336

Смещение высших линий в атмосфере постороннего газа, влияние диэлектрической постоянной газа 612—614
— — — — —, влияние потенциальных ям 615—618
— — — — — и эффект Рамзауэра 617—618
— — — — —, псевдопотенциал и длина рассеяния 616—617
— — — — —, уширение линий 618—620

Спектроскопия молекул (см. также Комбинационное рассеяние)
— —, инфракрасные полосы трехатомных молекул 186—187
— —, колебательные и вращательные полосы аммиака 474—479
— —, термы $4d$ молекулы гелия 312—**314**

Статистика Ферми — Дирака, выступления Ферми на конференции в Комо (1927) 200—202
— — —, историческая справка 199—200
— — —, квантование идеального одноатомного газа 203—213
— — —, приложение к электронам в атомах (см. метод Томаса — Ферми)

Статистики атомных ядер 462—465

Статистическая физика (см. также Статистика Ферми — Дирака, Механика статистическая, Энтропия)
— —, вероятность квантовых состояний атома с разными объемами 146—149
— —, теория фотоэффекта 135—141
— —, теория термической ионизации 160—164

Тепловые нейтроны (см. также Движение нейтронов в водородсодержащих веществах, Медленные нейтроны)
— —, альбедо 707—711, 739, 794—795
— —, влияние температуры на активацию 679—680, 692
— —, диффузия 711—714
— —, историческая справка 686—690
— —, первое прямое определение скорости 680
— —, поведение вблизи поверхности парафина 729—732, 739
— —, поглощение 702
— —, пространственное распределение 721—723
— —, средняя длина свободного пробега 711, 717—721, 739

Техника эксперимента, искусственный генератор нейтронов 786—789
— —, спектрометр γ-лучей на кристалле висмута 515—518

Тождественность электронов 519—520

Электромагнитная масса в квантовой электродинамике 364—374, 426
— — как инертная 46—53, 73—81
— — — —, выражение через тензор 47—49
— — как гравитационная 60—63
— —, электродинамическая теория 46—53, 73—81
— —, — —, разрешение противоречия с теорией относительности 73—81, 108—110
— —, — —, релятивистское понятие жесткости 74—81
— —, — —, теория Абрагама 73
— —, — —, — Лоренца 73—74

Электро- и магнитооптические эффекты, введение 251—270
— — — —, магнитооптический эффект Керра 265
— — — —, оптическое резонансное излучение 262
— — — —, — — — влияние постоянного магнитного поля 262—263
— — — —, опыт Штерна и Герлаха 261—262
— — — —, теорема Лармора 253—254
— — — —, эффект Зеемана 255—260
— — — —, эффект Керра 266—267
— — — —, эффект Коттона 266
— — — —, эффект Макалузо — Корбино 265
— — — —, эффект Пашена — Бака 260—261
— — — —, эффект Фарадея 263—264
— — — —, эффект Штарка 267—270

Энтропия идеального газа 142—145
— — — с учетом тождественности 154—159
— — — — — принципа Паули 213
—, статистическое определение 582

Эргодические и квазиэргодические системы (см. Аналитическая механика и Механика статистическая)

Ядерная изомерия 679, 800

СОДЕРЖАНИЕ

От редакции 5

Энрико Ферми *(Б. Понтекорво)* 9

1921

1. О динамике системы жестко связанных электрических зарядов, движущейся поступательно 46
2. Об электростатике однородного гравитационного поля и о весе электромагнитной массы 54

1922

3. О явлениях, происходящих вблизи от мировой линии 64

1923

4. Разрешение существующего противоречия между электродинамической и релятивистской теориями электромагнитной массы 72
5. Масса в теории относительности 82
6. Образование изображений при помощи рентгеновских лучей . . . 84
7. О весе упругих тел 90
8. К увлечению плоскости поляризации вращающейся средой . . . 104
9. О массе излучения в пустом пространстве. *(Совместно с А. Понтремоли)* 108
10. Адиабатический принцип и системы, не допускающие введения угловых координат 111
11. I. Доказательство того, что нормальная механическая система в общем случае является квазиэргодической 115
    II. О существовании квазиэргодических систем 123
12. Некоторые теоремы аналитической механики, важные для теории квантов 125
13. Ричардсоновская статистическая теория фотоэлектрического эффекта 135
14. К штерновскому способу вычисления константы энтропии одноатомного идеального газа 142

1924

15. О вероятности квантовых состояний 146
16. Об отражении и рассеянии резонансного излучения 150
17. О квантовании систем, содержащих тождественные элементы . . . 154
18. О равновесной термической ионизации 160
19. К теории столкновений атомов с электрически заряженными частицами 166

1925

20. Об интенсивности линий мультиплета. 178
21. О соударениях атомов с ядрами водорода. 183
22. Об одном соотношении между постоянными инфракрасных полос трехатомных молекул. 186
23. Влияние переменного магнитного поля на поляризацию резонансного светового излучения. *(Совместно с Ф. Разетти)*. 188
24. Еще о влиянии переменного магнитного поля на поляризацию резонансного светового излучения. *(Совместно с Ф. Разетти)* 195

1926

25. О квантовании идеального одноатомного газа. 199
26. Об интенсивности запрещенных линий в сильных магнитных полях 214
27. О вращающемся электроне. *(Совместно с Ф. Разетти)*. 220
28. О волновой механике процесса столкновений. 227
29. Адиабатический принцип и понятие живой силы в новой волновой механике. *(Совместно с Э. Персико)*. 231
30. Об одной формуле теории вероятностей. 237
31. Квантовая механика и магнитный момент атома. 243

1927

32. Измерение отношения h/k по аномальной дисперсии паров таллия. *(Совместно с Ф. Разетти)*. 246
33. Электро- и магнитооптические эффекты и их интерпретация. 251
34. О механизме излучения в волновой механике. 271
35. Статистический метод определения некоторых свойств атома. . . . 278

1928

36. О статистическом выводе некоторых свойств атома. Приложение к теории периодической системы элементов. 284
37. О применении статистического метода в проблеме строения атома. 288

1929

38. О квантовой электродинамике. 302
39. О движении тела переменной массы. 309
40. О комплексе $4d$ молекулы гелия. 312

1930

41. О соотношении интенсивностей в дублетах щелочных металлов 315
42. О магнитных моментах атомных ядер. 322
43. Интерпретация принципа причинности в квантовой механике. . . 337
44. Современная физика. 343
45. К расчету спектров ионов. 351
46. О квантовой электродинамике 359

1931

47. Электромагнитная масса в квантовой электродинамике. 364

1932

48. Квантовая теория излучения. 375
49. О взаимодействии двух электронов. *(Совместно с Г. Бете)*. 428
50. Раман-эффект в молекулах и кристаллах. 439
51. Современное состояние физики атомного ядра. 458
52. О колебательных и вращательных полосах аммиака. 474

1933

53. Действие магнитного поля Земли на проникающее излучение. *(Совместно с В. Росси)*. 481
54. К теории сверхтонкой структуры. *(Совместно с Э. Сегре)* 485
55. О рекомбинации электронов и позитронов. *(Совместно с Дж. Уленбеком)*. 510
56. Кристалл висмута как спектрограф гамма-лучей. *(Совместно с Ф. Разетти)*. 515
57. Мельчайшие частицы материи. 519

1934

58. К теории β-лучей. 525
59. Орбиты ∞s элементов. *(Совместно с Э. Амальди)* 542
60. Статистическая механика. 571
61. Радиоактивность, наведенная нейтронной бомбардировкой. I. . . 601
62. Радиоактивность, наведенная нейтронной бомбардировкой . II. . . 603
63. Возможное образование элементов с атомным номером выше 92 605
64. О смещении высших спектральных линий под действием давления. 611
65. Искусственная радиоактивность, наведенная нейтронной бомбардировкой. *(Совместно с Э. Амальди, О. Д'Агостино, Ф. Разетти и Э. Сегре)*. 620
66. Естественный бета-распад 637
67. Влияние водородсодержащих веществ на радиоактивность, наведенную нейтронами. I. *(Совместно с Э. Амальди, Б. Понтекорво, Ф. Разетти и Э. Сегре)* 639
68. Влияние водородсодержащих веществ на радиоактивность, наведенную нейтронами. II. *(Совместно с Б. Понтекорво и Ф. Разетти)*. 642

1935

69. Искусственная радиоактивность, наведенная нейтронной бомбардировкой. II. *(Совместно с Э. Амальди, О. Д Агостино, Б. Понтекорво, Ф. Разетти и Э. Сегре)*. 643
70. О законе распределения медленных нейтронов по скоростям. . . . 675
71. Радиоактивность, наведенная нейтронной бомбардировкой. X. *(Совместно с Э.Амальди, О. Д'Агостино, Б. Понтекорво и Э. Сегре)* 679

72. О рекомбинации нейтронов и протонов 684

1936

73. О поглощении и диффузии медленных нейтронов. *(Совместно с Э. Амальди)* 691

74. О движении нейтронов в водородсодержащих веществах 741

1937

75. Учитель: Орсо Марио Корбино 782

76. Искусственный генератор нейтронов. *(Совместно с Э. Амальди и Ф. Разетти)* 786

77. Памяти лорда Резерфорда 790

1938

78. Воздействие бора на характеристические нейтроны иода. *(Совместно с Ф. Разетти)* 791

79. Альбедо медленных нейтронов. *(Совместно с Э. Амальди и Дж. Виком)* 794

80. Искусственная радиоактивность, возникающая при бомбардировке нейтронами 796

Именной указатель 805

Предметный указатель 810

Энрико Ферми

Научные труды

Том 1

Утверждено к печати
редакционной коллегией серии «Классики науки»

Редактор *С. И. Ларин*
Художественный редактор *Н. Н. Власик*
Технический редактор *Э. Л. Кунина*

Сдано в набор 19/III 1971 г. Подписано к печати 18/IX 1971 г.
Формат 70×90[1]/16. Бумага № 1. Усл. печ. л. 60,69
Уч.-изд. л. 50,8 Тираж 7200 Тип. зак. 2182

Цена 2 р. 97 к.

Издательство «Наука»
Москва К-62, Подсосенский пер., 21

2-я типография издательства «Наука»
Москва Г-99, Шубинский пер., 10

ОПЕЧАТКИ И ИСПРАВЛЕНИЯ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
179	6 сн.	вес J	Вес $\bar{J}$
196	19 св.	витками,	витками
273	Ф-ла (10)	$\dot{p}$	$\ddot{p}$
	Ф-ла (11)	$\ddot{\mathbf{p}}$	$\dddot{\mathbf{p}}$
319	2 сн.	подставить $f_n(r)$	подставить $f'_n(r)$
368	Ф-ла (12)	$w_j w_{j*} - w_j w_{j*}$	$\omega_j w_{j*} - w_j \omega_{j*}$
369	Ф-ла (14)	$\frac{w_j^2 + w_{j*}^2}{2}$	$\frac{\omega_j^2 + \omega_{j*}^2}{2}$
500	9 сн.	$6s^2\,ds$	$6s^2md$
545	2 сн.	$e^{3/2}$	$e^{5/2}$
701	4 сн.	1971 — *Ред.*	1971, стр. 192. — *Ред.*

Примечание. В оглавлении при указании страниц к статьям 19, 51, 52, 53, 56, 58, 61, 64, 71 и 73, к сожалению, по недосмотру не учтено наличие вводных замечаний, набранных петитом.

ЭНРИКО ФЕРМИ

НАУЧНЫЕ ТРУДЫ

I



2 р. 97 к.